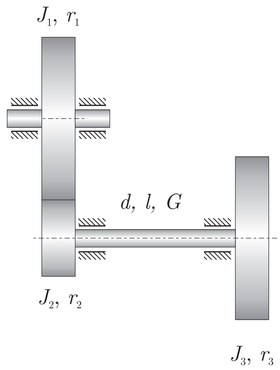
LADISK – Laboratorij za dinamiko strojev in konstrukcij

Višja dinamika in Dinamika strojev
IZPIT Z REŠITVAMI – 24. januar 2006

NALOGA 1 (30 točk)

Z metodo prenosnih matrik določite lastne frekvence torzijskega nihanja sistema na sliki.

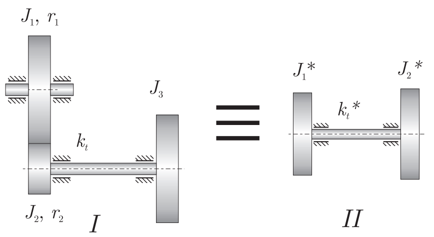


Podatki:

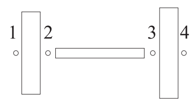
$l = 200\,\mathrm{mm}$	$J_2 = J/4$
$d = 20\,\mathrm{mm}$	$r_1 = r_3 = r$
$G = 4 \times 10^4\,\mathrm{MPa}$	$r_2 = r/2$
$J_1 = J_3 = J = 0{,}1\,\mathrm{kgm}^2$	$k_t = G\pi d^4/(32l)$

Rešitev

Nalogo rešimo tako, da najprej določimo lastnosti nadomestnega sistema, brez razvejitve, t.j., nadomestne masne vztrajnostne momente in nadomestne togosti gredi (sl. (a)),



(a)



(b)

kjer velja enakost med sistemoma

$$E_{k_I} = E_{k_{II}} \quad \wedge \quad E_{p_I} = E_{p_{II}}$$

oz., ob upoštevanju prestavnega razmerja med gredema, $i = \omega_1/\omega_2 = r_2/r_1$,

$$\tfrac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \tfrac{1}{2}J_2\left(\tfrac{1}{i}\right)^2\omega_1^2 + \tfrac{1}{2}J_3\left(\tfrac{1}{i}\right)^2\omega_1^2 = \tfrac{1}{2}J_1^*\omega_1^2 + \tfrac{1}{2}J_2^*\omega_1^2$$

$$\tfrac{1}{2}k_t\varphi^2 = \tfrac{1}{2}k_t^*\varphi^2.$$

Če primerjamo tiste člene pri kinetični in potencialni energiji, ki pripadajo isti poziciji obeh sistemov (pozicija diskov oz. pozicija gredi), velja

$$J_1^* = J_1 + J_2\left(\tfrac{1}{i}\right)^2 \wedge J_2^* = J_3\left(\tfrac{1}{i}\right)^2$$

$$k_t^* = k_t.$$

V skladu z metodo prenosnih matrik, nadomestni sistem razdelimo na posamezne elemente, na dva diska s prenosnima matrikama $\boldsymbol{M}_1$ in $\boldsymbol{M}_2$ ter brezmasno elastično gred, s prenosno matriko $\boldsymbol{K}$, sl. (b),

$$\boldsymbol{M}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 J_i^* & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 1 & 1/k_t^* \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

kjer velja naslednja povezava med prvim in zadnjim vektorjem stanja, med *robnima* vektorjema,

$$\boldsymbol{V}_4 = \boldsymbol{M}_2\boldsymbol{K}\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{D}\boldsymbol{V}_1, \qquad \boldsymbol{V}_i = \begin{pmatrix} \varphi_i \\ M_i \end{pmatrix}.$$

Poleg materialno-geometrijskih lastnosti sistema, ki jih predstavlja matrika $\boldsymbol{D}$, lastno dinamiko sistema določajo tudi robni pogoji. Poznamo namreč vrednosti *notranjih* torzijskih momentov na mestih 1 in 4, kar zapišemo kot

$$\begin{pmatrix} \varphi_4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

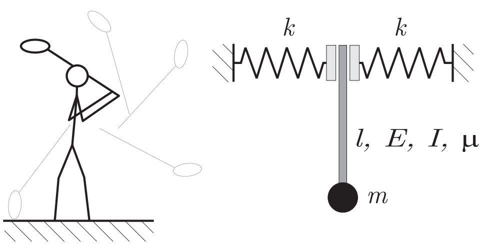
od koder sledi *pogojna enačba* (druga enačba iz zgornjega sistema) za določitev lastnih frekvenc

$$0 = d_{21}\varphi_1 \Rightarrow d_{21} = 0 \Rightarrow \omega^2 \left[3J + -\frac{4\omega^2 J^2}{k_t}\right] = 0$$

in dobimo končno rešitev

$$\omega_1 = 0$$
$$\omega_2 = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\tfrac{k_t}{J}} = 153{,}5\,\mathrm{rad/s}$$

NALOGA 2 (35 točk)



(a) (b)

Zaradi želje po preučitvi vpliva dinamike palice za golf na človeka, je vaša naloga, da določite (nakažete) izraz za prvo lastno frekvenco modela palice s sl. (b) v odvisnosti od danih parametrov. Dve vzmeti togosti k ponazarjata oprijem palice z rokama. Nalogo rešite z uporabo Euler-Bernoullijeve teorije. *Opomba*: zasuki nosilca na mestu oprijema rok so enak nič (glej sliko (b)).

Podatki:
$l,\ k,\ E,\ I, m,\ \mu$

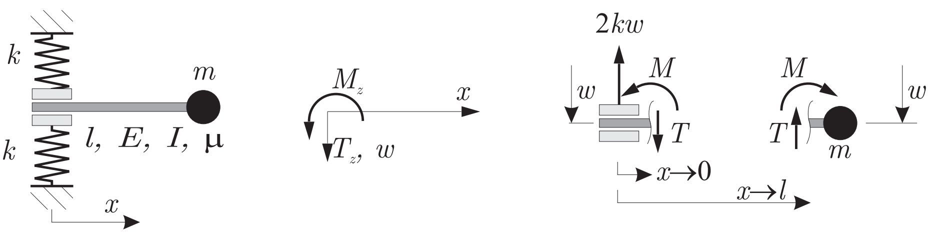
Rešitev

Palico za golf lahko predstavimo z modelom nosilca tudi kot na spodnji sl. (a). V skladu s Fourierovim nastavkom za odziv nosilca $w(x,t) = W(x)\tau(t)$, dobimo že znan izraz za krajevni del celotnega odziva nosilca (glej predavanja)

$$W(x) = D_1 \cosh(\beta x) + D_2 \sinh(\beta x) + D_3 \cos(\beta x) + D_4 \sin(\beta x),$$

kjer velja $\beta^4 = \mu\omega^2/(EI)$, D_i pa so od začetnih pogojev odvisne konstante (tokrat nas ne zanimajo *začetni pogoji*). Iz zgornjega enostavno lahko zapišemo tudi višje odvode krajevnega dela odziva

$$W'(x) = \beta\left[D_1 \sinh(\beta x) + D_2 \cosh(\beta x) - D_3 \sin(\beta x) + D_4 \cos(\beta x)\right]$$
$$W''(x) = \beta^2\left[D_1 \cosh(\beta x) + D_2 \sinh(\beta x) - D_3 \cos(\beta x) - D_4 \sin(\beta x)\right]$$
$$W'''(x) = \beta^3\left[D_1 \sinh(\beta x) + D_2 \cosh(\beta x) + D_3 \sin(\beta x) - D_4 \cos(\beta x)\right].$$



(a) (b) (c)

Lastne frekvence nosilca s sl. (a) so odvisne od lastnosti nosilca samega (podano z izrazom $W(x)$) kot tudi od *robnih pogojev*. Za potrebe pravilnega zapisa robnih pogojev moramo ustrezno določiti notranje veličine nosilca na robovih, *notranje* prečne sile T in *notranje* momente M, sl. (c) (na sl. (b) je označen tudi koordinatni sistem s pozitivno usmerjenimi *zunanjimi* veličinami, T_z in M_z; glej tudi predavanja in vaje). V skladu s sl. (a) in (c) so robni pogoji

$$1.:\ w'(0,t) = 0 \Rightarrow W'(0) = 0 \Rightarrow D_2 + D_4 = 0$$
$$2.:\ -T(0,t) + 2kw = 0 \Rightarrow EIW'''(0)\tau(t) + 2kW(0)\tau(t) = 0 \Rightarrow 2k\left[D_1 + D_3 + EI\beta^3(D_2 - D_4)\right] = 0$$
$$3.:\ M(l,t) = 0 \Rightarrow W''(0) = 0 \Rightarrow \beta^2\left[D_1\cosh(\beta l) + D_2\sinh(\beta l) - D_3\cos(\beta l) - D_4\sin(\beta l)\right] = 0$$
$$4.:\ -T(l,t) - m\ddot{w}(l,t) = 0 \Rightarrow EIW'''(l)\tau(t) - mW(l)\ddot{\tau}(t) = 0$$

V zadnjem robnem pogoju moramo upoštevati še povezavo (glej predavanja in vaje)

$$\frac{\ddot{\tau}(t)}{\tau(t)} = -\omega^2$$

in dobimo 4. robni pogoj

$$4.:\ \beta^3\left[D_1\sinh(\beta l) + D_2\cosh(\beta l) + D_3\sin(\beta l) - D_4\cos(\beta l) + \omega^2\tfrac{m}{EI}\left(D_1\cosh(\beta l) + D_2\sinh(\beta l) + D_3\cos(\beta l) + D_4\sin(\beta l)\right)\right] = 0.$$

Če vse robne pogoje uredimo v matrično obliko, dobimo homogeni sistem enačb z neznanimi koeficienti D_i

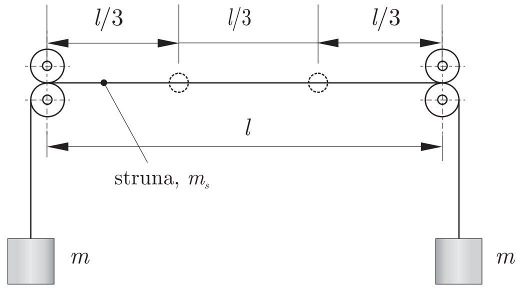
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2k & 2kEI\beta^3 & 2k & -2kEI\beta^3 \\ \cosh(\beta l) & \sinh(\beta l) & -\cos(\beta l) & -\sin(\beta l) \\ \sinh(\beta l) + \omega^2\frac{m}{EI}\cosh(\beta l) & \cosh(\beta l) + \omega^2\frac{m}{EI}\sinh(\beta l) & \sin(\beta l) + \omega^2\frac{m}{EI}\cos(\beta l) & -\cos(\beta l) - \omega^2\frac{m}{EI}\sin(\beta l) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Za netrivialno rešitev zgornjega sistema mora veljati, da je vrednost determinante matrike enaka 0, kar predstavlja pogojno enačbo za določitev lastnih frekvenc ω; v splošnem dobimo transcendentno enačbo, ki jo rešujemo numerično;

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2k & 2kEI\beta^3 & 2k & -2kEI\beta^3 \\ \cosh(\beta l) & \sinh(\beta l) & -\cos(\beta l) & -\sin(\beta l) \\ \sinh(\beta l) + \omega^2\frac{m}{EI}\cosh(\beta l) & \cosh(\beta l) + \omega^2\frac{m}{EI}\sinh(\beta l) & \sin(\beta l) + \omega^2\frac{m}{EI}\cos(\beta l) & -\cos(\beta l) - \omega^2\frac{m}{EI}\sin(\beta l) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \omega_1 \quad \text{(1. koren)}$$

NALOGA 3 (35 točk)

Določite modalno (generalizirano) togostno matriko sistema-strune, če struno modelirate v obliki diskretizacije na dve masni točki (glej skico).



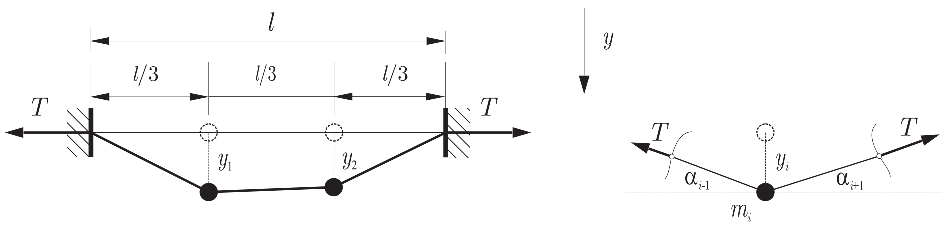
Podatki:

$m_s = 1\,\mathrm{kg}$
$m = 100\,\mathrm{kg}$
$l = 10\,\mathrm{m}$

Rešitev

Najprej potrebujemo gibalno enačbo. Pri struni, diskretizirano na poljubno število točk, npr. obravnavajmo n točk, sl. (b), vedno predpostavimo, da je osna sila v struni, sl. (a) ves čas konstantna in enaka teži ene uteži

$$T = mg.$$



(a) (b)

Za vsako, i-to masno točko, zapišemo gibalno enačbo

$$\sum_k F_{y_k} = m_i \ddot{y}_i$$
$$-T\sin(\alpha_{i-1}) - T\sin(\alpha_{i+1}) = m_i\ddot{y}_i,$$

kjer za majhna nihanja (in s tem majhne kote) velja

$$\sin(\alpha_{i-1}) \approx \tan(\alpha_{i-1}) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{l/(n+1)}$$
$$\sin(\alpha_{i+1}) \approx \tan(\alpha_{i+1}) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{l/(n+1)}.$$

Po enostavni ureditvi, ko upoštevamo še $m_i = m_s/n$, dobimo gibalno enačbo za i-to masno točko

$$\frac{m_s l}{n(n+1)T}\ddot{y}_i - y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1} = 0.$$

V našem konkretnem primeru velja $n = 2$ (dve masni točki), kar lahko zapišemo glede na prejšnji, splošni izraz, kot

$$i = 1: \ \frac{m_s l}{6T}\ddot{y}_1 - y_0 + 2y_1 - y_2 = 0$$
$$i = 2: \ \frac{m_s l}{6T}\ddot{y}_2 - y_1 + 2y_2 - y_3 = 0.$$

Veljajo robni pogoji

$$y_0 = y_3 = 0$$

in za sistem – struno lahko zapišemo obe *gibalni enačbi* v matrični obliki

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}; \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2)^T$$

z

$$\boldsymbol{M} = \frac{m_s l}{6T}\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right], \qquad \boldsymbol{K} = \left[\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{array}\right].$$

Lastni frekvenci sistema dobimo že z znanim pogojem (glej predavanja in vaje)

$$\left|\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M}\right| = 0,$$

kar nam da karakteristični polinom za izračun korenov oz. lastnih frekvenc

$$4 - 4\tilde{m}\omega^2 + \tilde{m}^2\omega^4 - 1 = 0, \qquad \tilde{m} = \frac{m_s l}{6T}$$

in od tod

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{6T}{m_s l}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{18T}{m_s l}}.$$

Ker poznamo vse lastne frekvence (tokrat sta dve in obe različni od nič), lahko iz homogenega sistema

$$\left(\boldsymbol{K} - \omega_i^2 \boldsymbol{M}\right) \boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{X} = (X_1, X_2)^T$$

določimo še lastne vektorje $\boldsymbol{X}^{(i)}$, za vsako lastno frekvenco, ω_i. Ker pa je sistem homogen (ima neskončno rešitev za neznane koeficiente v $\boldsymbol{X}$), si moramo eno komponento poljubno izbrati; največkrat izberemo $X_1 = 1$ in izračunamo ostale, npr. iz prve enačbe iz zgornjega sistema

$$(2 - \omega_i^2 \tilde{m}) X_1^{(i)} = X_2^{(i)} \Rightarrow X_2^{(i)} = \left(2 - \frac{m_s l}{6T}\omega_i^2\right) X_1^{(i)}.$$

Dobimo dva lastna vektorja, ki skupaj predstavljata *modalno matriko*

$$\boldsymbol{\phi} = \left[\boldsymbol{X}^{(1)}\ \boldsymbol{X}^{(2)}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array}\right].$$

Generalizirana togostna matrika je diagonalna matrika (glej predavanja in vaje), tokrat je enaka

$$\bar{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{\phi} = \left[\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{array}\right].$$