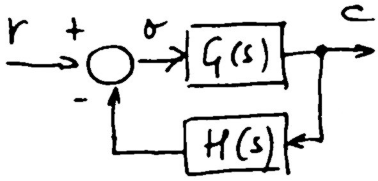
Korenske krivulje

Osnovni princip



$$G_p(s) = G \cdot H$$

$$G_s(s) = \frac{G}{1 + G \cdot H}$$

Karakteristična enačba $F_K(s) = 1 + G \cdot H = 1 + G_p = 0$

Bolj splošno:

$$G_p(s) = \frac{K \prod_{i=1}^{m} (s - N_i)}{\prod_{i=1}^{n} (s - P_i)}$$

m – red števca

n – red imenovalca

$$F_K(s) = \frac{\prod_{i=1}^{n} (s-P_i) + K \prod_{i=1}^{m} (s-N_i)}{\prod_{i=1}^{n} (s-P_i)} = 0$$

Iz $GH = -1$ dobimo dva pogoja

1) Magnituda GH: $|GH| = 1$

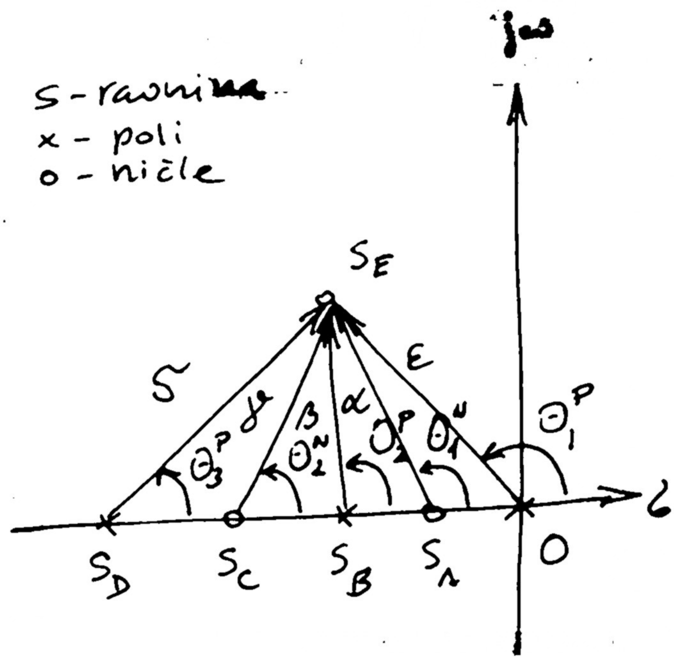
2) Kot GH: $\measuredangle GH = (2k+1)\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Ilustracija

s-ravnina

x – poli

o – ničle



1.) Imamo:

$$GH = \frac{K(s - s_A)(s - s_C)}{s(s - s_B)(s - s_D)}$$

s_A, s_C – ničli G_p

$\emptyset, s_B, s_D$ – poli G_p

2.) Izberemo poljubno s_E na s-ravnini

3.) Vektorji iz N_i in P_i:

$\alpha = s_E - s_A$	Θ_1^N
$\beta = s_E - s_B$	Θ_2^P
$\gamma = s_E - s_C$	Θ_2^N
$\delta = s_E - s_D$	Θ_3^P
$\varepsilon = s_E$	Θ_1^P

Če velja $\sum_{i=1}^{m} \Theta_i^N - \sum_{j=1}^{n} \Theta_j^P = \pm(2k+1)\pi$, $k = 0, \pm 1, \dots$,

tedaj s_E leži na korenski krivulji.

Tedaj iz $|GH| = \dfrac{K |s_E - s_A| |s_E - s_C|}{|s_E| |s_E - s_B| |s_E - s_D|} = 1$ lahko izračunamo K v točki s_E.

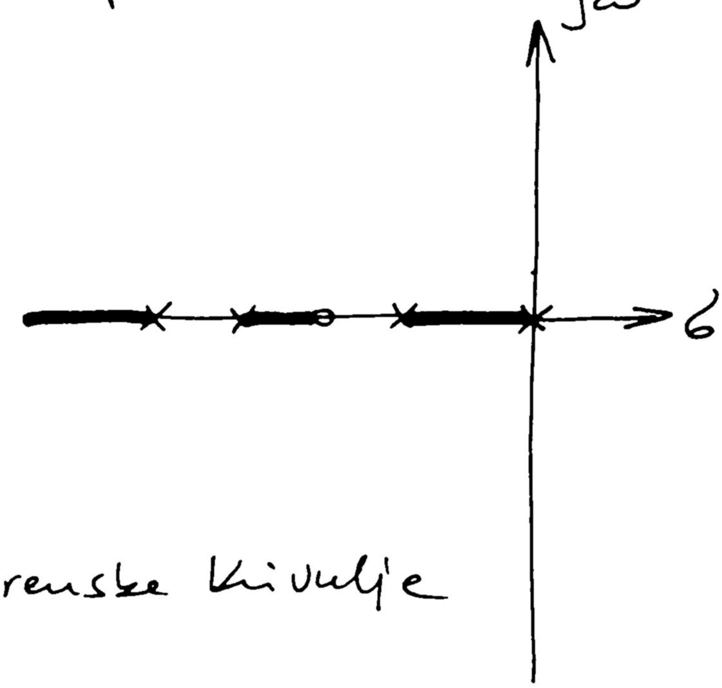
Pravila za konstruiranje korenske krivulje

① Število vej krivulje je enako redu F_K.
Imamo toliko izvorov kolikor je ničel F_K.
Vsaka veja opisuje gibanje ustrezne ničle ob spreminjanju K.

② Poli G_p so izvori vej ($K=0$) in ničle G_p ponori ($K \to \infty$). V primeru $m>n$ (neobičajno) imamo izvore vej v neskončnosti. Če je $m<n$ imamo ponore v neskončnosti. Število vej v neskončnosti jedeno z $n-m$, m vej pa se konča v m ničlah G_p.

③ Kompleksni deli korenske krivulje se vedno pojavijo kot kompleksno konjugirani pari (simetrija na Re-os), če so koeficienti F_K realni. Ničle F_K (, ki je algebrajska enačba) so zvezne funkcije njenih koeficientov.

④ Deli realne osi so deli korenske krivulje, če je število polov in ničel na desni strani izbrane točke liho.



⑤ Koti asimptot korenske krivulje so dani z:

$$\alpha = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-m-1$$

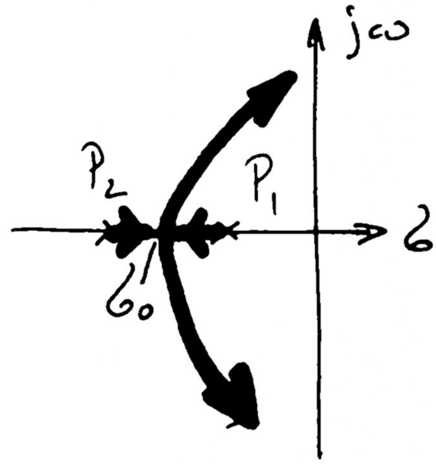
⑥ Sečišče asimptot na realni osi je v točki

$$\sigma_r = \frac{\sum_i^n P_i - \sum_j^m N_j}{n-m},$$

kjer so P_i - poli in N_j - ničle $G_p(s)$.

7 Točka, kjer korenska krivulja zapušča realno os ali nanjo prihaja sledi iz enačbe (ta izhaja iz pogoja o kotu) :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_0 - P_i} - \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\sigma_0 - N_j} = 0 .$$



σ_0 je vstopna/izstopna točka.

Začetni izstopni/vstopni kot krivulje je $\pm 90°$.

Primer:

$$GH = \frac{K}{s(s+4)(s+5)}$$

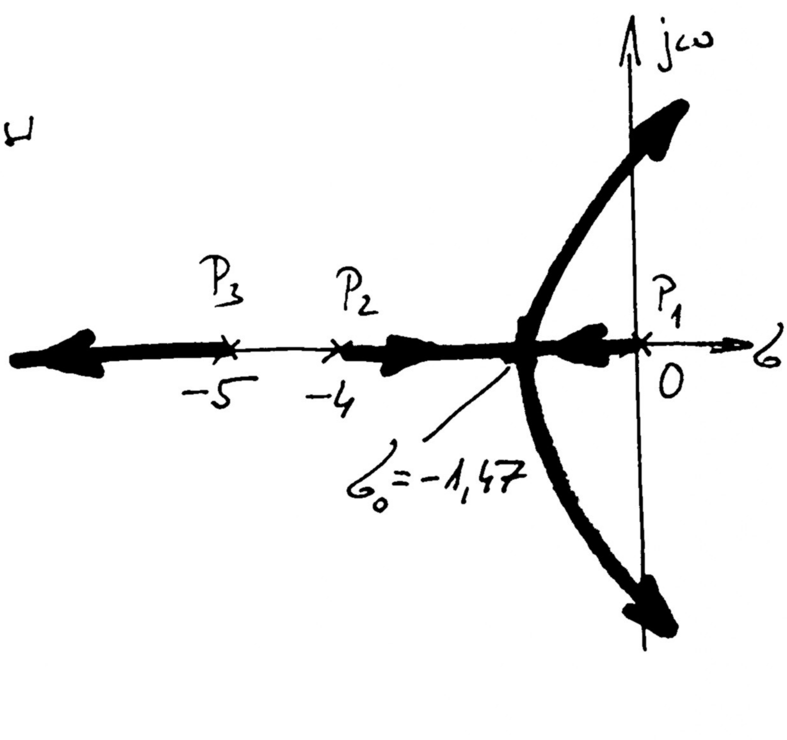
$$\frac{1}{\sigma_0} + \frac{1}{\sigma_0 + 4} + \frac{1}{\sigma_0 + 5} = 0$$

$$3\sigma_0^2 + 18\sigma_0 + 20 = 0 \Rightarrow \sigma_{1,2} = -4{,}53;\ \underline{\underline{-1{,}47}}$$

alternativna metoda

K na mestu izstopa iz Re-osi σ_0 doseže lokalni maximum.

Za zgornji primer



$$F_K = s(s+4)(s+5) + K = 0$$

$$K(\sigma) = -\sigma(\sigma+4)(\sigma+5)$$

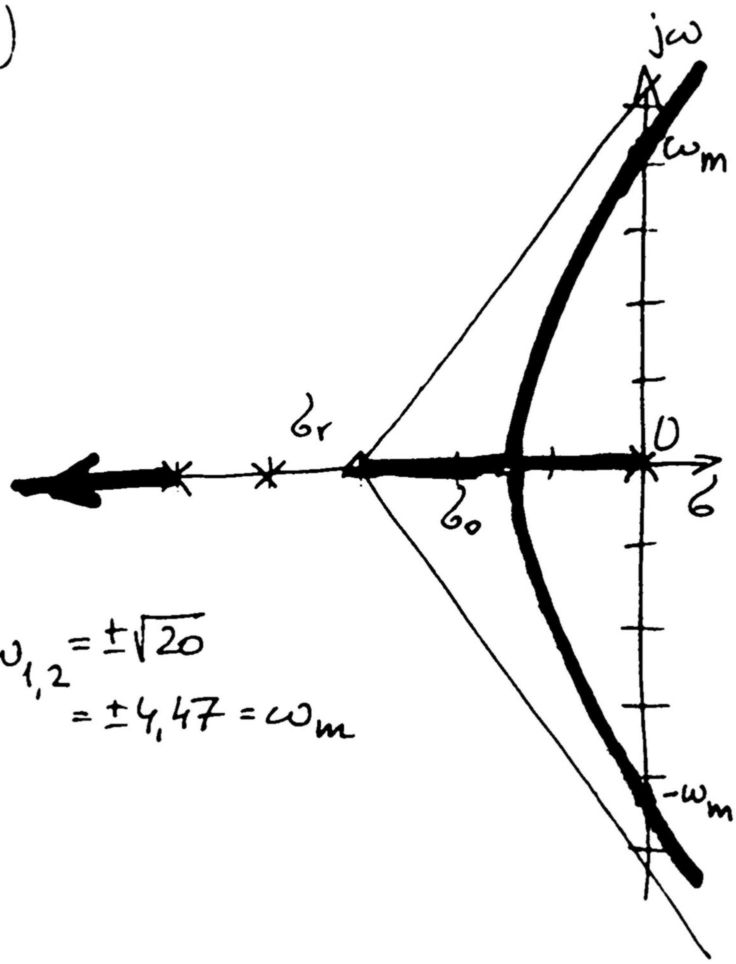
$$= -\sigma^3 - 9\sigma^2 - 20\sigma$$

$$\frac{dK}{d\sigma} = -3\sigma^2 - 18\sigma - 20 = 0$$

$$\sigma_{1,2} = -4{,}53;\ \underline{\underline{-1{,}47}}$$

8 Sečišče z Im-osjo ugotovimo s pomočjo Routhe-jevega ali Hurwitzovega kriterija. Ugotoviti moramo K_m in ω_m.

<u>Primer</u> (isti kot pri pravilu 7)



$F_K = s^3 + 9s^2 + 20s + K = 0$

Po Routhu:

$$\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 20 \\ 2 & 9 & K \\ 3 & \frac{180-K}{9} & \\ 4 & K & \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array}}\right\} \Rightarrow 0 < K < 180$$

$K_m = 180$

$Re_{F_K(j\omega)} = -9\omega^2 + K = 0 \Rightarrow \omega_{1,2} = \pm\sqrt{20} = \pm 4{,}47 = \omega_m$

Varianta:

$$F_K \rightarrow F_K(j\omega) = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{Re_{F_K}}} + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{Im_{F_K}}} = 0$$

$F_K(j\omega) = (j\omega)^3 + 9(j\omega)^2 + 20j\omega + K = 0$

$Re_{F_K} = -9\omega^2 + K = 0$

$Im_{F_K} = (-\omega^2 + 20)j\omega = 0 \Rightarrow \omega_m = \pm\sqrt{20}$

$K_m = 180$

(9) Odhodni ali prihodni kot
(pri kompleksno-konjugiranih parih)

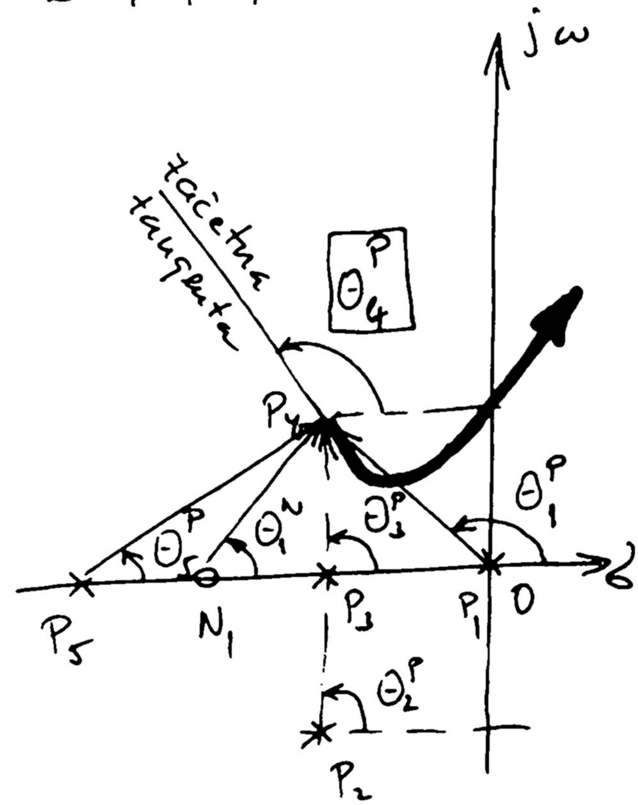
Pogoj: $\sum_{j=1}^{m} \Theta_j^N - \sum_{i=1}^{n} \Theta_i^P = (2k+1)\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

izstopni kot l-tega pola

$$\Theta_l^P = -(2k+1)\pi + \sum_{j=1}^{m} \theta_j^N - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{n} \theta_i^P$$

vstopni kot f-te ničle

$$\Theta_f^N = (2k+1)\pi - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq f}}^{m} \theta_j^N + \sum_{i=1}^{n} \Theta_i^P$$



$$\Theta_4^P = \pi + \Theta_1^N - \Theta_1^P - \Theta_2^P - \Theta_3^P - \Theta_5^P$$

(10)

$$G_p(s) = \frac{K \prod_{i=1}^{m} (s - N_i)}{s^l \prod_{j=1}^{q} (s - P_j)}$$

$n = l + q$

l - red integracije

$$F_K(s) = s^l \prod_{j=1}^{q} (s - P_j) + K \prod_{i=1}^{m} (s - N_i) = \prod_{g=1}^{n} (s - R_i) = 0$$

razvoj nam da:

$$\left(s^n - \sum_{j=1}^{q} P_j s^{n-1} + \ldots\right) + K\left(s^m - \sum_{i=1}^{m} N_i s^{m-1} + \ldots\right) = s^n - \sum_{g=1}^{n} R_g s^{n-1} + \ldots$$

Če je $n - m \geq 2$ lahko napišemo:

$\sum_{j=1}^{q} P_j = \sum_{g=1}^{n} R_g$. Ker je l polov $\emptyset$ $\Rightarrow$ $\sum_{j=1}^{n} P_j = \sum_{g=1}^{n} R_g$

Zaradi asimptotskih lastnosti že vemo, da se posamezne veje odklanjajo v levo ali v desno ($n - m > 2$). Zgornja enačba pa pove, da je vsota ničel F_K = const. in je enaka vsoti polov G_p in je neodvisna od spremembe K. To pa implicira uravnotežen odklon vej bodisi v levo bodisi v desno.