

## Poglavje 15

### Kaotični sistemi in procesi

## 15.0 Uvod

Nelinearnim determinističnim sistemom in procesom, ki kažejo neregularno in na začetne pogoje občutljivo vedenje pravimo *kaotični* sistemi.

Nelinearnost sistema je potreben pogoj.

#### Primeri:

- Metanje kocke
- Gibanje biljardne žogice
- Nelinearna nihala, - Fluidi, Biološki, .... ,Ekonomski sistemi.

Spoznanje, da se lahko enostavni (niskodimenzionalni) nelinearni sistemi obnašajo zelo neregularno je prineslo nova in nekatera skupna spoznanja na področjih:

- modeliranja naravnih pojavov,
- eksperimentalne analize in napovedovanju časovnih vrst, polj....,
- kontroli sistemov in procesov.

## 15.1 Opis kaotičnih sistemov

Dinamiko  $n$  dimenzionalnega kaotičnega sistema opišemo s sistemom  $n$  avtonomnih diferencialnih enačb prvega reda, ki mu pravimo, dinamski sistem:

$$\dot{\mathbf{X}} = F(\mathbf{X}, \mathbf{p})$$

kjer je :

$x_i$  . . . prostora stanj (fazne spremenljivke)

$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_k)$  . . . parametri sistema

$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  . . . vektor stanj

Rešitev sistema :

$$\dot{\mathbf{X}} = F(\mathbf{X}, \mathbf{p})$$

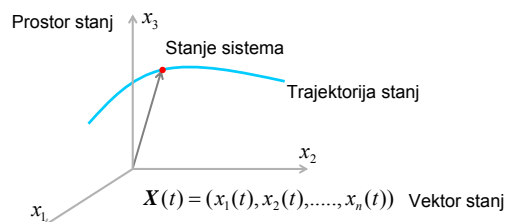
je pri danih začetnih pogojih:

$$x_i(t) = a_i$$

je opredeljena z vektorjem stanj:

$$\mathbf{X}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

Grafična predstavitev dinamike oziroma rešitve sistema:



**Primer:**

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F \cos(\omega t)$$

Z vpeljavo novih spremenljivk

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}, \quad x_3 = \omega t$$

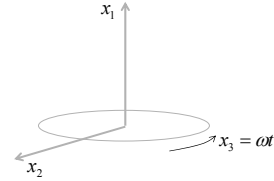
Dobimo sistem treh diferencialni enačb prvega reda:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m}(-kx_1 - bx_2 + F \cos(x_3)) \\ \dot{x}_3 &= \omega \end{aligned}$$

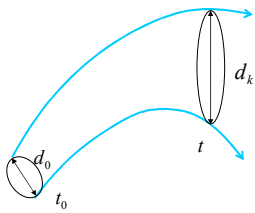
Prostor stanj je opredeljen z:

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3) \quad \mathbf{p} = (m, b, k, \omega)$$

Rešitev grafično predstavimo v prostoru stanj:



Lastnosti trajektorij v prostoru stanj



$$d_k = d_0 e^{\lambda_k t}$$

$$\lambda_k = \lim_{d_0 \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{d_k}{d_0}$$

- $\lambda_k < 0$  konvergenten stabilen
- $\lambda_k > 0$  divergenten nestabilen
- $\lambda_{\max} > 0$  možnost razvoja kaosa

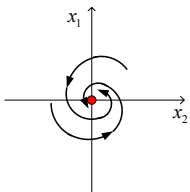
**Atraktor stanj:**

**Atraktor** je geometrijska tvorba v prostoru stanj kamor se stekajo vse sosednje trajektorije stanj v  $\lim t \rightarrow \infty$ .

Atraktorji linearnih sistemov:

Stabilna fiksna točka (ponor):

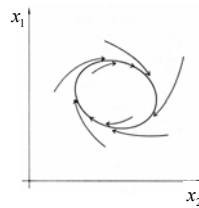
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m}(-kx_1 - bx_2) \\ \dot{x}_3 &= \omega \end{aligned}$$



$$\lambda_{\max} \leq 0$$

Limitni krog:

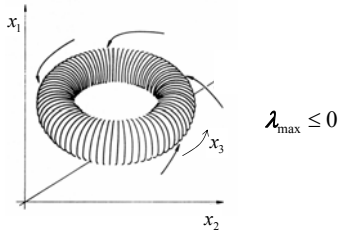
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m}(-kx_1 - bx_2 + F \cos(x_3)) \\ \dot{x}_3 &= \omega \end{aligned}$$



$$\lambda_{\max} \leq 0$$

Torus:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m} (-kx_1 - bx_2 + F_1 \cos(x_3) + F_2 \sin(x_4)) \\ \dot{x}_3 &= \omega_1 \\ \dot{x}_4 &= \omega_2\end{aligned}$$

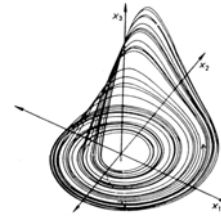


Čudni ali kaotični atraktorji:

Roesslerjev atraktor:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + ax_2 \\ \dot{x}_3 &= b + x_3(x_1 - c)\end{aligned}$$

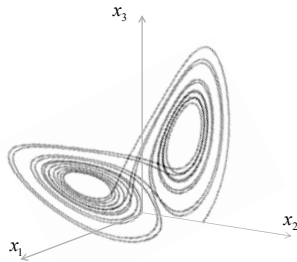
$$\lambda_{\max} > 0$$



Lorenz-ev atraktor:

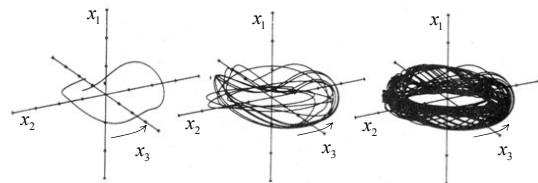
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= rx_1 - x_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3\end{aligned}$$

$$\lambda_{\max} \leq 0$$



Atraktor nelinearnega oscilatorja:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m} (-kx_1 - bx_2^3 + F \cos(x_3)) \\ \dot{x}_3 &= \omega\end{aligned}$$



## 15.2 Karakterizacija kaotičnih sistemov

Kvalitativne karakteristike:

- potek časovne vrste
- avtokorelacijska funkcija
- spektralna gostota
- atraktor stanj
- Ponkarejeva sekcija atraktorja

Kvantitativne karakteristike:

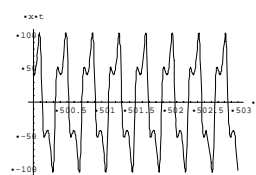
Statične: množica fraktalnih dimenzij atraktorja

Dinamične: ljpunov spekter  
entropija kolomogorova  
Ponkarejeva preslikava

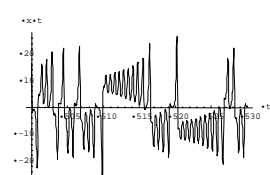
Kvalitativne karakteristike kaosa :

Potek časovne vrste:

Regularna periodična



Neregularna kaotična



Avtokorelacijska funkcija:

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_c(t) \cdot x_c(t + \tau) dt$$

Za harmonsko osciliranje:

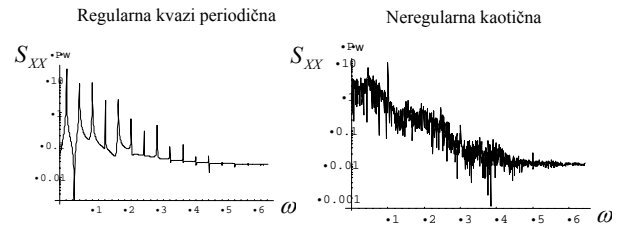
$$R_{XX}(\tau) = \text{Var}(x) \cos(\omega\tau)$$

Za beli šum:

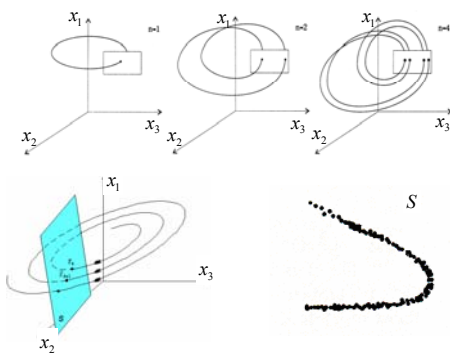
$$R_{XX}(\tau) \rightarrow \delta(\tau)$$

Spektralna gostota:

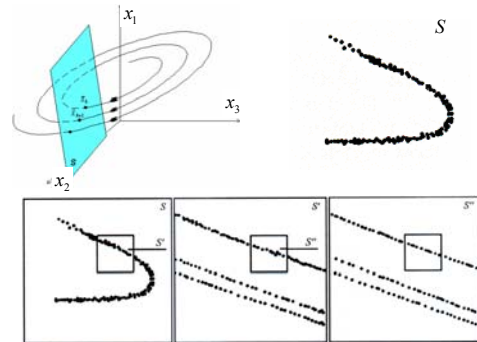
$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(t) e^{-i\omega t} dt$$



Poncare-jeva sekcija atraktorja:

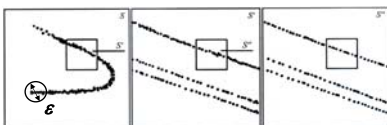


Fraktalna struktura atraktorja:



Kvantitativne statične karakteristike atraktorja

Množica fraktalnih dimenzij atraktorja:



$$D_f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f-1} \frac{\ln \left( \sum_{i=1}^{M(\epsilon)} p_i^f \right)}{\ln \epsilon}; \quad f = 0, 1, 2, \dots$$

$$p_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N}$$

$f = 0$ , Hausdorff-ova dimenzija:

$$D_0 = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log \left( \sum_{i=1}^{M(\epsilon)} 1 \right)}{\log \epsilon} = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln M(\epsilon)}{\ln \epsilon}$$

$f = 1$ , Informacijska dimenzija:

$$D_1 = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{S(\epsilon)}{\ln \epsilon}$$

kjer je:

$$S(\epsilon) = -\sum_{i=1}^{M(\epsilon)} p_i \ln p_i$$

entropija informacije.

$f=2$ , Korelacijska dimenzija:

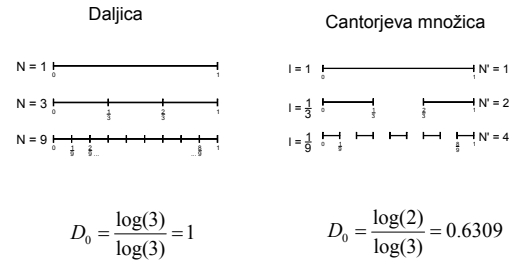
$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \left( \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^2 \right)}{\ln \varepsilon}$$

kjer je :

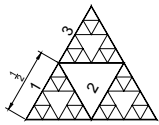
$$p_i^2 = C(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} \Theta(\varepsilon - |x_i - x_j|)$$

Korelacijski integral, ki podaja verjetnost, da sta dve točki na atraktorju oddaljeni manj kot  $\varepsilon$ .

**Primeri - Fraktalnih geometrijskih likov in pripadajočih Hausdorff-ovih dimenzij:**



Puščičasta krivulja



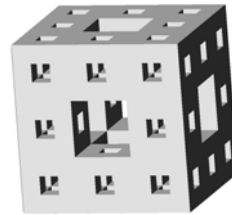
$$D_0 = \frac{\log(3)}{\log(2)} = 1.5849$$

Kochova krivulja



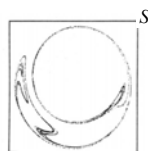
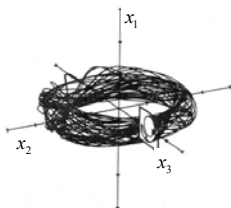
$$D_0 = \frac{\log(4)}{\log(3)} = 1.2618$$

Sierpinski-eva spužva



$$D_0 = \frac{\log(20)}{\log(3)} = 2.7268$$

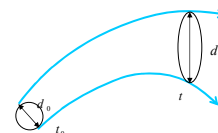
**Primer :** Poincare-jeva sekcija nelinearnega oscilatorja:



$$1 < D_0 < 2$$

**Dinamične karakteristike atraktorja**

Lyapunov spekter:

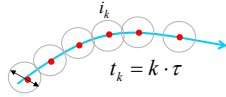


$$\lambda_k = \lim_{d_0 \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{d_k(t)}{d_0} \quad k = 1, \dots, n$$

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$$

### Entropija Kolmogorova

Obravnavamo trajektorijo v prostoru stanj, ki je razdeljen v sfere premera  $l$ :



S  $P_{i_0 \dots i_n}$  označimo povezana verjetnost, da ležijo točke trajektorije pri časih  $t_k = k \cdot \tau$ ,  $k=0, 1, 2, \dots, N$  v celicah  $i_0, i_1, \dots, i_n$ .

Entropija povezane informacije - mera informacije, ki jo potrebujemo, da določimo potek trajektorije do časa  $n\tau$  je podana z:

$$K_n = - \sum_{i_0 \dots i_n} P_{i_0 \dots i_n} \ln P_{i_0 \dots i_n}$$

$$K_{n+1} - K_n$$

predstavlja mero izgube informacije o sistemu od časa  $n$  do časa  $n+1$

**Entropija Kolmogorova**  $K$  je definirana kot povprečna stopnja izgube informacij o sistemu od časa  $n$  do časa  $n+1$ :

$$K = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{l \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\tau} \sum_{n=0}^{N-1} (K_{n+1} - K_n)$$

$$K = \begin{cases} 0, & \text{regularni sistemi} \\ > 0, & \text{kaotični sistemi} \\ \rightarrow \infty, & \text{naključni sistemi} \end{cases}$$

$$K_{n+1} - K_n$$

Predstavlja mero izgube informacije o sistemu od časa  $n$  do časa  $n+1$

Entropija  $K$  je definirana kot povprečna stopnja izgube informacij:

$$K = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{l \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\tau} \sum_{n=0}^{N-1} (K_{n+1} - K_n)$$

$$K = \begin{cases} 0, & \text{regularne sisteme} \\ > 0, & \text{kaotičeosistemi} \\ \rightarrow \infty, & \text{naključak sistemi} \end{cases}$$

Na osnovi Ljapunovega spektra opredelimo:

Entropija Kolmogorova  $K$ :

$$K = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad \lambda_i > 0$$

Disipativnost  $d$ :

$$d = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

Ljapunova dimenzija:

Poznamo Ljapunov spekter. Opredelimo število  $k$  za katero velja:

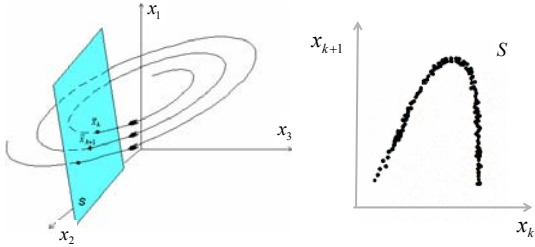
$$\sum_{i=1}^k \lambda_i > 0 \quad \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i < 0$$

Ljapunova dimenzija je opredeljena:

$$D_L = k - \frac{1}{|\lambda_{k+1}|} \sum_{i=1}^k \lambda_i$$

Poncare-jeva preslikava:

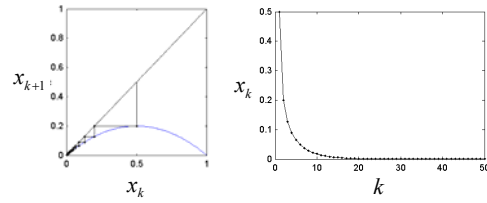
$$x_{k+1} = f(x_k)$$



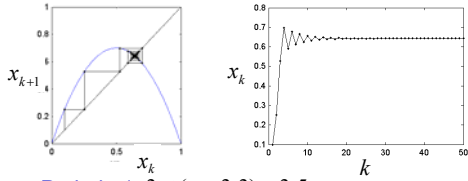
Logistična preslikava

$$x_{k+1} = f_r(x_k) = rx_k(1-x_k)$$

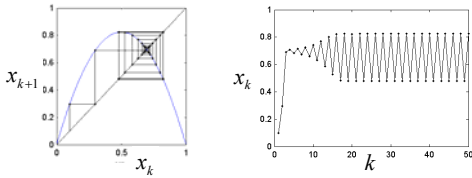
Fiksna točka  $r = 0.8 < 1$



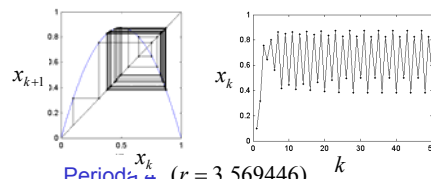
Fiksna točka  $1 \leq (r = 2.8) < 3$



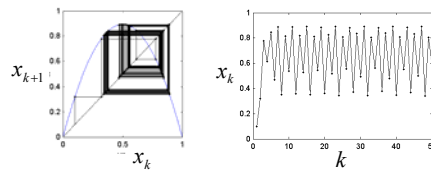
Perioda 1  $3 \leq (r = 3.3) < 3.5$



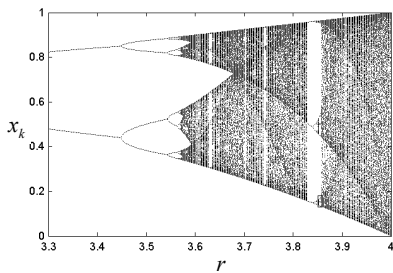
Perioda 2  $3 \leq (r = 3.3) < 3.5$



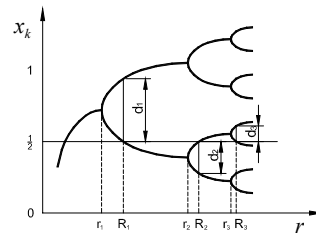
Perioda 4  $(r = 3.569446)$



Bifurkacijski diagram Logistične preslikave:  
(Poincare-jeve sekcije v odvisnosti od  $r$ )



Univerzalne Feigenbaum-ove konstante:



$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = 4.6692\dots \quad \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = 2.5029\dots$$

## 15.2 Eksperimentalni opis

Rekonstrukcija atraktorja iz časovne vrste

Takensov teorem:

$$\mathbf{X}(t) = (x(t), x(t + \tau), x(t + 2\tau), \dots, x(t + (m-1)\tau))$$

kjer je :

$\tau$  . . . Čas zakasnitve

$m$  . . . umestitvena dimenzija sistema

Primer: Rekonstrukcija Lorenz-ovega atraktorja

