



STATISTIKA

Analiza časovnih vrst, trend

Nosilec:
prof.dr.Srečko Devjak

ANALIZA ČASOVNIH VRST

Proučevanje:

- Zakonitosti razvoja pojava v preteklem obdobju,
- Oceno vplivov na razvoj pojava,
- Zapisa razvoja pojava in
- Napovedovanje razvoja pojava

Časovne vrste in analiza dinamike

Časovna vrsta je množica kronološko urejenih podatkov. Velja za podatke o pojavu za neko časovno obdobje. Nastopata **dve spremenljivki**: Y in t.

Časovne vrste: trenutne ali razmične

Analiza dinamike: spreminjanje Y med dvema ali več časovnimi trenutki

Absolutna razlika:

$$D_t = Y_t - Y_{t-1}$$

Relativna razlika:

$$D_{j/o} \% = 100 * \frac{Y_j - Y_o}{Y_o}$$

**Povprečna razlika
za M časovnih
enot(intervalov):**

$$\bar{D}_{t,M} = \frac{Y_t - Y_{t-M}}{M}$$

N – število členov

M – N-1

Analiziranje razvoja pojava z enostavnimi kazalniki

Tabela: BDP na prebivalca v Slovenii za obdobje 1995-2000 (Vir: SL01, str.462)

Leto	BDP/prebivalca v tisoč USD	Bazni indeks	Verižni indeks	Razlika	Realativna razlika
t	Y_t	$I_{j/0}$	V_j	D_t	$D_t \%$
1995	9,431	100	-	-	-
1996	9,481	100,5	100,5	50	1%
1997	9,163	97,2	96,6	-318	-3%
1998	9,878	104,7	107,8	715	8%
1999	10,109	107,2	102,3	231	2%
2000	9,105	96,5	90,1	-1004	-10%

$$D_t = Y_t - Y_{t-1}$$

$$I_{j/o} = 100 * \frac{Y_j}{Y_o}$$

$$V_j = 100 * \frac{Y_j}{Y_{j-1}}$$

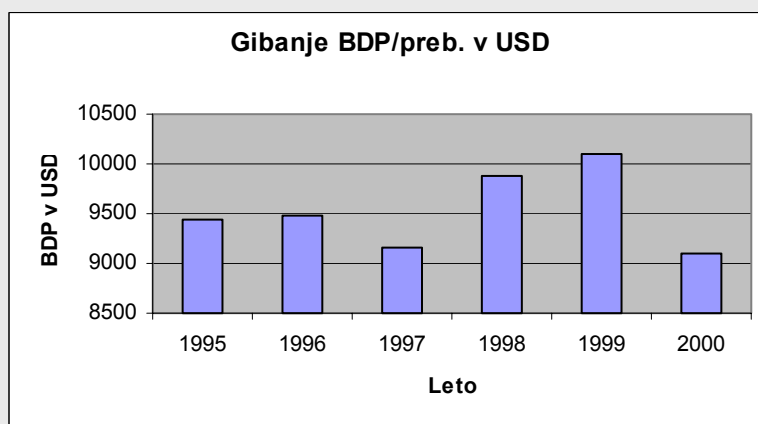
$$D_{j/o} \% = 100 * \frac{Y_j - Y_o}{Y_o}$$

$$K_j = \frac{Y_j}{Y_{j-1}}$$

$$S_j = V_j - 100$$

$$\bar{V} = \sqrt[N]{V_1 * V_2 * \dots * V_N}$$

$$S = \bar{V} - 100$$



Povprečna razlika

$$\bar{D}_{t,M} = \frac{Y_t - Y_{t-M}}{M}$$

$\bar{D}_{t,M}$ Povprečna razlika za M časovnih enot merjena v enotah Y

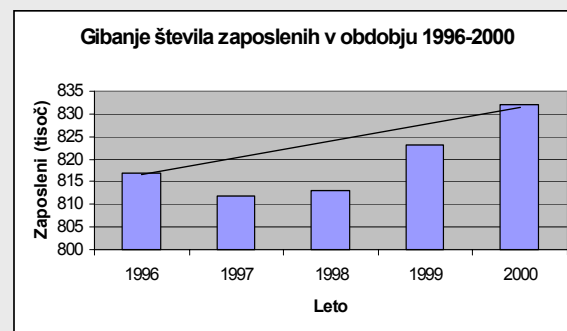
Vir: SL01, str.462							
	Zaposl enost (v tisoč)	Koefici ent dinami ke	Verižni indeks	Razlika	Realativ na razlika	$\bar{D}_{t,2}$	$Y_t * K$
Leto	Yt	Kj	Vj	Dj	Dj%		
1996	817	-	-	-	-	-	817,0
1997	812	0,994	99,4	-5	-0,6%	-	820,7
1998	813	1,001	100,1	1	0,1%	-2,00	824,5
1999	823	1,012	101,2	10	1,2%	5,50	828,2
2000	832	1,011	101,1	9	1,1%	9,50	832,0

Povprečni verižni indeks - povprečna letna stopnja rasti

$$\bar{V} = \sqrt[N]{V_1 * V_2 * \dots * V_N}$$

$$\bar{K} = \sqrt[N]{K_1 * K_2 * \dots * K_N}$$

$$\bar{K} = 1,004559$$



Metode za določanje osnovne smeri razvoja

■ Časovno spreminjanje pojavov:

- **trend** ali osnovna smer razvoja – splošna tendenca razvoja
- **ciklična nihanja** - večletna
- **periodična nihanja** - izpodletna
- **naključni vplivi**, neenakomerni, stalno prisotni
- **enkratni (epizodni) vplivi** – enkratni dejavniki

TREND

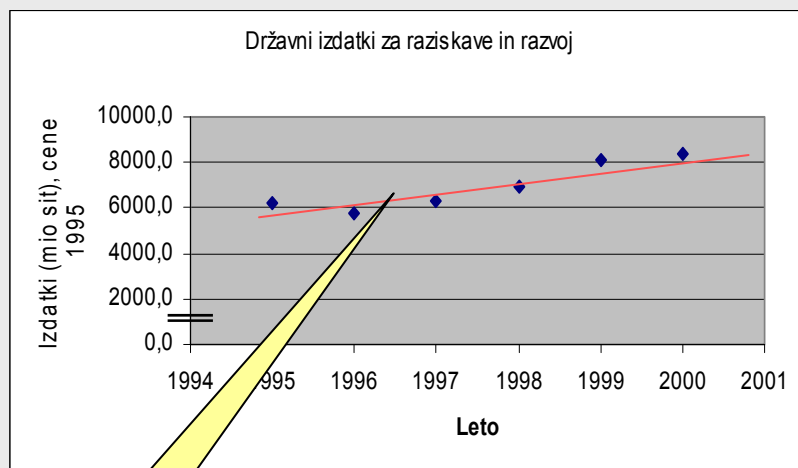
Metode za določanje trenda:

- **prostoročna metoda** - grafična
- **metoda drsečih sredin** - numerična
- **metoda najmanjših kvadratov** – matematična (izbor in določanje matematične funkcije).

Trend - prostoročna metoda

Tabela: Državni izdatki za raziskave in razvoj v obdobju 1995-1999
(cene 1995) (vir: SL2001, str 469)

Leto	Izdatki (v mio sit)
1995	6251,0
1996	5790,0
1997	6316,0
1998	6909,0
1999	8103,0
2000	8420,0



Prostoročno

Metoda drsečih sredin

Liho število časovnih enot

$$\tilde{Y}_{t-i} = \frac{Y_{t-2i} + Y_{t-2i+1} + \dots + Y_t}{r}$$

$$r = 2i + 1$$

Sodo število časovnih enot

$$\tilde{Y}_{t-i+1} = \frac{\frac{Y_{t-2i+1}}{2} + Y_{t-2i} + Y_{t-2i+2} + \dots + Y_t + \frac{Y_{t+1}}{2}}{r}$$

$$r = 2i$$

Primer:

Tabela: Državni izdatki za raziskave in razvoj v obdobju 1995-1999
(cene 1995) (vir: SL2001, str469)

Leto	Izdatki (v mio sit)	r=3	r=4	r=2
1995	6251			
1996	5790	6119,0		6036,8
1997	6316	6338,3	6548,0	6332,8
1998	6909	7109,3	7108,3	7059,3
1999	8103	7810,7		7883,8
2000	8420			

Trend-metoda najmanjših kvadratov

- **Izhodišče:** določiti je treba funkcijo/krivuljo T_t , ki bo najmanj odstopala od vrednosti pojava Y_t v obravnavanih obdobjih.

Vrednosti pojava se od vrednosti na krivulji odmikajo pozitivno in negativno.

$$\sum_{t=1}^N (Y_t - T_t) = 0$$

Kriterij je vsota kvadratov odmikov - min

$$\sum_{t=1}^N (Y_t - T_t)^2 = \min$$

Funkcija ki ustreza tem pogojem je funkcija trenda T_t

Obstaja več funkcij trenda:

LINEARNA: $T = \alpha + \beta x$

EKSPONENTNA: $T = \alpha * \beta^x$

POTENČNA: $T = \alpha * x^\beta$

LOGARITEMSKA: $T = \alpha + \beta * \log x$

Določanje parametrov funkcije trenda

Kriterij:

$$\sum_{t=1}^N (Y_t - T_t)^2 = \min$$

$$T_t = \alpha + \beta * x_t$$

$$\sum_{t=1}^N (Y_t - (\alpha + \beta * x_t))^2 = \min$$

I. Normalna enačba

$$\sum_{i=1}^N Y_t = \beta \sum_{i=1}^N x_t + \alpha * N$$

II. Normalna enačba

$$\sum_{i=1}^N x_t Y_t = \beta \sum_{i=1}^N x_t^2 + \alpha \sum_{i=1}^N x_t$$

Določanje parametrov funkcije trenda – program EXCEL

Funkcija trenda:

$$T_t = \alpha + \beta * x_t$$

Parametra:

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^N Y_t}{N} - \beta \frac{\sum_{i=1}^N x_t}{N}$$

$$\beta = \frac{N \sum_{i=1}^N Y_t x_t - \sum_{i=1}^N x_t \sum_{i=1}^N Y_t}{N \sum_{i=1}^N x_t^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_t \right)^2}$$

Poseben postopek - določanje funkcije linearnega trenda

Funkcija linearnega trenda:

$$T_t = \alpha + \beta * x_t$$

x_t -tehnični čas, ki ga vpeljemo zaradi poenostavljanja izračunov funkcije trenda.

Tehnični čas, pogoj za določanja vrednosti:

$$\sum x_t = 0$$

Primer:

Število obdobj	LETO	1995	1996	1997	1998	1999	2000	VSOTA
Liho	x_t		-2	-1	0	1	2	0
Sodo	x_t	-2,5	-1,5	-0,5	0,5	1,5	2,5	0

Poseben primer – določanje parametrov funkcije trenda

$$T_t = \alpha + \beta * x_t$$

Koeficient α je povprečje vrednosti Y:

$$\alpha = \frac{\sum Y_t}{N} = \bar{Y}$$

Koeficient β je smerni koeficient - povprečna sprememba Y v enoti časovnega intervala in ga izračunamo po obrazcu:

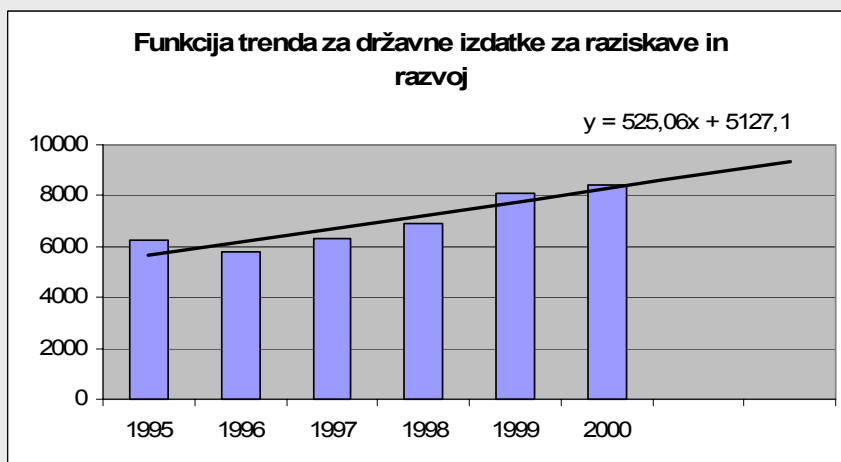
$$\beta = \frac{\sum Y_t * x_t}{\sum x_t^2}$$

Velja tudi zveza:

$$\sum T_t = \sum Y_t$$

Primer: Državni izdatki za raziskave in razvoj v obdobju 1995-1999 (cene 1995) (vir:SL2001, str469)

Leto	Izdatki (mio sit)
1995	6251
1996	5790
1997	6316
1998	6909
1999	8103
2000	8420



$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^N Y_t}{N} - \beta \frac{\sum_{i=1}^N x_t}{N} = 5127,1$$

$$\beta = \frac{N \sum_{i=1}^N Y_t x_t - \sum_{i=1}^N x_t \sum_{i=1}^N Y_t}{N \sum_{i=1}^N x_t^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_t \right)^2} = 525,06$$

Poseben postopek - določanje funkcije linearnega trenda

Primer: Državni izdatki za raziskave in razvoj v obdobju 1995-1999 (cene 1995) (vir:SL2001, str469)

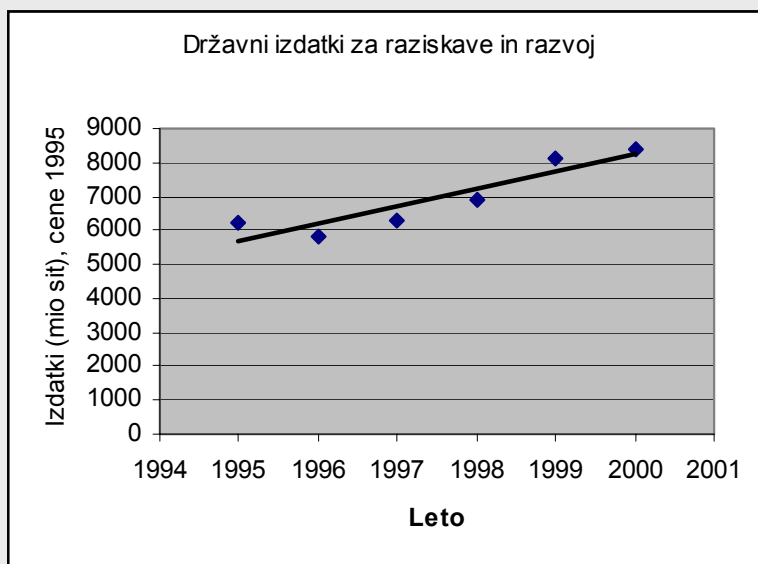
Leto	Izdatki (v mio sit)	x_t	$x_t * Y_t$	x_t^2	T_t
1995	6251	-2,5	-15627,5	6,25	5652,2
1996	5790	-1,5	-8685	2,25	6177,2
1997	6316	-0,5	-3158	0,25	6702,3
1998	6909	0,5	3454,5	0,25	7227,4
1999	8103	1,5	12154,5	2,25	7752,4
2000	8420	2,5	21050	6,25	8277,5
SKUPAJ	41789,0	0,0	9188,5	17,5	41789,0

$$\alpha = \frac{\sum Y_t}{N} = \frac{41789,0}{6} = 6964,8$$

$$\beta = \frac{\sum Y_t * x_t}{\sum x_t^2} = \frac{9188,5}{17,5} = 525,1$$

Primer: Državni izdatki za raziskave in razvoj v obdobju 1995-1999 (cene 1995) (vir:SL2001, str469) - nadaljevanje

$$T_t = 6964,8 + 525,1 * x_t$$



Ocenjevanje kakovosti trenda

Kakovost trenda ocenjujemo s:

- **standardnim odklonom** vrednosti pojava od vrednosti funkcije trenda in
- **Koeficientom variacije**

Standardni odklon od funkcije trenda:

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{\sum (Y_t - T_t)^2}{N}}$$

Koeficient variacije:

$$KV_T \% = \frac{\sigma_T}{\bar{Y}} * 100$$

Manjša je vrednost gornjih parametrov ustrežnejša je:

- **oblika** in
- **interval** za določanje funkcije trenda.

Boljša je funkcija trenda.

Primer: Državni izdatki za raziskave in razvoj v obdobju 1995-1999 (cene 1995) (vir:SL2001, str469) - nadaljevanje

Leto	Izdatki (v mio sit)	T_t	$(Y_t - T_t)^2$
1995	6251	5652,2	358572,8
1996	5790	6177,2	149960,7
1997	6316	6702,3	149231,4
1998	6909	7227,4	101354,3
1999	8103	7752,4	122907
2000	8420	8277,5	20313,04
SKUPAJ	41789	41789,0	902339,3

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{\sum (Y_t - T_t)^2}{N}} = \sqrt{\frac{902339,3}{6}} = 387,8$$

$$KV_T \% = \frac{\sigma_T}{\bar{Y}} * 100 = \frac{387,9}{6965} * 100 \approx 6\%$$

Metode napovedovanja razvoja pojava

Metode:

- Enostavne metode in
- Napovedovanje s pomočjo funkcije trenda

Enostavne metode napovedovanja razvoja:

- brez sprememb,

$$Y'_{t+1} = Y_t$$

- zadnja sprememba,

$$D'_{t+1} = D_t$$
$$Y'_{t+1} = Y_t + D'_{t+1}$$

- povprečna letna razlika

$$\bar{D}_{t,M} = \frac{Y_t - Y_{t-M}}{M}$$
$$Y'_{t+1} = Y_t + \bar{D}_{t,M}$$

- povprečen verižni indeks.

$$\bar{V}_{t,M} = 100 * M \sqrt[M]{\frac{Y_t}{Y_{t-M}}}$$

$$Y'_{t+1} = \frac{Y_t * \bar{V}_{t,M}}{100}$$

Primer: Državni izdatki za raziskave in razvoj v obdobju 1995-1999 (cene 1995) (vir:SL2001, str469) – napovedovanje razvoja

Leto	Izdatki (v mio sit)	D_t	$\bar{D}_{t,3}$	$\bar{V}_{t,M}$
1995	6251	-		
1996	5790	-461		
1997	6316	526		
1998	6909	593	219,3	103,4
1999	8103	1194	771,0	111,9
2000	8420	317	701,3	110,1

Napoved razvoja brez sprememb:

$$Y'_{t+1} = Y_t = 8420$$

Napoved razvoja na osnovi zadnje spremembe:

$$Y_{t+1} = Y_t + D_{t+1} = 8420 + 317 = 8737$$

Napoved razvoja na osnovi povprečne letne razlike:

$$Y'_{t+1} = Y_t + \bar{D}_{t,M} = 8420 + 701,3 \approx 9121$$

Napoved razvoja na osnovi povprečnega verižnega indeksa.

$$Y'_{t+1} = \frac{Y_t * \bar{V}_{t,M}}{100} = \frac{8420 * 110,1}{100} \approx 9267$$

$$\bar{V}_{t,M} = 100 * M \sqrt{\frac{Y_t}{Y_{t-M}}}$$

Napovedovanje razvoja na osnovi linearnega trenda

Osnovna opredelitev računanja razvoja iz funkcije trenda:

$$Y'_{t+1} = T'_{t+1}$$

$$T = \alpha + \beta * x_t$$

$$Y'_{t+r} = \alpha + \beta * x_{t+r}$$

Metoda novejših informacij:

$$Y'_{t+r} = Y_t + r * \beta$$