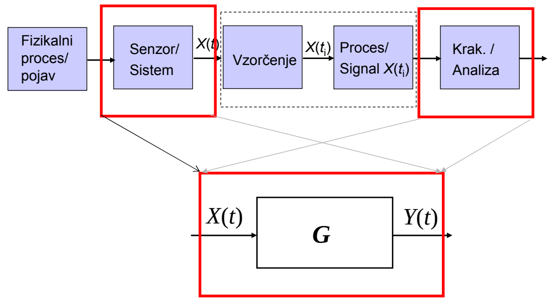
Poglavje 8

# Linearne transformacije naključnih procesov

## 8.0 Uvod

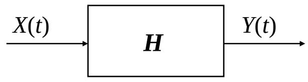
Mesto linearnih transformacij v eksperimentalnem stavku:




**Pregled vsebine poglavja:**



## 8.1 Osnovni pojmi




$$Y(t) = \boldsymbol{H}[X(t)]$$

$X(t)$ …. naključni proces, (vhodni signal), vhodna spre-menljivka, vzbujanje sistema

$Y(t)$ … transformirani NP, (izhodni signal), izhodna spre-menljivka, odziv sistema

$\boldsymbol{H}$ ….. simbolična oznaka za transformacijo oziroma vpliva sistema, (operator)

**Linearnost transformacije, sistema oziroma operatorja:**

Predpostavimo, da imamo dvodimenzionalni naključni vektor:

$$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$$

Transformacija oziroma sistem je linearen če za operator $\boldsymbol{H}$ velja:

$$\boldsymbol{H}(aX_1 + bX_2) = a\boldsymbol{H}(X_1) + b\boldsymbol{H}(X_2)$$

$\boldsymbol{H}$ je *homogen* in *aditiven* $\Rightarrow$ $\boldsymbol{H}$ je *linearna transform.*

**Primer :**

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{H}(X_1, X_2) = (X_1^2, X_2^2)$$

$\boldsymbol{H}$ ni nelinearna transformacija

Naj bolj splošen primer dvodimenzionalne linearne transformacije $\boldsymbol{H}$ :

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{X})$$

je opredeljena z enačbama:

$$Y_1 = h_{11}X_1 + h_{12}X_2$$
$$Y_2 = h_{21}X_1 + h_{22}X_2$$

kjer so koeficienti $g_{ij}$ poljubna realna števila.

Če ima $\boldsymbol{X}$ povezani verjetnost:

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$$

In če obstaja inverzna transformacija:

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{H}^{-1}$$

Je povezana verjetnost $\boldsymbol{Y}$ podana z:

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = f_{X_1,X_2}(h_1(x_1,x_2),h_2(x_1,x_2))\left|\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(y_1,y_2)}\right|$$

Pogosto ne obstaja inverzna transformacija $G$ ali pa ne poznamo:

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$$

poznamo pa, momente spremenljivke $\boldsymbol{X}$ s katerimi lahko izrazimo momente spremenljivke $\boldsymbol{Y}$:

**Primer :**

$$\mathrm{E}[Y_1] = h_{11}\,\mathrm{E}[X_1] + h_{12}\,\mathrm{E}[X_2]$$
$$\mathrm{E}[Y_2] = h_{21}\,\mathrm{E}[X_1] + h_{22}\,\mathrm{E}[X_2]$$

Dvodimenzionalni primer lahko razširimo na več dimenzionalne naključne vektorje $\boldsymbol{X}$ in $\boldsymbol{Y}$ :

$$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

$$\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$$

kjer je $n \geq m$.

Linearna transformacija je opredeljena z:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{X})$$

Analogno kot pri dvodimenzionalnem primeru, je najsplošnejša oblika linearne transformacije podana z sistemom linearnih enačb:

$$\begin{aligned}
Y_1 &= h_{11}X_1 + h_{12}X_2 + \cdots + h_{1n}X_n \\
Y_2 &= h_{21}X_1 + h_{22}X_2 + \cdots + h_{1n}X_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Y_m &= h_{m1}X_1 + h_{m2}X_2 + \cdots + h_{mn}X_n
\end{aligned}$$

Kjer so $h_{ij}$ poljubna realna števila

Pri velikih $n$ in $m$ se poslužujemo matričnega zapisa:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & h_{ij} & \vdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

Kjer je:

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} h_{ij} X_j \; ; i = 1, \ldots, m$$

Zapis

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} h_{ij} X_j \; ; i = 1, \ldots, m$$

lahko razširimo na števno neskončno komponent oziroma na diskretni naključni proces, kjer posamezno komponento izrazimo z vrsto:

$$Y_i = \sum_{j=1}^{\infty} h_{ij} X_j \; ; \quad i = 1, \ldots, m$$

Pri tem predpostavimo, da vrsta konvergira za vsak $i$

**Primer**: vzorčno povprečje kot primer diskretne linearne transformacije:

$$
\begin{aligned}
Y_i = \overline{X} &= \sum_{j=1}^{n} h_{ij} X_j \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \\
&= \frac{1}{n}X_1 + \frac{1}{n}X_2 + \cdots + \frac{1}{n}X_n
\end{aligned}
$$

## 8.2 Linearna transformacija zveznega procesa

Pri prehodu iz linearne transformacije diskretnega procesa v linearno transformacijo zveznega procesa preide vsota

$$Y_i = \sum_{j=1}^{\infty} g_{ij} X_j \,; \quad i = 1, \ldots, m$$

v integral oblike:

$$Y(t) = \int_{t' \in T} X(t')\,\mathrm{d}\,g(t,t')$$

Kadar je $g(t,t')$ odvedljiva funkcija parametra lahko zapišemo:

$$\mathrm{d}\,g(t,t') = h(t,t')\,\mathrm{d}\,t'$$

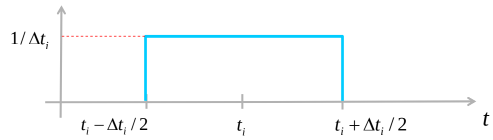
Iz česar sledi:

$$Y(t) = \int_{t' \in T} X(t') h(t,t')\,\mathrm{d}\,t'$$

Pri tem $h(t,t')$ imenujemo težnostna ali impulzna odzivna funkcija sistema.

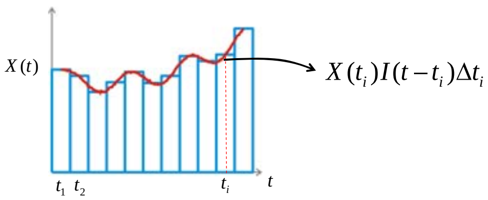
### 8.2.1 Interpretacija impulzne odzivne funkcije $h(t,t')$ in odziv sistema $Y(t)$ :

V ta namen opredelimo enotsko impulzno funkcijo $X(t)$ :




$$I(t - t_i) = \begin{cases} 1/\Delta t_i, \text{za } t \in (t_i - \Delta t_i/2, t_i + \Delta t_i/2, \\ 0, \quad \text{za } t \notin (t_i - \Delta t_i/2, t_i + \Delta t_i/2 \end{cases}$$

Vrednost spremenljivke $X(t)$ v točki $t_i$ podamo z:




Spremenljivko $X(t)$ v odvisnosti od časa pa sestavimo z vsoto:

$$X(t) \approx \sum_i X(t_i) I(t - t_i)\Delta t_i$$

Ujemanje med vsoto in spremenljivko $X(t)$ se veča z gostoto delitve:

$$X(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i X(t_i) I(t - t_i)\Delta t_i$$

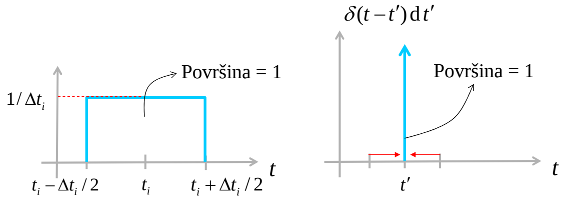
$$= \int X(t')\delta(t - t')\,\mathrm{d}t'$$

Kjer je $\delta(t-t')$:

$$\delta(t - t')\,\mathrm{d}\,t' = \lim_{\Delta t_i \to 0} I(t - t_i)\Delta t_i$$

enotska impulzna ali Diracova funkcija.

Lastnosti Dirakove:




$$\lim_{\Delta t_i \to 0} I(t-t_i)\Delta t_i = \delta(t-t')\,\mathrm{d}t'$$

$$\int \delta(t-t')\,\mathrm{d}t' = 1$$

**Določitev odziva sistema** $Y(t)$ :

Predpostavimo, da enotski impulz $\delta(t-t')\mathrm{d}t'$ pri času $t'$ povzroči odziv sistema, ki ga v odvisnosti od časa $t$ opišemo z $\mathrm{d}g(t,t')$. Tedaj formalno velja:

$$\boldsymbol{H}\left[\delta(t-t')\,\mathrm{d}t'\right] = \mathrm{d}\,g(t,t') = h(t,t')\,\mathrm{d}t'$$

kjer se:

$$\mathrm{d}\,g(t,t') = h(t,t')\,\mathrm{d}t'$$

imenuje težnostna ali impulzna odzivna funkcija sistema $\boldsymbol{H}$ in opisuje odziv sistema na vzbujanje z impulzno funkcijo $\delta$.

Z upoštevanjem linearnosti sistema in zapisa vhodne funkcije $X(t)$ s pomočjo posameznih enotskih impulzov je odziv sistema $Y(t)$ opredeljen z:

$$Y(t) = \boldsymbol{H}\left[X(t)\right] = \boldsymbol{H}\left[\int X(t')\delta(t-t')\,\mathrm{d}t'\right]$$
$$= \int X(t')\boldsymbol{H}\delta(t-t')\,\mathrm{d}t' = \int X(t')\,\mathrm{d}\,g(t,t')$$
$$= \int X(t')h(t,t')\,\mathrm{d}t'$$

Pri tem $X(t')$ obravnavam kot amplitudo impulza pri času $t'$.

$h(t,t')$ **za realne kavzalne sisteme:**

Ker se realni sistem ne more odzvati predno je vzbujen mora za realne sisteme odzivna funkcija $h(t,t')$, zadoščati pogoju kavzalnosti ali vzročnosti :

$$h(t,t') = 0, \text{ za } t < t'$$

$h(t,t')$ **za sisteme s konstantnimi parametri:**

so sistemi katerih struktura se ne spreminja. Matematično jih popišemo s diferencialnimi enačbami s konstatntnimi koeficienti.

**Primer:** Sistem mase, vzmeti in dušilke

$$m\ddot{y} + b\ddot{y} + ky = X(t)$$

kjer so $m$, $b$ in $k$ masa, karakteristika dušilke in vzmetna konstanta, ki predstavljajo parametre neodvisne od časa oz. konstantne. $X(t)$ predstavlja naključno vzbujanje.

Sistem s konstantnimi parametri so časovno neodvisni in se na vzbujevalni impulz odzovejo vedno na enak način.

$\Rightarrow$ Odzivna funkcija $h(t,t')$, je lahko odvisna samo od od časa nastopa $t'$ oziroma razlike časov $t$-$t'$:

$$h(t,t') = \begin{cases} h(t-t'), & \text{za } t-t' \geq 0 \\ h(t-t') = 0, & \text{za } t-t' < 0 \end{cases}$$

Za časovno neodvisne sistema odziv sistema $Y(t)$ dobi obliko:

$$Y(t)=\int X(t')h(t,t')\,\mathrm{d}t'$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} X(t')h(t-t')\,\mathrm{d}t'$$

kjer je:

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(t')h(t-t')\,\mathrm{d}t'$$

konvolucijski integral.

Za proces $X(t)$, ki se je začel za $T$ pred časom $t$ opazovanja procesa $Y(t)$ je:

$$X(t')=0 \quad za\ t'<(t-T)$$

in konvolucijski integral dobi obliko:

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} X(t')h(t-t')\,\mathrm{d}t'$$

$$=\int_{t-T}^{t} X(t')h(t-t')\,\mathrm{d}t'$$

S substitucijo $t$-$t'$ = $t_1$ in $\mathrm{d}t$ = - $\mathrm{d}t_1$, dobimo: :

$$Y(t)=\int_{0}^{T} X(t-t_1)h(t_1)\,\mathrm{d}t_1$$

**Primer :** Povprečenja signala $X(t)$ :

$$Y(t)=\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} X(t')\,\mathrm{d}t'$$

je primer transformacije ali odziva sistema z odzivno z odzivno funkcijo :

$$h(t-t')=\begin{cases}1/T,\mathrm{za}\ 0\le t-t'\le T\\ 0,\quad \mathrm{za}\ t \quad \mathrm{drugod}\end{cases}$$

**8.2.2 Povezave momentov vhodnih in izhodnih procesov:**

1) Povprečna vrednost:

$$\mathrm{E}[Y(t)]=\mathrm{E}\left[\int X(t')h(t,t')\,\mathrm{d}t'\right]$$

kjer je $X(t')$ naključna spremenljivka

Vrstni red linearnih operacij $\int$ in $\mathrm{E}$ lahko ob izpolnjenih pogojih konvergence integralov zamenjamo

zato velja: $\mathrm{E}[Y(t)]=\int \mathrm{E}[X(t')]h(t,t')\,\mathrm{d}t'$

$\Rightarrow$

da za $\mathrm{E}[Y(t)]$ ne potrebujemo porazdelitve povezane verjetnosti spremenljivke $Y$.

2 ) Za korelacijsko funkcijo izhoda velja enaka ugotovitev:

$$\mathrm{E}[Y(t_1),Y(t_2)]=\mathrm{E}\left[\iint X(t_1')h(t,t_1')X(t_2')h(t,t_2')\,\mathrm{d}t_1'\,\mathrm{d}t_2'\right]$$

$$=\iint \mathrm{E}[X(t_1')X(t_2')]h(t,t_1')h(t,t_2')\,\mathrm{d}t_1'\,\mathrm{d}t_2'$$

$$R_{YY}(t_1,t_2)=\iint R_{XX}(t_1',t_2')h(t,t_1')h(t,t_2')\,\mathrm{d}t_1'\,\mathrm{d}t_2'$$

3. Križna korelacijska funkcija:

$$\mathrm{E}[Y(t_1),X(t_2)]=\mathrm{E}\left[\int X(t_1')h(t,t_1')\,\mathrm{d}t_1'X(t_2)\right]$$

$$=\int \mathrm{E}[X(t_1')X(t_2)]h(t,t_1')\,\mathrm{d}t_1'$$

$$R_{YX}(t_1,t_2)=\int R_{XX}(t_1',t_2)h(t,t_1')\,\mathrm{d}t_1'$$

Izrazi za momente dobijo še bolj enostavno obliko v primeru časovno neodvisnih sistemov.

**Povezave momentov za stacionarne procese in časovno neodvisne sisteme**:

V tem primeru velja:

1. $E[X(t_1)] = E[X(t_1+t_2)] = m =$ konst.,
2. $E[X(t_1)\,X(t_2)] = E[X(t_1+t_0)\,X(t_2+t_0)] = R_{XX}(t_1- t_2)$,
3. $h(t_1, t_2) = h(t_1- t_2)$

iz česar sledi:

$$E[Y(t)] = \int E[X(t')]h(t,t')\,dt' = m_X \int h(t-t')\,dt'$$

Z vpeljavo spremenljivke $t$-$t' = z$, $dt' = dz$:

$$E[Y(t)] = m_X \int h(z)\,dz = \text{konst.}$$

Integriral je neodvisen od časa $t$

$$\Rightarrow \qquad E[Y(t)] = \text{konst.}$$

Podobno obravnavamo korelacijsko funkcijo:

$$E(Y(t_1)Y(t_2)) = \iint R_{XX}(t_1', t_2')h(t,t_1')h(t,t_2')\,dt_1'\,dt_2'$$

$$= \iint R_{XX}(t_1'-t_2')h(t-t_1')h(t-t_2')\,dt_1'\,dt_2'$$

S substitucijo $t_1$-$t_1' = z_1$, $t_2$-$t_2' = z_2$:

$$E(Y(t_1)Y(t_2))$$

$$= \iint R_{XX}(t_1 - z_1 - t_2 + z)h(z_1)h(z_2)\,dz_1\,dz_2$$

$$\Rightarrow \qquad E[Y(t_1)Y(t_2)] = R_{YY}(t_1\text{-}t_2)$$

Iz izpeljanih izrazov za momente odziva sledi:

1. Linearni časovno neodvisen sistem ***H*** pri transformaciji stacionarnega procesa $X(t)$ ohranja njegovo stacionarnost.

2. Za izračun momentov odziva $Y(t)$ v splošnem ne potrebujemo poznati funkcije porazdelitve povezane verjetnosti za spremenljivko $Y$.

## 8.3 Harmonično vzbujanje linearnega sistema

Do sedaj smo obravnavali impulzno vzbujanje sistema.

V nadaljevanju nas zanima lastnosti odziva linearnega sistema na vzbujanje oblike:

$$x(t) = a\cos(\omega t + \varphi)$$

Kjer je: $a$ ... realna amplituda vzbujanja
$\omega$ ... krožna frekvenca
$\varphi$ ... fazni kot

Za linearni časovno neodvisni sistem, odziv sistema izrazimo s konvolucijo:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t')h(t')\,dt'$$

Vsako harmonično funkcijo lahko izrazimo z linearno kombinicijo $e^{i\omega t}$. Zato in zaradi linearnosti je dovolj, da poznamo odziv sistema na:

$$x(t) = e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$$

za katerega velja:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')}h(t')\,dt' = e^{i\omega(t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t'}h(t')\,dt'$$

$$= e^{i\omega(t)}\,H(\omega)$$

$\Rightarrow$
odziv sistema izračunamo tako, da vhod pomnožimo z $H(\omega)$, ki je opredeljen z:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t'} h(t')\,dt'$$

$H(\omega)$ .... frekvenčna odizivna funkcija sistema

V praksi se izkaže se, da je zaradi načina opisovanja tehniških sistemov z diferencialnimi enačbami $H(\omega)$ dosti lažje izraziti kot impulzno odzivno funkcijo $h(t')$.

**Primer:** Določi frekvenčno odzivno funkcijo za sistem mase $m$ na vzmeti $k$ in viskozni dušilki $d$.

Časovni odziv $y(t)$ sistema na vzbujanje s silo $x(t)$ je podan z diferencialno enačbo:

$$m\ddot{y} + d\dot{y} + ky = x(t)$$

In začetnima pogojema $\dot{y}(0)$ in $y(0)$ .

Za vzbujanje v obliki $x(t) = e^{i\omega t}$ je odziv podan z:

$$y(t) = e^{i\omega(t)} H(\omega)$$

$y(t) = e^{i\omega(t)} H(\omega)$ vstavimo v diferencialno enačbo :

$$m\ddot{y} + d\dot{y} + ky = x(t)$$

in dobimo:

$$(-m\omega^2 + id\omega + k)H(\omega)\,e^{i\omega(t)} = e^{i\omega(t)}$$

in :

$$H(\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2 + id\omega}$$

S primerjavo izraza za $H(\omega)$ in diferencialne enačbe vidimo, da lahko frekvenčno odzivno funkcijo sistema preberemo iz diferencialne enačbe.

V ta namen $n$-ti odvod:

$$m\ddot{y} + d\dot{y} + ky = x(t)$$

pretvorimo v $(i\omega)^n$. S tem dobimo karakteristični polinom:

$$(-m\omega^2 + id\omega + k)$$

Recipročna vrednost določa frekvenčno odzivno funkcijo sistema:

$$H(\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2 + id\omega}$$

**Realno harmonično vzbujanje**

Kako lahko z $H(\omega)$ , ki je vsplošnem kompleksna izrazimo odziv na realno harmonično vzbujanje $a\cos(\omega t + \varphi)$.

V ta namen realno harmonično vzbujanje izrazimo v eksponentni obliki:

$$a\cos(\omega t + \varphi) = a\,\frac{e^{i(\omega t+\varphi)} + e^{-i(\omega t+\varphi)}}{2}$$

$$= \frac{a\,e^{i\varphi}e^{i\omega t} + a\,e^{-i\varphi}e^{-i\omega t}}{2} = \Re\left[A e^{i\omega t}\right]$$

Kjer je $A = ae^{i\varphi}$ kompleksna amplituda.

Vhodna spremenljivka je vsota dveh funkcij zato je tudi izhod $y$ sestavljen iz dveh členov:

$$x(t) = \frac{a\,e^{i\varphi}e^{i\omega t} + a\,e^{-i\varphi}e^{-i\omega t}}{2}$$

Vhodna spremenljivka je vsota dveh funkcij zato je tudi izhod $y$ sestavljen iz dveh členov:

$$y(t) = H(\omega)\frac{a}{2}e^{i\varphi}e^{i\omega t} + H(-\omega)\,e^{-i\varphi}e^{-i\omega t}$$

Po definicije za $H(\omega)$ :

$$H(\boldsymbol{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\omega t'} h(t')\,\mathrm{d}\,t'$$

izrazimo $H(-\omega)$:

$$H(-\boldsymbol{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\omega t'} h(t')\,\mathrm{d}\,t' = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\omega t'} h(t')\,\mathrm{d}\,t'\right]^*$$

$$= H^*(\omega)$$

kjer * označuje konjugacijo.

Z upoštevanjem izraza za $H(-\omega)$ dobi enačba z odziv sistema:

$$y(t) = H(\boldsymbol{\omega})\frac{a}{2}\mathrm{e}^{i\varphi}\mathrm{e}^{i\omega t} + H(-\boldsymbol{\omega})\,\mathrm{e}^{-i\varphi}\mathrm{e}^{-i\omega t}$$

obliko:

$$y(t) = \frac{1}{2}H(\boldsymbol{\omega})a\,\mathrm{e}^{i\varphi}\mathrm{e}^{i\omega t} + \frac{1}{2}\left[H(\boldsymbol{\omega})\,\mathrm{e}^{i\varphi}\mathrm{e}^{i\omega t}\right]^*$$

$$= \Re\left[H(\boldsymbol{\omega})A\mathrm{e}^{i\omega t}\right]$$

$\Rightarrow$
Frekvenčno odzivno funkcijo $H(\omega)$ , ki je v splošnem kompleksna uporabimo za računanje realnega odziva na realno vzbujanje.

Če je $\boldsymbol{H}$ linearni operator, ki opisuje vpliv sistema na vhodni signal $x$ dobimo:

1) Za kompleksen vhodni signal $x=Ae^{\,i\omega t}$:

$$y(t) = \boldsymbol{H}(x) = \boldsymbol{H}(A\mathrm{e}^{i\omega t}) = H(\boldsymbol{\omega})A\mathrm{e}^{i\omega t} = H(\boldsymbol{\omega})x$$

2) Za realni vhod $x = \Re[x] = \Re\left[A\,\mathrm{e}^{i\omega t}\right] = a\cos(\omega t + \varphi)$

pa dobimo realni odziv:

$$y = \boldsymbol{H}[\Re(x)]$$

$$= \Re\left[H(\boldsymbol{\omega})A\mathrm{e}^{i\omega t}\right] = \Re[H(\boldsymbol{\omega})x] = \Re[\boldsymbol{H}(x)]$$

$$\Rightarrow \quad y = \boldsymbol{H}[\Re(x)] = \Re[\boldsymbol{H}(x)]$$

Iz lastnosti:

$$y = \boldsymbol{H}[\Re(x)] = \Re[\boldsymbol{H}(x)]$$

$\Rightarrow$ vrstni red določanja realne vrednosti kompleksnega signala in določanja odziva sistema lahko zamenjamo.

Oziroma:
V praksi za opis vzbujanja uporabljamo kompleksne harmonične signale, ker je v tem primeru določanje odziva sistema enostavnejše.

Nato za opis dejanskega vzbujanja in odziva uporabimo le realne vrednosti, kar lahko storimo na koncu obravnave.

## 8.4 Fourierjeva analiza odzivnih funkcij

Za harmonsko vzbujanje

$$x(t) = \mathrm{e}^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$$

je odziv podan z:

$$\boxed{y(t) = \mathrm{e}^{i\omega(t)}\,H(\boldsymbol{\omega})}$$

kjer je:

$$\boxed{H(\boldsymbol{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\omega t'} h(t')\,\mathrm{d}\,t'}$$

??? $x(t)$ poljubna časovna funkcija, $y(\omega)$ ???

### 8.4.1 Osnovni pojmi periodičnih funkcij

$x(t)$ je periodična s periodo $T > 0$ če velja:

$$x(t) = x(t+T) \qquad \text{za vsak } t$$

$\min\{T\} \equiv T_0$ . . . . osnovna perioda

$\omega_0 = 2\pi / T_0$ . . . . . osnovna krožna frekvenca

$x_0(t)$ . . . osnovni ali prvi harmonik

Nabor funkcij $x_k(t)$:

$$x_k(t) = e^{i\omega_k t} = e^{ik\omega_0 t} \qquad T_0 = 2\pi/\omega_0$$

$x_k(t)$ . . . $k$-ti višji harmonik

$k\,\omega_0 = \omega_k$ . . . $k$-ta višja krožna frekvenca

Poljubna linearna kombinacija funkcij $x_k(t)$:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{ik\omega_0 t}$$

je periodična funkcija z osnovno periodo $T_0$.

## 8.4.2 Fourjerjeva vrsta

V splošnem lahko poljubno periodično funkcijo $x(t)$ z osnovno periodo $T_0 = 2\pi/\omega_0$ zapišemo s kompleksno Fourjerjevo vrsto :

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k\, e^{i\omega_k t}}$$

kjer so:

$\alpha_k$ . . . kompleksni Fourjerjevi koeficienti.

Na osnovi izraza periodične funkcije $x(t)$ s pomočjo Fourjerjeve vrste:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\alpha}_k\, e^{i\omega_k t}$$

ter upoštevanjem linearnosti sistema je odziv sistema na poljubno periodično funkcijo podan z:

$$\boxed{y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k\, e^{i\omega_k t}\, H(\omega_k)}$$

kjer je:

$$\boxed{H(\boldsymbol{\omega}_k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_k t'} h(t')\,\mathrm{d}t'}$$

frekvenčna odzivna funkcija sistema za $\omega_k$.

**Določitev koeficientov $\alpha_k$ za periodično $x(t)$ :**

V ta namen vrsto pomnožimo z $e^{-i\omega_n t}$ :

$$x(t)\,e^{-i\omega_n t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\alpha}_k\, e^{i\omega_k t} e^{-i\omega_n t}$$

in obe strani integriramo od 0 do $T_0 = 2\pi/\omega_0$:

$$\int_0^{T_0} x(t)\,e^{-i\omega_n t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \int_0^{T_0} e^{i\omega_k t} e^{-i\omega_n t}\,\mathrm{d}t$$

Z uporabo Eulerjeve formule integral na desni zapišemo:

$$\int_0^{T_0} e^{i\omega_k t} e^{-i\omega_n t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{T_0} e^{i(k-n)\omega_0 t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{T_0} \cos(k-n)\omega_0 t\,\mathrm{d}t + i\int_0^{T_0} \sin(k-n)\omega_0 t\,\mathrm{d}t$$

ob upoštevanju lastnosti harmoničnih funkcij velja:

$$\int_0^{T_0} e^{i(k-n)\omega_0 t}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} T_0, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\int_0^{T_0} x(t)\,e^{-i\omega_n t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \int_0^{T_0} e^{i\omega_k t} e^{-i\omega_n t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \alpha_n T_0$$

Koeficienti Fourierjeve vrste so podani z :

$$\boxed{\alpha_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,e^{-i\omega_n t}\,\mathrm{d}t}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \, \mathrm{e}^{i\omega_k t}}$$

$$\boxed{\alpha_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega_k t}\,\mathrm{d}t}$$

Koeficienti $\alpha_k$ se imenujejo tudi spektralni koeficienti funkcije $x(t)$ in merijo delež $k$-tega harmonika v $x(t)$ .

**Realna oblika Fourjerjeve vrste:**

Za realno funkcijo $x(t)$ z osnovno periodo $T_0$ velja:

$$x^*(t) = x(t)$$

Fourjerjevo vrsto lahko zapišemo :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \, \mathrm{e}^{ik\omega_0 t} = x^*(t) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \, \mathrm{e}^{ik\omega_0 t}\right)^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k^* \, \mathrm{e}^{-ik\omega_0 t}$$

Z zamenjavo $k$=-$k$ dobimo:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_{-k}^* \, \mathrm{e}^{ik\omega_0 t}$$

Velja:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \, \mathrm{e}^{ik\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_{-k}^* \, \mathrm{e}^{ik\omega_0 t}$$

Iz tega sledi, da je:

$$\boxed{\alpha_k(t) = \alpha_{-k}^*(t)}$$

oziroma:

$$\boxed{\alpha_k^*(t) = \alpha_{-k}(t)}$$

Za izpeljavo realne oblike Fourjerjeve vrste preuredimo kompleksno realnoobliko v:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\alpha}_k \, \mathrm{e}^{i\omega_k t} \\ &= \boldsymbol{\alpha}_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\boldsymbol{\alpha}_k \, \mathrm{e}^{i\omega_k t} + \boldsymbol{\alpha}_{-k} \, \mathrm{e}^{-i\omega_k t}\right] \\ &= \boldsymbol{\alpha}_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\boldsymbol{\alpha}_k \, \mathrm{e}^{i\omega_k t} + \boldsymbol{\alpha}_k^* \, \mathrm{e}^{-i\omega_k t}\right] \end{aligned}$$

$$\boxed{x(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\Re\left\{\alpha_k \, \mathrm{e}^{i\omega_k t}\right\}}$$

Realna Fourjerjeva vrsta za $\alpha_k$ v komponentni obliki:

$$\boldsymbol{\alpha}_k = a_k + ib_k$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\Re\left\{(a_k + ib_k)\,\mathrm{e}^{i\omega_k t}\right\}$$

$$\boxed{x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)\right]}$$

Realne koeficiente $a_k$ in $b_k$ izračunamo z:

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,\mathrm{d}t$$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\cos(\omega_k t)\,\mathrm{d}t$$

$$b_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\sin(\omega_k t)\,\mathrm{d}t$$

Za sodo funkcijo: $x(t) = x(-t) \rightarrow b_k = 0$

Za liho funkcijo: $x(t) = -\,x(-t) \rightarrow a_k = 0$

Povezave med realnimi in kompleksnimi koeficienti

$$a_k = \alpha_k + \alpha_{-k} = \alpha_k + \alpha_k^*$$

$$b_k = i(\alpha_k - \alpha_{-k}) = i(\alpha_k - \alpha_k^*)$$

$$\alpha_k = \frac{(a_k - i b_k^*)}{2}$$

**Primer:**

$$x(t) = 1 + \sin(\omega_0 t)$$

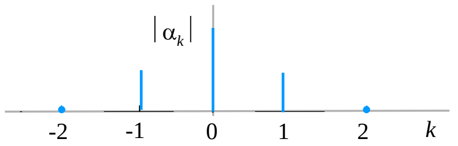
$$= 1 + \frac{1}{2i} e^{i\omega_0 t} - \frac{1}{2i} e^{-i\omega_0 t}$$

$$\alpha_0 = 1$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2i}, \qquad \alpha_{-1} = -\frac{1}{2i}$$

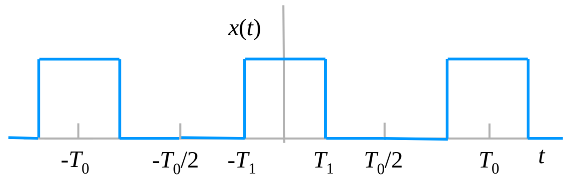
$$\alpha_k = 0, \qquad k \neq +1, -1$$

Grafa $|\alpha_k|$:




**Primer** nezvezne periodične funkcije $x(t)$:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < \dfrac{T_0}{2} \end{cases}$$




Fourierjevi koeficienti imajo obliko:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \mathrm{d}t = \int_{-T_1}^{T_1} \mathrm{d}t = \frac{2T_1}{T_0}$$

za $k \neq 0$:

$$\alpha_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_1}^{T_1} 1 e^{-i\omega_k t}\, \mathrm{d}t = -\frac{1}{i\omega_k T_0} e^{-i\omega_k t} \Big|_{-T_1}^{T_1}$$

$$= \frac{2}{\omega_k T_0} \left[ \frac{e^{i\omega_k T_1} - e^{-i\omega_k T_1}}{2i} \right]$$

za $k \neq 0$:

$$\alpha_k = \frac{2}{\omega_k T_0} \left[ \frac{e^{i\omega_k T_1} - e^{-i\omega_k T_1}}{2i} \right] = \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T_0}$$

z upoštevanjem da velja $\omega_0 T_0 = 2\pi$:

$$\alpha_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$$

Za primer $T_0 = 4T_1$ ( $\omega_0 T_1 = \pi / 2$):

$$\alpha_k = \frac{\sin(k\pi / 2)}{k\pi}$$

Vrednosti Fourierjevih koeficientov :

$$a_0 = \frac{1}{2}$$

za $k > 0$ in sodo, $a_k = 0$

za $k > 0$ in liho :

$$\alpha_1 = \alpha_{-1} = \frac{1}{\pi}$$

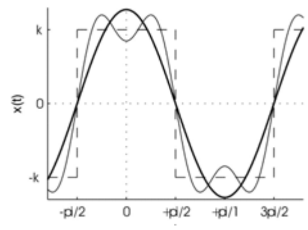
$$\alpha_3 = \alpha_{-3} = -\frac{1}{3\pi}$$

$$\alpha_5 = \alpha_{-5} = \frac{1}{5\pi}$$

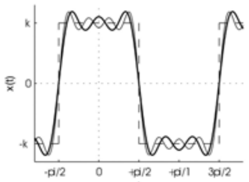
**Primeri aproksimacij $x(t)$ v odvisnosti od števila členov $k$:**

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)\right]$$

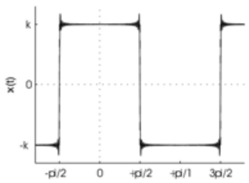
$k$=2



$k$=4

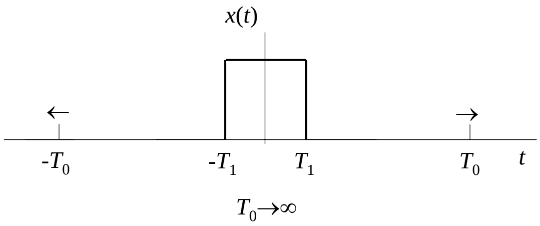


$k$=51



**Predstavitev neperiodičnih funkcij $x(t)$ – Fourjerjeva Transformacija:**

Neperiodično funkcijo $x(t)$ predstavimo kot periodično funkcijo $\tilde{x}(t)$, z neskončno periodo $T_0 \to \infty$ :.




Vpliv $T_0 \to \infty$ na koeficiente Fourjerjeve vrste:

$$\alpha_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T_0} \to \alpha_k T_0 = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0}$$

pri tem je $\omega_0 = 2\pi / T_0$

$$\alpha_k T_0 = \alpha_k T_0(\omega) = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0} = \left.\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}\right|_{\omega = k\omega_0}$$

$T_0 \to \infty$; $\omega_0 \to 0$, $k\omega_0 \to \omega$ ($\omega$ zvezna spremenljivka)

$\alpha_k T_0(k\omega_0) \to \alpha_k T_0(\omega) = H(\omega)$ ogrinjalka $\alpha_k T_0$

Vpliv $T_0 \to \infty$ na predstavitev Fourjerjeve vrste:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \, e^{i\omega_k t}$$

$$\alpha_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t)\, e^{-i\omega_k t}\, dt$$

ker $\tilde{x}(t)$= $x(t)$ za $|t| < T_0/2$ in $x(t) = 0$ izven intervala $|t| < T_0/2$ velja:

$$\alpha_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, e^{-i\omega_k t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-i\omega_k t}\, dt$$

Opredelimo ogrinjalko $X(\omega) = \alpha_k T_0$:

$$\boxed{X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt}$$

$\Rightarrow$ koeficiente vrste $\alpha_k$ lahko izrazimo z:

$$\alpha_k = \frac{1}{T_0} X(\omega_k)$$

in lahko zapišemo:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k\,\mathrm{e}^{i\omega_k t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} H(\omega_k)\,\mathrm{e}^{i\omega_k t}$$

Ker je $T_0 = 2\pi / \omega_0$ :

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} H(\omega_k)\,\mathrm{e}^{i\omega_k t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(k\omega_0)\,\mathrm{e}^{ik\omega_0 t}\,\omega_0$$

za $T_0 \to \infty$ ; $\omega_0 \to \mathrm{d}\omega,\ k\omega_0 \to \omega$ sledi :

$$\boxed{\tilde{x}(t) \to x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,\mathrm{d}\,\omega}$$

Enačbi :

$$\boxed{\begin{aligned} H(\boldsymbol{\omega}) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{\omega} t}\,dt \\ x(t) &= \frac{1}{2\boldsymbol{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H(\boldsymbol{\omega})\,\mathrm{e}^{i\boldsymbol{\omega} t}\,d\boldsymbol{\omega} \end{aligned}}$$

predstavljata *Fourjerjeva integrala* oziroma Fourjerjevo transformacijo in inverzno Fourjerjevo transformacijo .