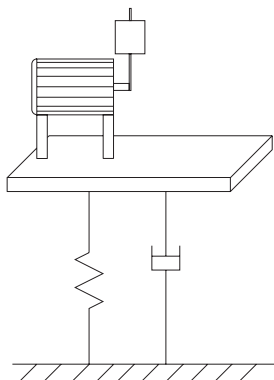


1. Mehanski sistem

1.1 Teoretične osnove naloge

1.1.1 Nihanje mehanskih sistemov

Objekt te vaje je mehanski sistem (sistem masa, dušilka, vzmet), ki je shematično prikazan na sliki 1.1.



Slika 1.1: Osnovna shema mehanskega sistema

Na sistem delujejo tri sile in sicer (slika 1.2):

- F_v sila vzmeti
- F_{tr} sila viskozne trenja oziroma dušenja
- F_c centrifugalna sila (sila, ki nastopi zaradi rotirajoče mase)

Če upoštevamo te sile, nam sistem popiše naslednja enačba:

$$m \cdot \ddot{x} = F_c - F_{tr} - F_v \quad (1.1)$$

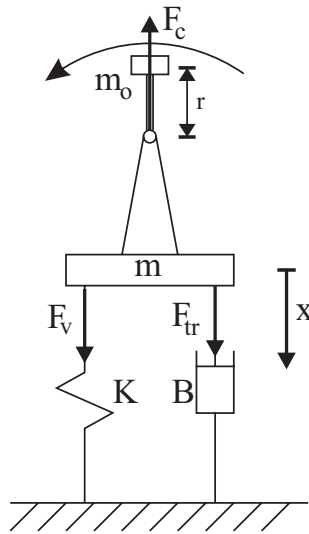
- m masa vseh delov, ki se premikajo

Z namenom, da bi na koncu dobili navadno linearno diferencialno enačbo drugega reda s konstantnimi koeficienti, s čimer dosežemo lažjo analizo, opišemo posamezne sile z naslednjimi izrazi:

$$F_c = m_o \cdot \omega_v^2 \cdot r \cdot \sin(\omega_v \cdot t) \quad (1.2)$$

$$F_v = K \cdot x \quad (1.3)$$

$$F_{tr} = B \cdot \dot{x} \quad (1.4)$$



Slika 1.2: Osnovni fizikalni model mehanskega sistema

- x pomik plošče
- K konstanta vzmeti
- B koeficient dušenja
- m_o masa, ki rotira

Z upoštevanjem enačb 1.1, 1.2, 1.3 in 1.4 dobimo naslednjo diferencialno enačbo:

$$m \cdot \ddot{x} + B \cdot \dot{x} + K \cdot x = m_o \cdot \omega_v^2 \cdot r \cdot \sin(\omega_v \cdot t) \quad (1.5)$$

Če enačbo 1.4 delimo z m , dobimo:

$$\ddot{x} + \frac{B}{m} \cdot \dot{x} + \frac{K}{m} \cdot x = \frac{m_o}{m} \cdot \omega_v^2 \cdot r \cdot \sin(\omega_v \cdot t) \quad (1.6)$$

Do rešitve te enačbe pridemo ponavadi v treh kvalitativnih korakih. Najprej obravnavamo lastno nedušeno nihanje ($F_c = F_{tr} = 0$), nato lastno dušeno nihanje ($F_c = 0, F_{tr} \neq 0$) in nazadnje še vsiljeno dušeno nihanje s harmonično motnjo ($F_c \neq 0, F_{tr} \neq 0$).

Lastno nedušeno nihanje

Če namesto $\frac{K}{m}$ pišemo ω_n^2 , lahko enačbo 1.6 zapišemo v obliki:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 \cdot x = 0 \quad (1.7)$$

Enačbo rešujemo z nastavkom $x(t) = e^{r \cdot t}$. Dobimo:

$$r^2 + \omega_n^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm j \cdot \omega_n \quad (1.8)$$

Ker je determinanta Wronskega za $\omega_n \neq 0$ različna od 0, lahko splošno rešitev zapišemo kot linearno kombinacijo obeh rešitev. Z upoštevanjem Eulerjevih formul $\cos \alpha = \frac{e^{j\cdot\alpha} + e^{-j\cdot\alpha}}{2}$ in $\sin \alpha = \frac{e^{j\cdot\alpha} - e^{-j\cdot\alpha}}{2j}$ dobimo:

$$x(t) = C \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + G \cdot \sin(\omega_n \cdot t) \quad (1.9)$$

Če C in G izrazimo kot $C = E \cdot \sin \phi$, $G = E \cdot \cos \phi$ in uporabimo adicijski izrek za sinus, dobimo:

$$x(t) = E \cdot (\sin \phi \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + \cos \phi \cdot \sin(\omega_n \cdot t)) = E \cdot \sin(\omega_n \cdot t + \phi) \quad (1.10)$$

- $E = \sqrt{C^2 + G^2}$
- ω_n lastna krožna frekvenca
- ϕ fazni kot, faza

Konstanti E in ϕ določimo iz začetnih pogojev. Če želimo, da ne nastopi trivialna rešitev ($x(t) = 0$), moramo izbrati vsaj enega izmed začetnih pogojev tako, da je različen od 0.

Lastno dušeno nihanje

Tokrat je $F_c = 0$. Za krajši zapis vpeljemo brezdimenzijski koeficient sistema, ki ga imenujemo dušilna mera.

$$\zeta = \frac{B}{2 \cdot \sqrt{m \cdot K}} = \frac{B}{2 \cdot m \cdot \omega_n} \quad (1.11)$$

Gibalno enačbo lahko v tem primeru zapišemo v obliki:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0 \quad (1.12)$$

Diferencialna enačba je homogena. Tudi to enačbo rešujemo z eksponentnimi nastavki $x(t) = e^{r \cdot t}$. Dobimo naslednjo karakteristično enačbo:

$$r^2 + 2\zeta\omega_n r + \omega_n^2 = 0 \quad (1.13)$$

Njeni ničli sta:

$$r_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \cdot \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (1.14)$$

Za nadaljnje reševanje je pomembna vrednost diskriminante D karakteristične enačbe:

$$D = 4\omega_n^2 - (2\zeta\omega_n)^2 = 4\omega_n^2 \cdot (1 - \zeta^2) \quad (1.15)$$

Glede na vrednost diskriminante ločimo torej tri primere:

- $D < 0$
- $D = 0$
- $D > 0$

• $D < 0$ V tem primeru je $\zeta > 1$ in karakteristična enačba ima dve realni ničli. Rešitev gibalne enačbe je v tem primeru:

$$x(t) = A \cdot e^{-|r_1|t} + B \cdot e^{-|r_2|t} \quad (1.16)$$

kjer sta A in B integracijski konstanti.

• $D = 0$ V tem primeru je dušilna mera $\zeta = 1$, zato ima karakteristična enačba dvojno realno negativno ničlo $r_1 = r_2 = -\omega_n$. Rešitev gibalne enačbe je oblike:

$$x(t) = (A + B \cdot t) \cdot e^{-\omega_n t} \quad (1.17)$$

• $D > 0$ V tem primeru mora veljati $\zeta < 1$. Karakteristična enačba ima dve konjugirano kompleksni ničli.

$$r_{1,2} = -\zeta \cdot \omega_n \pm j\omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (1.18)$$

Vpeljemo lastno krožno frekvenco dušenega nihanja ω_d :

$$\omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (1.19)$$

Splošna rešitev je:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \cdot (C \cdot \cos(\omega_d t) + G \cdot \sin(\omega_d t)) \quad (1.20)$$

oziroma

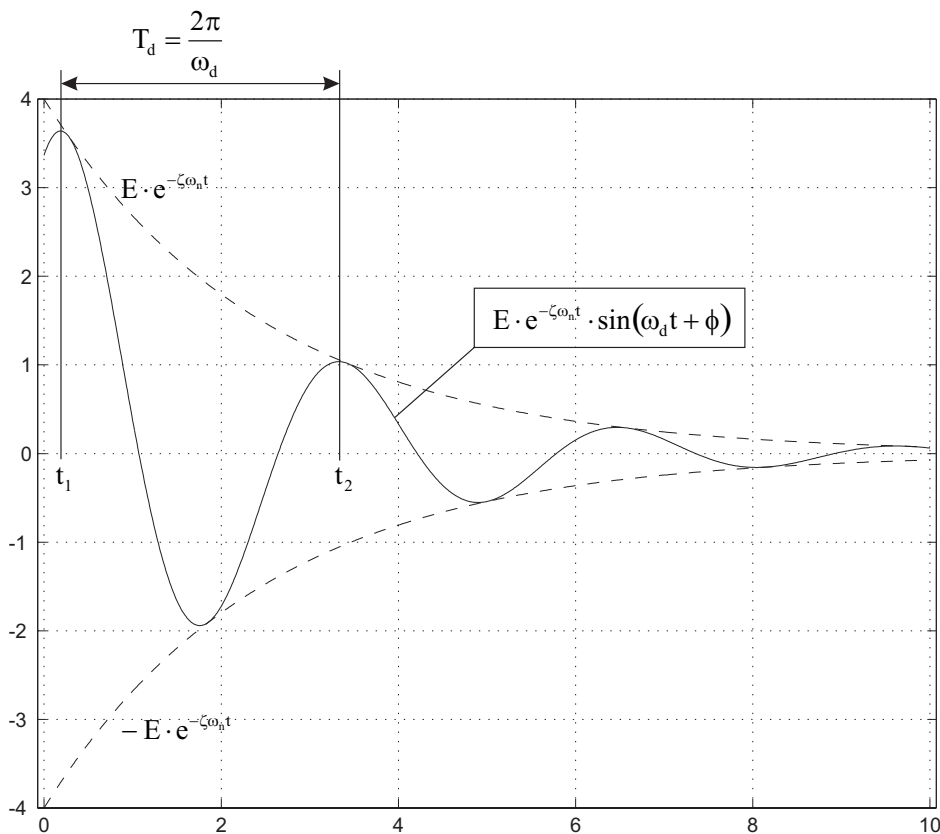
$$x(t) = E \cdot e^{-\zeta\omega_n t} \cdot \sin(\omega_d t + \phi) \quad (1.21)$$

Zgoraj sta C in G oziroma E in ϕ integracijski konstanti, ki ju določimo iz začetnih pogojev. V tehniški praksi je zelo pomemben podatek o intenzivnosti dušenja, to je časovnega upadanja amplitude nihanja. To intenzivnost dušenja ponavadi izrazimo z razmerjem dveh zaporednih pozitivnih (negativnih) amplitud $x(t)$ v časovnem intervalu ene periode $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$ (slika 1.3). Pomika $x(t)$ izberemo poljubno, recimo ob časih $t_1 = n \cdot T_d$ in $t_2 = (n + 1) \cdot T_d$, kjer je $n = 0, 1, 2, \dots$ in ju upoštevamo v rešitvi enačbe 1.21, nato pa zapišemo kvocient

$$\frac{x(n \cdot T_d)}{x((n + 1) \cdot T_d)} = \frac{E \cdot e^{-\zeta\omega_n n T_d} \cdot \sin(\omega_d \cdot \frac{2\pi n}{\omega_d} + \phi)}{E \cdot e^{-\zeta\omega_n (n+1) T_d} \cdot \sin(\omega_d \cdot \frac{2\pi(n+1)}{\omega_d} + \phi)} = e^{\zeta\omega_n T_d} = q \quad (1.22)$$

To razmerje, ki ga imenujemo dekrement pomika $x(t)$ in označimo s q , je pri danih parametrih sistema konstantno. Ponavadi poiščemo njegov naravni logaritem, ki ga imenujemo logaritmični dekrement.

$$\ln q = \zeta\omega_n T_d = \zeta\omega_n \frac{2\pi}{\omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \Delta \quad (1.23)$$



Slika 1.3: Lastno dušeno nihanje

Vsiljeno dušeno nihanje s harmonično motnjo

Diferencialno enačbo lahko v tem primeru zapišemo v obliki:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \frac{m_o\omega_v^2r \cdot \sin(\omega_v t)}{m} = \frac{F_o}{m} \cdot \sin(\omega_v t) \quad (1.24)$$

- F_o amplituda sile
- m_o rotirajoča masa
- ω_v krožna frekvenca rotirajoče mase
- r oddaljenost težišča rotirajoče mase m_o od osi vrtenja

Diferencialna enačba je tokrat nehomogena. Rešitev homogenega dela (komplementarna rešitev) že poznamo (glej Lastno dušeno nihanje). Poiskati moramo še partikularno rešitev zgornje enačbe: Precejšnjemu delu se izognemo, če vemo, da lastno nihanje kmalu zamre in sistem niha le z vzbujevalno frekvenco, kar je v našem primeru krožna frekvenca rotirajoče mase. Uporabimo lahko torej nastavek:

$$x_p(t) = X \cdot \sin(\omega_v t + \phi) \quad (1.25)$$

Če to vstavimo v enačbo 1.24 dobimo:

$$-X\omega_v^2 \cdot \sin(\omega_v t + \phi) + 2\zeta\omega_n\omega_v X \cdot \cos(\omega_v t + \phi) + \omega_n^2 X \cdot \sin(\omega_v t + \phi) = \frac{F_o}{m} \cdot \sin(\omega_v t) \quad (1.26)$$

Če v zgornji enačbi upoštevamo adicijske izreke, jo lahko zapišemo v obliki:

$$\begin{aligned} & -X\omega_v^2 \cdot [\sin(\omega_v t) \cdot \cos \phi + \cos(\omega_v t) \cdot \sin \phi] \\ & + 2\zeta\omega_n\omega_v X \cdot [\cos(\omega_v t) \cdot \cos \phi - \sin(\omega_v t) \cdot \sin \phi] \\ & + \omega_n^2 X \cdot [\sin(\omega_v t) \cdot \cos \phi + \cos(\omega_v t) \cdot \sin \phi] = \frac{F_o}{m} \cdot \sin(\omega_v t) \end{aligned} \quad (1.27)$$

S primerjavo členov pri $\cos(\omega_v t)$ in $\sin(\omega_v t)$ lahko zapišemo

$$(\omega_n^2 - \omega_v^2) \cdot \cos \phi - 2\zeta\omega_n\omega_v \cdot \sin \phi = \frac{F_o}{mX} \quad (1.28)$$

$$(\omega_n^2 - \omega_v^2) \cdot \sin \phi + 2\zeta\omega_n\omega_v \cdot \cos \phi = 0 \quad (1.29)$$

Če nato množimo enkrat prvo enačbo s $\cos \phi$, drugo pa s $\sin \phi$ in ju nato seštejemo, drugič pa prvo z $-\sin \phi$, drugo pa s $\cos \phi$ in ju nato spet seštejemo, dobimo novi enačbi:

$$(\omega_n^2 - \omega_v^2) = \frac{F_o}{mX} \cdot \cos \phi \quad (1.30)$$

$$2\zeta\omega_n\omega_v \cdot \cos \phi = -\frac{F_o}{mX} \cdot \sin \phi \quad (1.31)$$

Obe enačbi kvadriramo in seštejemo ter izrazimo X.

$$X = \frac{\frac{F_o}{m}}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_v^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega_v)^2}} \quad (1.32)$$

Drugo izmed enačb pomnožimo z -1 ter jo nato podelimo s prvo in izrazimo ϕ .

$$\phi = \arctan \left(-\frac{2\zeta\omega_n\omega_v}{\omega_n^2 - \omega_v^2} \right) \quad (1.33)$$

Partikularna rešitev enačbe 1.24 je torej:

$$x_p(t) = \frac{\frac{F_o}{m}}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_v^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega_v)^2}} \cdot \sin \left(\omega_v t + \arctan \left(-\frac{2\zeta\omega_n\omega_v}{\omega_n^2 - \omega_v^2} \right) \right) \quad (1.34)$$

Kompletno rešitev obravnavanega nihanja dobimo z vsoto enačb 1.21 in 1.34. To pomeni, da je kompletno gibanje mase m sestavljeno iz lastnega dušenega nihanja in vsiljenega nihanja:

$$\begin{aligned} x(t) &= E \cdot e^{-\zeta\omega_n t} \cdot \sin(\omega_d t + \phi) \\ &+ \frac{\frac{F_o}{m}}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_v^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega_v)^2}} \cdot \sin \left(\omega_v t + \arctan \left(-\frac{2\zeta\omega_n\omega_v}{\omega_n^2 - \omega_v^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (1.35)$$

Ker nas zanima obnašanje sistema pri različnih frekvencah vsiljenega nihanja, vpeljemo brezdimenzijsko razmerje vzbujevalne in lastne krožne frekvence ν :

$$\nu = \frac{\omega_v}{\omega_n} \quad (1.36)$$

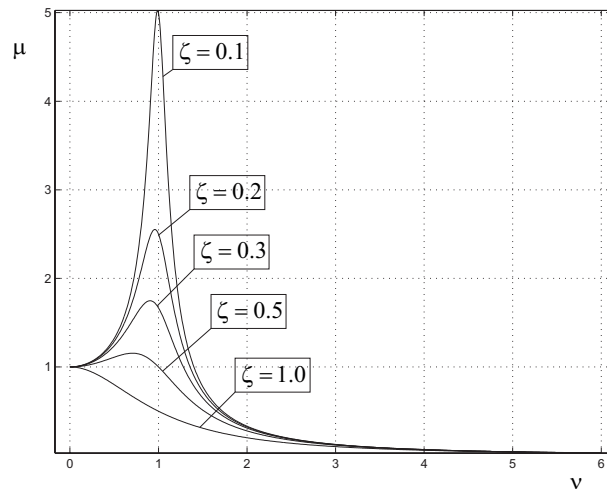
Hkrati definiramo še statični pomik x_{st} in razmerje amplitud μ v ustaljenem stanju. Statični pomik izračunamo iz enačbe 1.24, ko je $\sin(\omega_v t) = 1$:

$$F_o = K \cdot x_{st} \Rightarrow x_{st} = \frac{F_o}{K} \quad (1.37)$$

Za račun μ upoštevamo le tisti del enačbe 1.35, ki upošteva vsiljeno nihanje, kajti lastno nihanje gre v ustaljenem stanju zaradi člena $e^{-\zeta\omega_n t}$ s časom proti nič. Zapišemo lahko:

$$\mu = \frac{X}{x_{st}} = \frac{\frac{F_o}{m}}{\frac{F_o}{K} \cdot \sqrt{(\omega_n^2 - \omega_v^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega_v)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \nu^2)^2 + (2\zeta\nu)^2}} \quad (1.38)$$

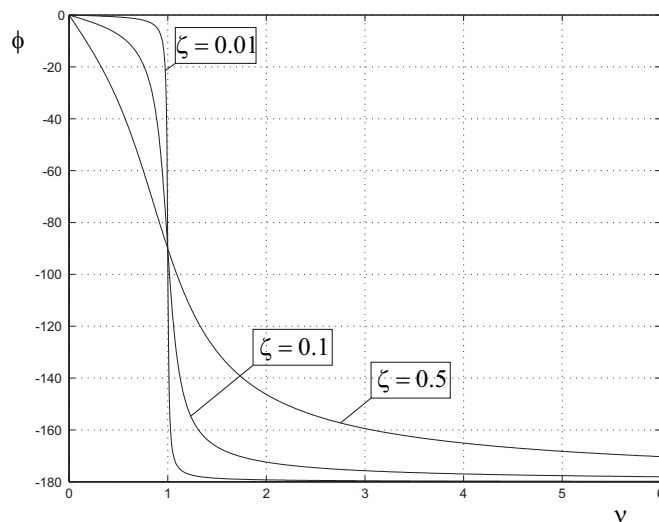
pri čemer imenujemo μ faktor gibalnega ojačevanja. Graf le tega v odvisnosti od razmerja frekvenc ν je za različne dusilne mere ζ prikazan na sliki 1.4.



Slika 1.4: Odvisnost faktorja gibalnega ojačevanja μ od razmerja frekvenc ν

Da bi lahko na isti način narisali še graf odvisnosti faze ϕ od brezdimenzijskega razmerja frekvenc ν (slika 1.5), preoblikujemo enačbo 1.33.

$$\phi = -\arctan\left(\frac{2\zeta\nu}{1 - \nu^2}\right) \quad (1.39)$$



Slika 1.5: Odvisnost faznega kota ϕ od razmerja frekvenc ν

1.1.2 Risanje frekvenčnih diagramov

V predhodnem delu vaje smo videli, da je odziv sistema v primeru, da nanj delujemo z motnjo oblike $A \cdot \sin(\omega_v t)$, enak vsoti $B \cdot \sin(\omega_v t + \phi)$ in še enega člena (lastno nihanje), ki pa gre pri realnih sistemih (dušenje) s časom proti nič. Vidimo lahko, da se izstopni signal razlikuje od vstopnega po amplitudi in fazi. To pa sta tudi veličini, ki sta zanimivi in ju zato prikažemo v t.i. frekvenčnih diagramih. Ti so prirodni frekvenčni diagram, Bodejev diagram in Nyquistov polarni diagram.

Prirodni diagram

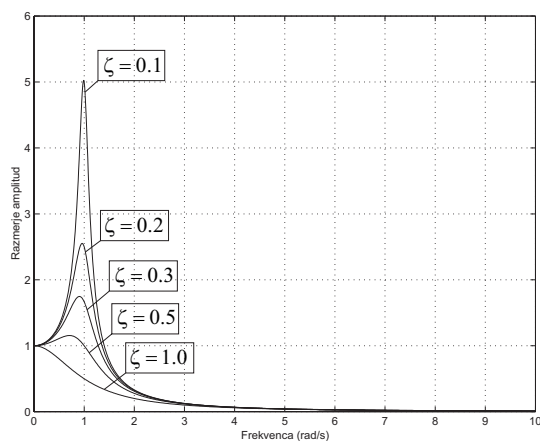
Prirodni diagram je sestavljen iz dveh diagramov in sicer amplitudno frekvenčnega in fazno frekvenčnega.

- Amplitudno frekvenčni diagram
To je diagram, pri katerem na absciso nanašamo frekvenco v linearnem merilu na ordinato pa razmerje izhodne in vhodne amplitude.
- Fazno frekvenčni diagram
Tudi tu vnašamo na absciso frekvenco v linearnem merilu na ordinato pa fazo.

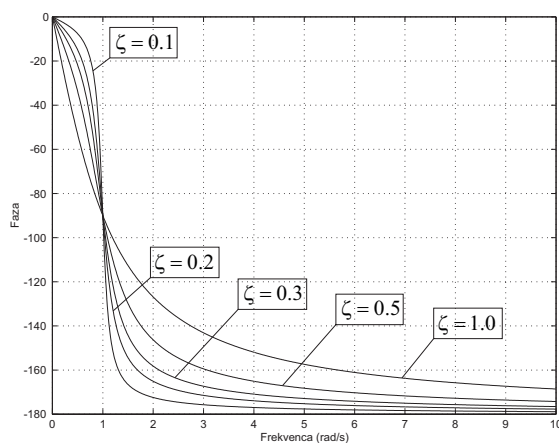
Amplitudno frekvenčni diagram (slika 1.6) je torej preoblikovan graf s slike 1.4, fazno frekvenčni (slika 1.7) pa graf s slike 1.5.

Bodejev diagram

Tudi Bodejev diagram je sestavljen iz dveh diagramov in sicer amplitudno frekvenčnega in fazno frekvenčnega.



Slika 1.6: Amplitudno frekvenčni del prirodnega diagrama



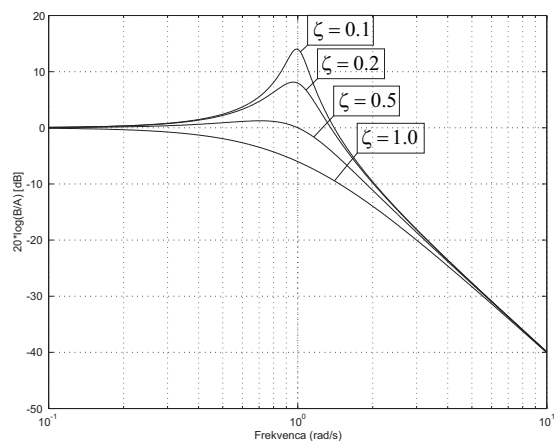
Slika 1.7: Fazno frekvenčni del prirodnega diagrama

- Amplitudno frekvenčni diagram
To je diagram, pri katerem na absciso nanašamo frekvenco v logaritemskem merilu na ordinato pa $20 \cdot \log \cdot \text{izhodna amplituda} / \text{vhodna amplituda}$ v decibelih.
- Fazno frekvenčni diagram
Tudi tu vnašamo na absciso frekvenco v logaritemskem merilu na ordinato pa fazo.

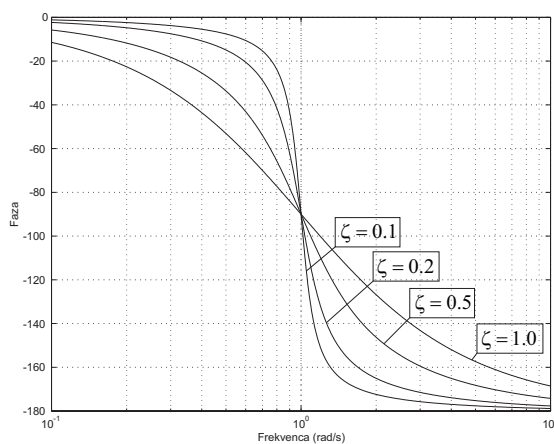
Amplitudno frekvenčni diagram (slika 1.8) je torej tudi tukaj preoblikovan graf s slike 1.4, fazno frekvenčni (slika 1.9) pa graf s slike 1.5.

Nyquistov diagram

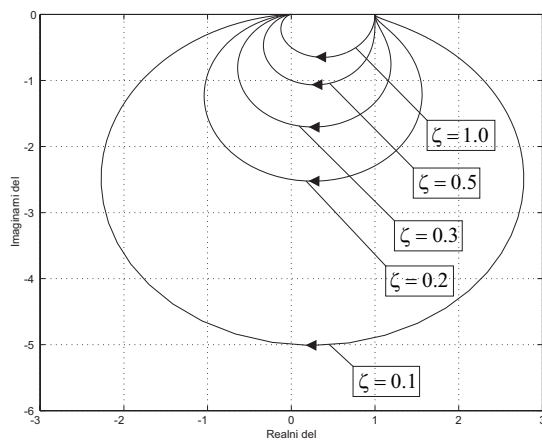
To je diagram, ki ga rišemo v kompleksni ravnini, pri čemer absolutna vrednost nekega kompleksnega števila predstavlja razmerje amplitud izhodnega in vhodnega signala pri neki frekvenci, njegov argument pa fazo pri dani frekvenci.



Slika 1.8: Amplitudno frekvenčni del Bodejevega diagrama



Slika 1.9: Fazno frekvenčni del Bodejevega diagrama



Slika 1.10: Nyquistov diagram

1.2 Merilna veriga

Mehanski sistem, ki ga bomo uporabljali pri tej vaji, se od teoretičnega, ki je bil opisan, razlikuje v tem, da je uporabljena dušilka, ki deluje na elektromagnetnem principu. Iz elektrotehnike je znana formula, ki opisuje povezavo med inducirano pogonsko napetostjo e , magnetno indukcijo B , elementom dolžine vodnika l in hitrostjo gibanja vodnika v_n :

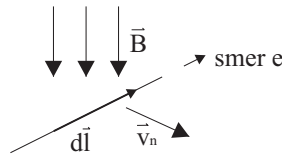
$$de = (\vec{B}, d\vec{l}, \vec{v}_n) \quad (1.40)$$

- de
inducirana pogonska napetost na vodniku dolžine dl
- \vec{v}_n
hitrost premikanja vodnika glede na zunanje magnetno polje z magnetno indukcijo \vec{B}

V primeru medsebojne ortogonalnosti vseh treh vektorjev velja:

$$e = B \cdot l \cdot v_n \quad (1.41)$$

V splošnem velja pravilo desne roke, ki je prikazana na sliki 1.11. Magnetno polje indukcije



Slika 1.11: Pravilo desne roke

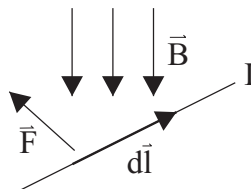
\vec{B} deluje na element vodnika dolžine $d\vec{l}$ po katerem teče električni tok I s silo:

$$d\vec{F} = I \cdot (d\vec{l} \times \vec{B}) \quad (1.42)$$

Če predpostavimo medsebojno ortogonalnost vektorjev \vec{B} in \vec{l} , lahko zapišemo:

$$F = I \cdot l \cdot B \quad (1.43)$$

V splošnem velja pravilo leve roke, ki je prikazano na sliki 1.12. Če upoštevamo, da je tok

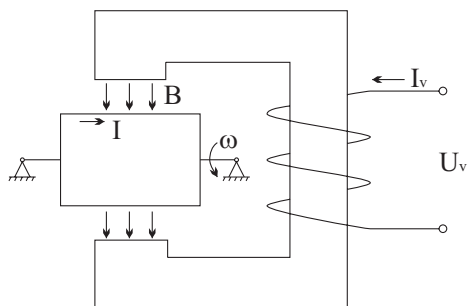


Slika 1.12: Pravilo leve roke

v sklenjenem vodniku kratkostične kletke rotorja $I = \frac{e}{R}$ in predpostavljamo medsebojno ortogonalnost \vec{B} , \vec{l} \vec{v} dobimo:

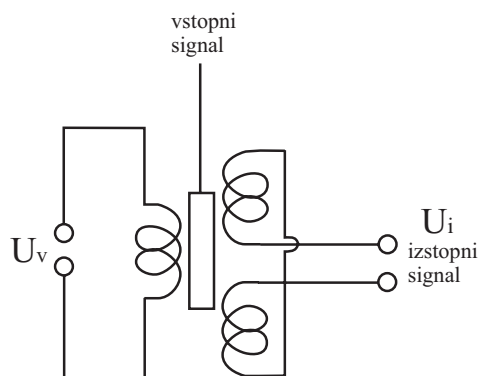
$$F = I \cdot l \cdot B = \frac{e}{R} \cdot l \cdot B = \frac{B \cdot l \cdot v_n}{R} \cdot l \cdot B = \frac{B^2 \cdot l^2}{R} \cdot v_n = \frac{(K \cdot u_v)^2 \cdot l^2}{R} \cdot v_n \quad (1.44)$$

Upoštevali smo, da je magnetna indukcija B premosorazmerna toku v vzbujevalnem navitju I_v , le ta pa vzbujevalni napetosti u_v . Princip delovanja elektromagnetne dušilke je shematično prikazan na sliki 13. Uporabljena je predvsem zato, ker je pri klasičnih



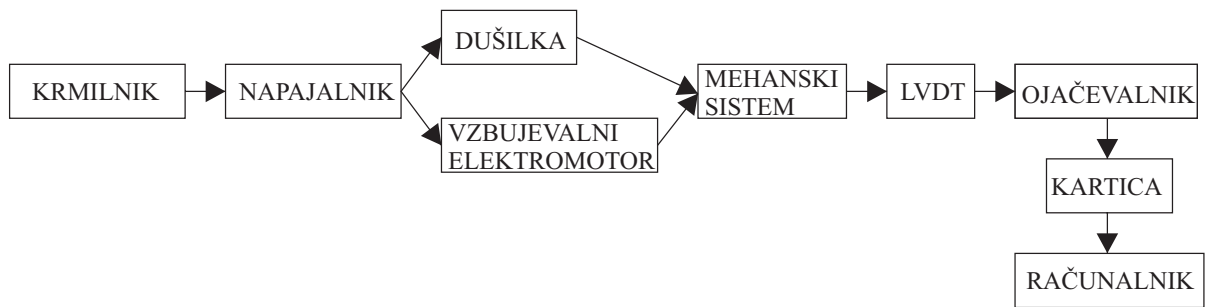
Slika 1.13: Princip delovanja elektromagnetne dušilke

mehanskih dušilkah zelo težko doseči konstanten koeficient dušenja. Pri elektromagnetni indukciji je linearnost mnogo lažje dosegljiva tudi zato, ker so električne veličine bolj primerne za krmiljenje kot mehanske. S kombinacijo krmilnika in napajalnika je doseženo vsklajeno delovanje dušilke in vzbujevalnega elektromotorja (dušilka deluje v območju 0~25V, vzbujevalni elektromotor pa v območju 0~12V), tako da je zadoščeno enačbi 1.4. Pomiki mase m se merijo preko LVDT-ja (princip delovanja je prikazan na sliki 1.14) in ojačevalnika z nosilno frekvenco 5kHz, pri čemer je izhod 1.8V/mm. Ta signal peljemo na kartico za zajemanje podatkov, od tu pa na računalnik. Tako lahko narišemo shemo



Slika 1.14: Princip delovanja linearnega variabilnega diferencialnega transformatorja (LVDT)

merilne verige, kot jo kaže slika 1.15.



Slika 1.15: Shema merilne verige

1.3 Naloga

- Določi lastno krožno frekvenco dušenega nihanja s slike prehodne funkcije!
- Izračunaj vse potrebne podatke za izdelavo Prirodnega, Bodejevega in Nyquistovega diagrama in jih nato prikaži v tabelah
- Nariši Prirodni, Bodejev in Nyquistov diagram pri določenih nastavitvah parametrov!