Formule za 4. vajo pri predmetu Naključni pojavi

Če poznamo gostoto verjetnosti $f_X(x)$ naključne spremenljivke X in zvezo X s spremenljivko $Y = g(X)$, potem lahko gostoto verjetnosti $f_Y(y)$ naključne spremenljivke Y izračunamo:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{\mathrm{d}g^{-1}(y)}{\mathrm{d}y} \right| , \tag{1}$$

kjer je $g^{-1}()$ inverzna funkcija. En. (1) velja, kadar je zveza $Y = g(X)$ monotona. Kadar to ne drži, je gostota verjetnosti $f_Y(y)$:

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{k} f_X(g_i^{-1}(y)) \left| \frac{\mathrm{d}g_i^{-1}(y)}{\mathrm{d}y} \right| , \tag{2}$$

kjer so $g_i^{-1}()$ inverzi na k monotonih odsekih funkcije $Y = g(X)$.
Če poznamo gostoto povezane verjetnosti $f_{XY}(x, y)$ ter zvezo spremenljivk X in Y s spremenljivko $Z = g(X, Y)$, lahko izračunamo gostoto verjetnosti $f_Z(z)$. Izraz za $f_Z(z)$ je v splošnem odvisen od zveze $g(X, Y)$. V najbolj preprostem primeru $Z = X + Y$ velja:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, z - x) \, \mathrm{d}x \, . \tag{3}$$

Začetni momenti zveznih in diskretnih naključnih spremenljivk so definirani z:

$$\begin{aligned} m_k &= \mathrm{E}\left[X^k\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) \, \mathrm{d}x \, , \\ m_k &= \mathrm{E}\left[X^k\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i^k P\left(X = x_i\right) \, , \end{aligned} \tag{4}$$

medtem ko so središčni momenti definirani z:

$$\begin{aligned} \mu_k &= \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^k\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathrm{E}[X])^k f(x) \, \mathrm{d}x \, , \\ \mu_k &= \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^k\right] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathrm{E}[X])^k P\left(X = x_i\right) \, . \end{aligned} \tag{5}$$

Prvi začetni moment m_1 imenujemo povprečje m ali srednja vrednost, drugega središčnega μ_2 pa varianca $\mathrm{Var}[X]$. Pri izračunu variance si lahko pomagamo tudi z zvezo:

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[X]^2 - (\mathrm{E}[X])^2 \, . \tag{6}$$

Začetni in središčni momenti pri vektorskih naključnih spremenljivkah so definiranih podobno. Za dvokomponentne vektorje sta definiciji:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[X^j Y^k\right] &= \int\int x^j y^k f_{XY}(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, , \\ \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^j (Y - \mathrm{E}[Y])^k\right] &= \int\int (x - \mathrm{E}[X])^j (y - \mathrm{E}[Y])^k f_{XY}(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, . \end{aligned} \tag{7}$$

Pri vektorskih naključnih spremenljivkah najpogosteje uporabljamo prvi začetni $\mathrm{E}[XY]$ in prvi središčni moment $\mathrm{E}[(X - m_X)(Y - m_Y)]$, ki ju imenujemo korelacija $\mathrm{Cor}[X, Y]$ in kovarianca $\mathrm{Cov}[X, Y]$. Med njima velja zveza:

$$\mathrm{Cov}[X, Y] = \mathrm{Cor}[X, Y] - m_X m_Y \, . \tag{8}$$