Formule za 9. vajo pri predmetu Naključni pojavi

Povprečje naključnega procesa $X(t)$ pri času t_1 je definirano z:

$$\mathrm{E}\left[X(t_1)\right] = \int x f_{X(t_1)}(x)\ \mathrm{d}x\,, \tag{1}$$

medtem ko je avtokorelacijska funkcija procesa $X(t)$ pri časih t_1 in t_2 definirana z:

$$R_{XX}\left(t_1, t_2\right) = \mathrm{E}\left[X(t_1)X(t_2)\right] = \iint x_1 x_2 f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2)\ \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,. \tag{2}$$

Proces je stacionaren v širšem smislu, če je njegovo povprečje neodvisno od časa t, $\mathrm{E}\left[X(t)\right] \neq g(t)$, in njegova avtokorelacijska funkcija odvisna le od razlike časov $t = t_1 - t_2$, $R_{XX}(t_1, t_2) = g(t_1 - t_2) = R_{XX}(t)$.
Pri opisu vektorskih procesov uporabljamo tudi križnokorelacijsko funkcijo, ki je definirana z:

$$R_{XY}\left(t_1, t_2\right) = \mathrm{E}\left[X(t_1)Y(t_2)\right] = \iint xy f_{X(t_1)Y(t_2)}(x, y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{3}$$

Če za stacionarna procesa $X(t)$ in $Y(t)$ poznamo vzorčni funkciji $x(t) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ in $y(t) = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$, lahko oceno avtokorelacijske in križnokorelacijske funkcije dobimo po enačbah:

$$\begin{aligned} R_{XX}\left(t\right) &= \frac{1}{n-t}\sum_{i=1}^{n-t} x_i x_{i+t}\,, \\ R_{XY}\left(t\right) &= \frac{1}{n-t}\sum_{i=1}^{n-t} x_i y_{i+t}\,, \end{aligned} \tag{4}$$

kjer je $t = 0, 1, ..., n-1$ diskretizirani čas.
Poljubno periodično funkcijo s periodo T lahko izrazimo s Fourierovo vrsto:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k\,\mathrm{e}^{i\omega_k t} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\omega_k t + b_k \sin\omega_k t\right)\,, \tag{5}$$

kjer je $\omega_k = k\omega_1$ k-ti mnogokratnik osnovne krožne frekvence $\omega_1 = 2\pi/T$, medtem ko so α_k kompleksni, a_k in b_k pa realni Fourierovi koeficienti, med katerimi velja zveza:

$$\alpha_k = \frac{a_k - ib_k}{2}\,. \tag{6}$$

Kompleksne koeficiente izračunamo po enačbi:

$$\alpha_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega_k t}\ \mathrm{d}t\,, \tag{7}$$

realne koeficiente pa po enačbah:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\ \mathrm{d}t\,, \\ a_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos\omega_k t\ \mathrm{d}t\,, \\ b_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin\omega_k t\ \mathrm{d}t\,, \end{aligned} \tag{8}$$

kjer je $k = 1, 2, ...$ in $\omega_k = 2k\pi/T$. Iz slednje enačbe vidimo, da koeficient a_0 ustreza povprečni vrednosti funkcije $x(t)$ na intervalu ene periode T, da so za lihe funkcije $x(t)$ vsi $a_k = 0$ in za sode funkcije $x(t)$ vsi $b_k = 0$.
Ko perioda T narašča preko vsake meje, iz izraza za Fourierovo vrsto dobimo Fourierov integral:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, \mathrm{e}^{i\omega t}\ \mathrm{d}\omega\,, \tag{9}$$

v katerem $X(\omega)$ označuje kompleksno amplitudo harmonične komponente s krožno frekvenco ω:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\ \mathrm{d}t\,. \tag{10}$$

Prehod iz $x(t)$ v $X(\omega)$ imenujemo Fourierova transformacija, prehod iz $X(\omega)$ v $x(t)$ pa inverzna Fourierova transformacija. Funkciji $x(t)$ in $X(\omega)$ imenujemo par Fourierovih transformirank. Pri računanju si pogosto pomagamo z naslednjimi pari Fourierovih transformirank:

$x(t)$	$X(\omega)$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\mathrm{e}^{i\omega_0 t}$	$2\pi\delta\left(\omega - \omega_0\right)$
$\mathrm{e}^{-ct}\,, \quad t \geq 0\,, c > 0$	$\dfrac{1}{c + i\omega}$
$\dfrac{t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-ct}}{(n-1)!}\,, \quad t \geq 0\,, c > 0$	$\dfrac{1}{(c + i\omega)^n}$
$\cos\omega_0 t$	$\pi\left(\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)\right)$
$\sin\omega_0 t$	$\pi i\left(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)\right)$
$\mathrm{e}^{-c\lvert t\rvert}\,, \quad c > 0$	$\dfrac{2c}{c^2 + \omega^2} = \dfrac{2}{\lvert c\rvert} \cdot \dfrac{1}{1 + (\omega/c)^2}$
$\mathrm{e}^{-c\lvert t\rvert}\cos\omega_0 t\,, \quad c > 0$	$\dfrac{c}{c^2 + (\omega_0 + \omega)^2} + \dfrac{c}{c^2 + (\omega_0 - \omega)^2}$
$\mathrm{e}^{-c^2 t^2}\,, \quad c > 0$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{c}\,\mathrm{e}^{-t^2/(4c^2)}$

in z naslednjimi zvezami med transformirankami:

$$\begin{aligned} x(ct) &\Longleftrightarrow \frac{1}{\lvert c\rvert} X\left(\frac{\omega}{c}\right) \\ \frac{1}{\lvert c\rvert} x\left(\frac{t}{c}\right) &\Longleftrightarrow X(c\omega) \\ x(t - t_0) &\Longleftrightarrow X(\omega)\,\mathrm{e}^{-i\omega t_0} \\ x(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega_0 t} &\Longleftrightarrow X(\omega + \omega_0) \end{aligned} \tag{11}$$

Fourierovo transformiranko pogosto zapišemo z eksponentno funkcijo:

$$X(\omega) = \lvert X(\omega)\rvert\, \mathrm{e}^{i\varphi(\omega)}\,, \tag{12}$$

kjer sta $\lvert X(\omega)\rvert$ amplituda in $\varphi(\omega)$ faza:

$$\lvert X(\omega)\rvert = \sqrt{\Re\left[X(\omega)\right]^2 + \Im\left[X(\omega)\right]^2}\,, \qquad \varphi(\omega) = \arctan\frac{\Im\left[X(\omega)\right]}{\Re\left[X(\omega)\right]}\,. \tag{13}$$

Odziv $y(t)$ linearnega časovno neodvisnega sistema na vzbujanje $x(t)$ izrazimo s konvolucijskim integralom:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t')h(t')\ \mathrm{d}t' \,, \tag{14}$$

v katerem je $h(t)$ impulzna odzivna funkcija sistema, ki podaja odziv sistema na vzbujanje z enotskim impulzom $\delta(t)$. V frekvenčnem prostoru je odziv sistema:

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \,, \tag{15}$$

kjer sta $Y(\omega)$ in $X(\omega)$ Fourierovi transformiranki odziva $y(t)$ in vzbujanja $x(t)$, medtem ko je $H(\omega)$ frekvenčna odzivna funkcija, ki je Fourierova transformiranka impulzne odzivne funkcije $h(t)$.
Za sistem, katerega dinamsko enačbo poznamo, npr. $m\ddot{y}(t)+d\dot{y}(t)+ky(t) = x(t)$, določimo $H(\omega)$ tako, da predpostavimo harmonično vzbujanje $x(t) = \mathrm{e}^{i\omega t}$, za katerega je odziv $y(t) = H(\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega t}$. Izraza za vzbujanje in odziv vstavimo v dinamsko enačbo, od koder nato lahko dobimo izraz za $H(\omega)$.
Pri opisu linearnih sistemov v frekvenčnem prostoru pogosto uporabljamo spektralno gostoto odziva $S_{YY}(\omega)$ (ali vzbujanja $S_{XX}(\omega)$) in križno spektralno gostoto vzbujanja in odziva $S_{XY}(\omega)$, ki sta Fourierovi transformiranki avtokorelacijske in križnokorelacijske funkcije:

$$\begin{aligned} S_{YY}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{YY}(t)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\ \mathrm{d}t \,, \\ S_{XY}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(t)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\ \mathrm{d}t \,. \end{aligned} \tag{16}$$

Med spektralnimi in križnimi spektralnimi gostotami vhoda in izhoda veljata zvezi:

$$S_{YY}(\omega) = |H(\omega)|^2\, S_{XX}(\omega) \,, \qquad S_{XY}(\omega) = H(\omega)S_{XX}(\omega) \,. \tag{17}$$

Moč signala $y(t)$ lahko določimo iz avtokorelacijske funkcije pri času $t = 0$:

$$M = \mathrm{E}\left[y(t)^2\right] = R_{YY}(t=0) \tag{18}$$

ali iz spektralne gostote:

$$M = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{YY}(\omega)\ \mathrm{d}\omega \,. \tag{19}$$

Za vzbujanje sistemov pogosto uporabljamo t.i. beli šum, katerega avtokorelacijska funkcija in spektralna gostota sta:

$$R_{XX}(t) = \text{konst.}\cdot\delta(t) \,, \qquad S_{XX}(\omega) = \text{konst.} = S_0 \,. \tag{20}$$