Univerza v Ljubljani

Fakulteta za strojništvo

LADISK – Laboratorij za dinamiko strojev in konstrukcij

Višja dinamika

Laboratorijske vaje

Dr. Janko Slavič

23. avgust 2012

Gradivo podaja nujne izraze za sledenje laboratorijskim vajam, pri čemer se predpostavlja znanje s predavanj in vaj.

Študent:		
Lab. vaja	Datum	Podpis asistenta
Prva		
Druga		

Zadnja različica se nahaja na:
http://lab.fs.uni-lj.si/ladisk/data/pdf/LaboratorijskeVajeVD.pdf

Uporabljamo $\LaTeX\,2_\varepsilon$.

1 Karakterizacija sistema z več prostostnimi stopnjami

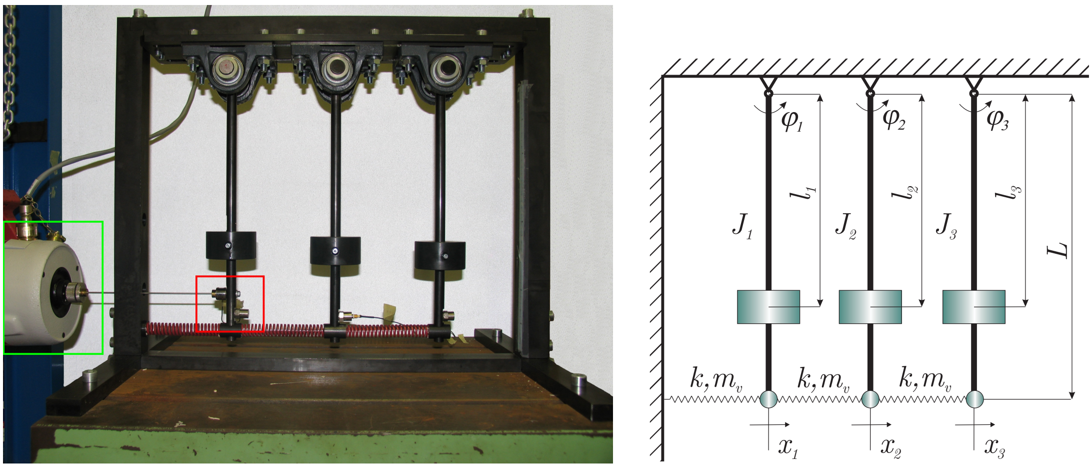
1.1 Uvod

1.1.1 Namen vaje

V realnosti imajo sistemi le redko eno samo prostostno stopnjo, zato je namen te vaje spoznati sistem z več prostostnimi stopnjami in njegove lastnosti, ter spoznati način določevanja lastnih frekvenc in lastnih vektorjev teh sistemov. Spoznali bomo tudi frekvenčne prenosne funkcije.

1.1.2 Definicija naloge

Izračunajte lastne frekvence in vektorje sistema na sliki 1. Izmerite lastne frekvence sistema. Uporabite teorijo majhnih pomikov. Dušenje zanemarite.



(a) (b)

Slika 1: Sistem z več prostostnimi stopnjami: (a) slika realnega sistema; (b) matematični model.

1.2 Matematični model

1.2.1 Sistem z več prostostnimi stopnjami

Podatki za izračun lastnih frekvenc
m=0.536 kg, M=1.513 kg, m_v=0.105 kg, m_n=0.052 kg, R=0.0325 m, r=0.0075 m, H=0.04 m, k=25.734 N/mm, L=0.38 m.

Določitev gibalnih enačb
Sistem na sliki 1(a) poenostavimo kot je prikazano na sliki 1(b).

Uporabimo lahko II. Newtonov zakon ali Lagrangeove enačbe II. vrste. Zaradi večje preglednosti bomo uporabili slednje. Pri tem predpostavimo, da velja $x_1 > x_2 > x_3$.

$$\mathfrak{L} = E_k - E_p \tag{1}$$

$$E_k = \frac{1}{2}\,J_1\,\dot{\varphi_1}^2 + \frac{1}{2}\,J_2\,\dot{\varphi_2}^2 + \frac{1}{2}\,J_3\,\dot{\varphi_3}^2 + \frac{m_v}{6}\cdot\left[\dot{x}_1^2 + (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + (\dot{x}_2 - \dot{x}_3)^2\right] \tag{2}$$

$$E_p = \frac{1}{2}\, k\, x_1^2 + \frac{1}{2}\, k\, (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}\, k\, (x_2 - x_3)^2, \tag{3}$$

kjer J_i predstavlja masni vztrajnostni moment palice z utežjo okoli vrtišča, m_v pa maso vzmeti. J_i izračunamo po enačbi:

$$J_i = J_p + J_{ui} + J_n = \frac{1}{3} m\, L^2 + M\, l_i^2 + \frac{M}{12} \cdot (3 \cdot (R^2 - r^2) + H^2) + m_n\, L^2, \tag{4}$$

kjer J_p predstavlja masni vztrajnostni moment palice glede na vrtišče, J_{ui} je masni vztrajnostni moment uteži glede na vrtišče, J_n pa masni vztrajnostni moment nastavka za vzmet glede na vrtišče. M predstavlja maso uteži, m maso palice, m_n pa maso nastavka za vzmeti. R je zunanji radij uteži, r pa radij izvrtine uteži (in hkrati radij palice). L je dolžina palice, l_i pa položaj posamezne mase, merjeno od vpetja palice navzdol. H predstavlja višino uteži.

V splošnem velja $x_i = L{\cdot}\sin(\varphi_i)$, kar vstavimo v enačbo (3). Za določitev gibalnih enačb nato potrebujemo odvode Lagrangeove funkcije po vseh treh koordinatah.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\varphi}_i}\right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \varphi_i} = 0 \tag{5}$$

Gibalne enačbe dobimo, če enačbi (2) in (3) najprej odvajamo, nato pa še lineariziramo (velja $\sin(\varphi_i) \approx \varphi_i$ in $\cos(\varphi_i) \approx 1$). Za nadaljnje reševanje uporabimo nastavek za harmoničen odziv sistema, $\varphi_i(t) = \phi_i \cdot \sin(\omega t)$. Masna matrika sistema je:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} J_1 + \frac{2}{3} L^2\, m_v & -\frac{1}{3} L^2\, m_v & 0 \\ -\frac{1}{3} L^2\, m_v & J_2 + + \frac{2}{3} L^2\, m_v & -\frac{1}{3} L^2\, m_v \\ 0 & -\frac{1}{3} L^2\, m_v & J_3 + \frac{1}{3} L^2\, m_v \end{bmatrix} \tag{6}$$

togostna matrika sistema pa

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k\, L^2 & -k\, L^2 & 0 \\ -k\, L^2 & 2k\, L^2 & -k\, L^2 \\ 0 & -k\, L^2 & k\, L^2 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Sistem gibalnih enačb, zapisan z masno in togostno matriko:

$$\left(-\omega^2 \cdot \mathbf{M} + \mathbf{K}\right) \cdot \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \tag{8}$$

$\boldsymbol{\phi}$ predstavlja vektor amplitud, $\mathbf{0}$ pa vektor ničel.

Lastne frekvence sistema dobimo, če rešimo enačbo

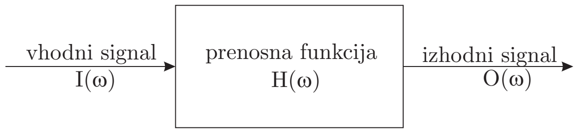
$$\det\left[-\omega^2 \cdot \mathbf{M} + \mathbf{K}\right] = 0. \tag{9}$$

Lastne vektorje sistema dobimo, če vrednosti za posamezno lastno frekvenco vstavimo v sistem enačb (8). Ker je to sistem dveh neodvisnih in ene odvisne enačbe, lastne vektorje normiramo.

1.3 Eksperiment

1.3.1 Frekvenčna prenosna funkcija

S frekvenčno prenosno funkcijo (FRF, frequency response function) določimo modalne parametre sistema (lastne frekvence, lastni vektorji, ...). Izražena je kot prenosna funkcija v frekvenčnem prostoru. V splošnem prenosna funkcija izgleda kot je prikazano na sliki 2.

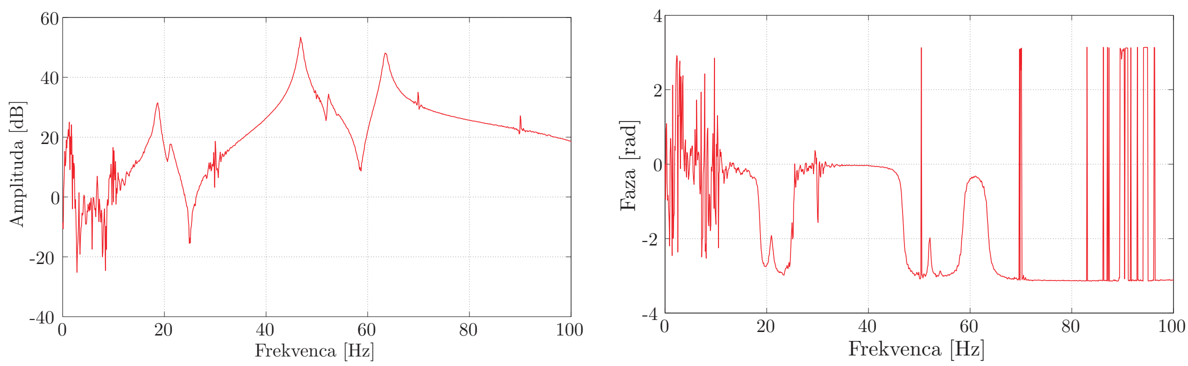


Slika 2: Shema prenosne funkcije

Predstavlja razmerje med vhodnim in izhodnim signalom, v odvisnosti od frekvence:

$$H(\omega) = \frac{O(\omega)}{I(\omega)} \tag{10}$$

Frekvenčna prenosna funkcija je sestavljena iz amplitudnega in faznega dela. Amplitudni del je prikazan na sliki 3(a), pripadajoč fazni del pa na sliki 3(b). Ker lahko merimo različne veličine, obstaja več različnih frekvenčnih prenosnih funkcij. V našem primeru bomo uporabili razmerje amplitude pospeška in sile. Iz frekvenčne prenosne funkcije torej lahko neposredno odčitamo lastne frekvence sistema.



(a) (b)

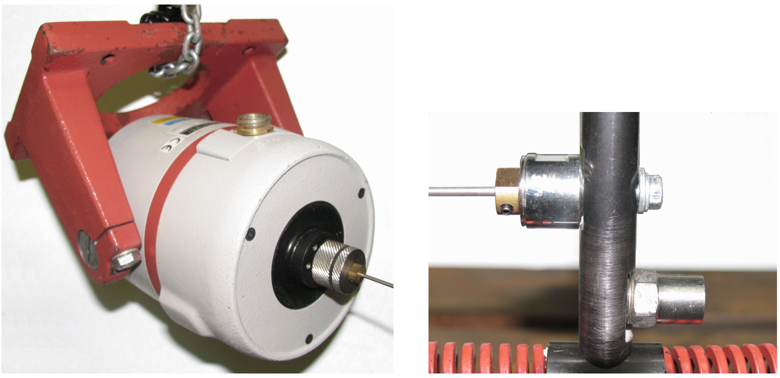
Slika 3: Frekvenčna prenosna funkcija: (a) amplitudni del; (b) fazni del.

1.3.2 Merjenje lastnih frekvenc

Pri meritvi sistem vzbujamo z belim šumom, ki ga generiramo s stresalnikom. Z belim šumom zagotovimo, da imamo v vzbujanju z enako močjo zastopane vse frekvence. Stresalnik je prikazan na sliki 4(a). Signal za stresalnik generiramo s programom LabVIEW.

Zanima nas odziv sistema. S silomerom merimo silo na koncu palice stresalnika, s pospeškomeri pa pospeške na posamezni palici. Silomer in pospeškomer na prvi palici sta prikazana na sliki 4(b).

Podatke z zaznaval nato zajemamo z zajemnimi karticami, nato pa jih obravnavamo s programom LabVIEW. Za posamezno palico prikažemo amplitudni in fazni del frekvenčne prenosne funkcije (pospešek/sila). Lastne frekvence sistema lahko preberemo iz amplitudnega grafa.
Pri obravnavi podatkov lahko spreminjamo filtre, okna in način povprečenja podatkov.



(a) (b)

Slika 4: (a) Zelen okvir na sliki 1(a): stresalnik; (b) rdeč okvir na sliki 1(a): silomer (levo) in pospeškomer (desno).

Vpliv filtrov

Filtri uporabljamo takrat, ko imamo v signalu določene frekvence, ki jih ne želimo videti oziroma prikazati. Obstaja več vrst filtrov, med najpogostejše sodijo nizkopasovni, visokopasovni, pasovni filter in filter z zavrnitvijo pasu.

Vpliv povprečenja

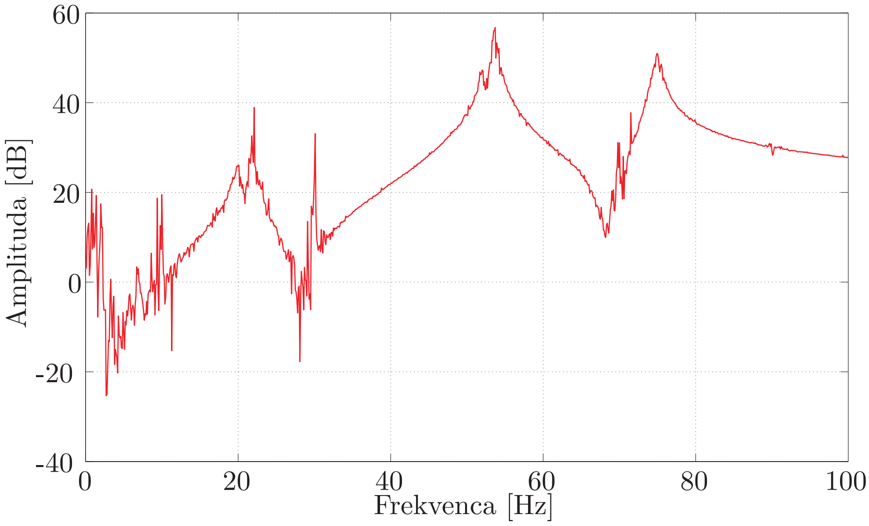
Če je v signalu prisoten šum, lahko s povprečenjem velik del šuma izločimo (zgladimo). Glede na to, kje v sistemu se šum pojavi (na vhodu, na izhodu ali na obeh koncih), ločimo različne tipe povprečenj. Primer povprečenja signala je prikazan na sliki 5.

Vpliv oken

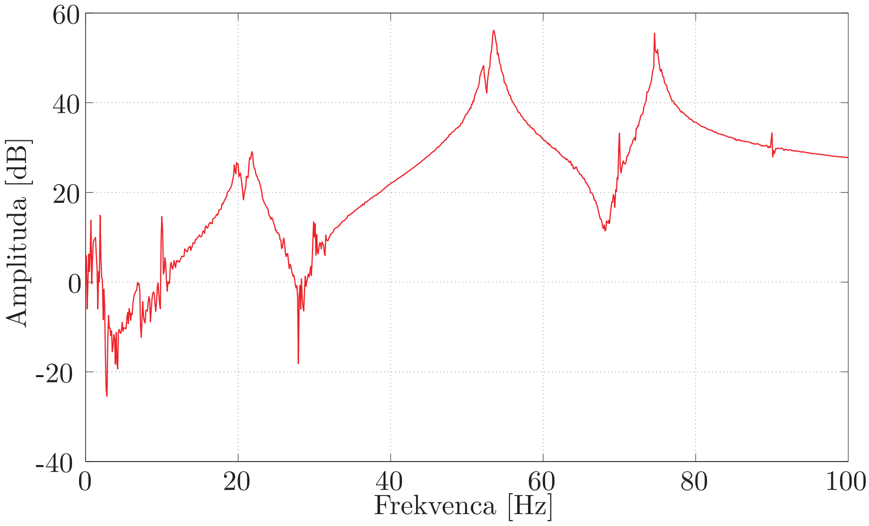
Okna (window function) uporabimo, da zmanjšujemo robne pojave (nastanejo zaradi šumov in kot posledica Fourierjeve transformacije) in da pri obdelavi realnih podatkov izključimo nezveznosti v signalu (dejanski signali niso tako ponovljivi, kot predpostavimo). Okna uporabimo še preden naredimo Fourierjevo transformacijo signala, saj omogočajo, da zmanjšamo frekvenčno odtekanje (leakage).
Vsako okno je na določenem intervalu definirano s funkcijo. Funkcija je na intervalu različna od nič, zunaj intervala pa je enaka nič.
Če nato poljubno funkcijo, ki definira naš signal, pomnožimo s funkcijo, ki definira okno, bo produkt različen od nič samo tam, kjer je od nič različna tudi okenska funkcija. Dodajanje okna nam signal sicer spremeni, vendar z njim odstranimo nezveznosti na robovih okna.
Obstaja več različnih vrst oken. Nekatera se uporablja bolj splošno, druga pa so uporaba na le zelo ozkem področju. Najenostavnejše je pravokotno okno (ponavadi signal s tem oknom obravnavamo kot signal brez okna). To okno povzroči velike stranske loke, zato razen za kratke signale ni priporočljivo. Najbolj uporabljano je Hanningovo okno. Podobno je Hammingovo okno, le da to v krajiščih nima vrednosti nič. Uporabljamo ga predvsem za signale, kjer so frekvence zelo blizu skupaj.
Za lažjo predstavo o vplivu oken na signal, je na sliki 6 prikazanih nekaj primerov vpliva različnih oken na spekter sinusnega signala.

Potek vaje

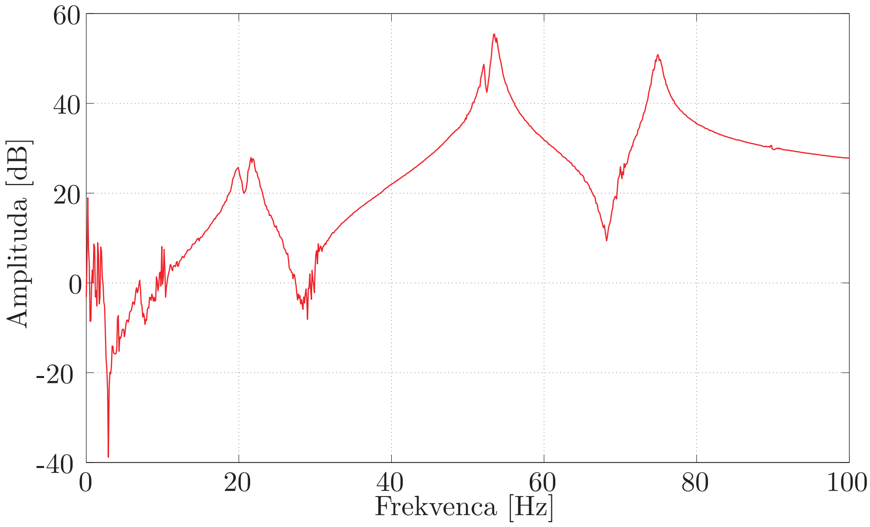
1. Za določene vrednosti l_1, l_2 in l_3 s programom *Mathematica* izračunajte lastne frekvence in vektorje sistema na sliki 1.
2. Na sistemu nastavite uteži na predpisane višine l_1, l_2, l_3 in izmerite lastne frekvence.
3. Izračunajte napako med izračunanimi in izmerjenimi lastnimi frekvencami.



(a)

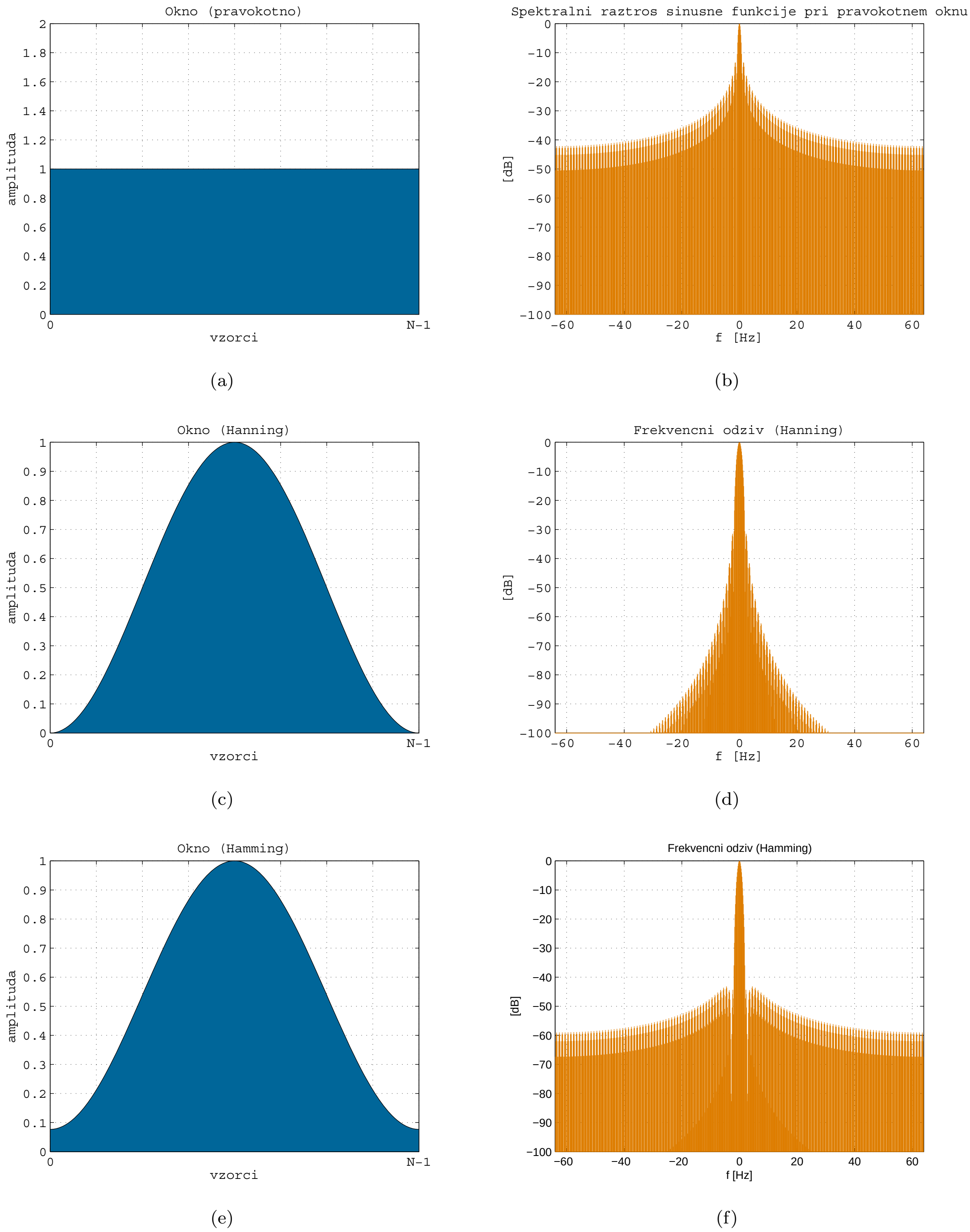


(b)



(c)

Slika 5: Prikaz vpliva povprečenja signala: (a) nepovprečen signal; (b) signal po dveh povprečenjih; (c) signal po desetih povprečenjih.



Slika 6: Vpliv oken na spekter sinusnega signala: (a) Pravokotno okno; (b) spekter sinusnega signala pri pravokotnem oknu; (c) Hanningovo okno; (d) spekter sinusnega signala pri Hanningovem oknu; (e) Hammingovo okno; (f) spekter sinusnega signala pri Hammingovem oknu.

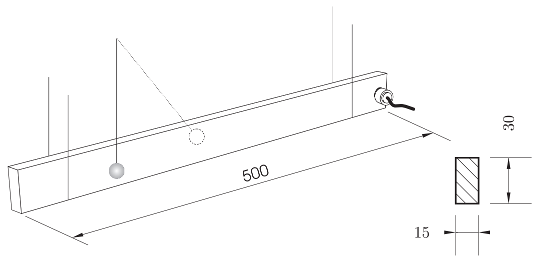
2 Lastne frekvence zveznega sistema - nosilec

2.1 Definicija naloge

Določite prve tri lastne frekvence ravninskega upogibnega nihanja prosto-prosto podprtega nosilca (Slika 7) na dva načina:

analitično s pomočjo Euler-Bernoullijeve teorije,

eksperimentalno s pomočjo frekvenčne analize časovnega odziva sistema pri impulznem vzbujanju.



Slika 7: Nosilec s prosto-prostim podprtjem, pospeškomerom in vzbujevalno kroglico.

2.2 Izvedba

Predmet analize je homogeni ravni nosilec dolžine 500 mm in pravokotnega prereza 15×30 mm, ki mu na desni rob lahko namestimo dodatno utež mase 884 g. Razlikujemo med šestimi različnimi primeri sistema:

1. samo nosilec,
2. nosilec z dodano utežjo,
3. nosilec z upoštevanjem mase pospeškomera in magneta (28 g), nameščenega 10 mm stran od levega robu nosilca,
4. nosilec z upoštevanjem mase pospeškomera in magneta, nameščenega na sredino nosilca,
5. nosilec z dodano utežjo in z upoštevanjem mase pospeškomera in magneta, nameščenega 10 mm stran od levega robu nosilca in
6. nosilec z dodano utežjo in z upoštevanjem mase pospeškomera in magneta, nameščenega na sredino nosilca.

Preračunajte primera 1 in 2 analitično ter primere 3 do 6 eksperimentalno.

Literatura

[1] http://www.cs.wright.edu/ jslater/SDTCOutreachWebsite/intro_freq_resp_functions.pdf (FRF),

[2] Cha, Philip D., Molinder John I.: *Fundamentals of Signals and Systems,* Cambridge University Press, Cambridge, 2006