Naloge za 9. vajo skupine C pri predmetu Naključni pojavi

1. Naj $X(t) = At + B$ opisuje naključni proces, pri katerem sta A in B neodvisni normalno porazdeljeni naključni spremenljivki s povprečjema m_A in m_B ter variancama σ_A^2 in σ_B^2. Čas t je zvezen parameter. Določi povprečje in avtokorelacijsko funkcijo procesa. Ali je proces stacionaren?
R: $\mathrm{E}[X] = m_A t + m_B$, $R_{XX}(t_1, t_2) = (\sigma_A^2 + m_A^2) t_1 t_2 + m_A m_B (t_1 + t_2) + \sigma_B^2 + m_B^2$. Ne.

2. Pri opazovanju procesov $X(t)$, $Y(t)$ in $Z(t)$ smo izmerili naslednje vzorčne funkcije:
$$x(t) = \{-4, -1, 8, 3, -2, -6, 2, -9, 1\} \, ,$$
$$y(t) = \{0, 9, -8, -3, 10, -6, -5, 9, -2\} \, ,$$
$$z(t) = \{-9, -4, 9, -7, -6, 8, -7, -2, 10\} \, .$$
Izračunaj avtokorelacijske funkcije $R_{XX}(t)$, $R_{YY}(t)$, $R_{ZZ}(t)$ ter križnokorelacijski funkciji $R_{XY}(t)$ in $R_{YZ}(t)$, vse za $t = 0, 1, \ldots, 5$. Vzorčne in korelacijske funkcije nariši ter slednje tudi komentiraj.
R: $R_{XX}(t) = \{24.0, -1.6, -2.4, -6.7, 0.2, -11.8\}$, $R_{YY}(t) = \{44.4, -21.4, -26.1, 42.5, -12.2, -27.8\}$, $R_{ZZ}(t) = \{53.3, -16.4, -29.6, 50.0, -17.4, -33.0\}$, $R_{XY}(t) = \{-17.7, 7.0, 7.0, -11.2, -8.6, 23.8\}$, $R_{YZ}(t) = \{-22.0, 47.1, -21.0, -29.5, 46.8, -19.3\}$.

3. S Fourierovo vrsto zapiši funkcijo
$$x(t) = \begin{cases} -c \, , & \text{za } -T/2 < t < 0 \, , \\ c \, , & \text{za } 0 < t < T/2 \, . \end{cases}$$
Nariši vsoto prvih nekaj členov vrste za $T = 2\pi$. R: $x(t) = 4c/\pi \sum_{k=1}^{\infty} 1/(2k-1) \sin(2\pi(2k-1)t/T)$

4. Sistem, katerega dinamska enačba je $a\dot{y} + y = x$, vzbujamo z belim šumom moči S_0. Določi frekvenčno in impulzno odzivno funkcijo sistema, spektralni gostoti vzbujanja in odziva ter povprečno moč odziva.
R: $H(\omega) = 1/(1 + ia\omega)$, $h(t) = 1/a \, \mathrm{e}^{-t/a}$, $S_{XX}(\omega) = S_0$, $S_{YY}(\omega) = S_0/(1 + a^2\omega^2)$, $P = S_0/(2a)$.

5. Določi odziv sistema iz naloge 4 na vzbujanje z:
$$x(t) = \begin{cases} c \, , & \text{za } kT < t < (2k+1)T/2 \, , \\ -c \, , & \text{za } (2k+1)T/2 < t < (k+1)T \, , \end{cases}$$
kjer je $T = 2\pi/\omega_0$ in $k \in \mathbb{Z}$.
R: $y(t) = 4c/\pi \sum_{k=1}^{\infty} 1/(2k-1)(\sin((2k-1)\omega_0 t) - a\omega_0(2k-1)\cos((2k-1)\omega_0 t))/(1 + (2k-1)^2 a^2 \omega_0^2)$