STATISTIKA Srednje vrednosti

Nosilec:
Prof.dr.Srečko Devjak

Sodelavci:
Dr. Žiga Andoljšek
Janez Vogrinc

SREDNJE VREDNOSTI - POMEN

- Srednja vrednost **je predstavnik “PARAMETER”** populacije, in na ta način **omogoča primerjavo** med posameznimi populacijami

- srednja vrednost je izraz **centralne tendence**,
- srednje vrednosti **pokažejo lastnost** statistične populacije in njene porazdelitve

Srednje vrednosti delimo na:

- računane srednje vrednosti
- srednje vrednosti določene z lego

Računane srednje vrednosti

- aritmetična sredina
- geometrijska sredina
- harmonična sredina

Srednje vrednosti določene z lego

- mediana ali središčna vrednost
- modus ali gostiščna vrednost

ARITMETIČNA SREDINA

IZ POSAMIČNIH PODATKOV ali NAVADNA ARITMETIČNA SREDINA

Uporabljamo jo za izračunavanje aritmetične sredine iz posamičnih podatkov.

$$\overline{Y} = \frac{y_1 + y_2 + ... + y_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N}$$

IZ FREKVENČNE PORAZDELITVE ali TEHTENA(PONDERIRANA) ARITMETIČNA SREDINA

- Kadar so podatki v obliki frekvenčne porazdelitve.
- Kadar vrednosti pojava na delih populacije nimajo enakega vpliva (niso enako pomembne) za vrednost pojava na celotni populaciji

$$\overline{Y} = \frac{\sum_{j=1}^{k} f_j * y_j}{\sum_{j=1}^{k} f_j}$$

Primer: Telesna teža študentov .... (tehtana aritmetična sredina)

Teža	f_j	y_j	$f_j * y_j$
od 30 do pod 50			
od 50 do pod 70			
od 70 do pod 90			
Skupaj	60		

$$\overline{Y} = \frac{\sum f_j * y_j}{\sum f_j}$$

Odgovor: Ob predpostavki, da bi imeli vsi enako vrednost......

Aritmetična sredina iz aritmetičnih sredin

Tabela 16: Povprečna ocena treh predmetov

	Povprečne ocene predmetov (yj)	Število izpitov (fj)	Agregat (fj*yj)
Ppredmet 1	6,5	200	1300
Predmet 2	7,5	60	450
Predmet 3	9	35	315
		295	2065

$$\overline{Y} = \frac{\sum f_j * \overline{Y}_j}{\sum f_j} = \frac{2065}{295} = 7,0$$

Povprečni delež (struktura)

- Delež:

$$D_{ji} = \frac{Y_{ji}}{Y_{0i}}$$

$$\overline{D_j} = \frac{\sum_i Y_{ji}}{\sum_i Y_{0i}} = \frac{\sum_i Y_{0i} D_{ji}}{\sum_i Y_{0i}}$$

Primer:

Oddelek A ima 60% deklet v oddelku B je 10% deklet. Določite povprečen delež deklet, če je v A 400 študentov in v B 100 študentov.

Aritmetična sredina iz statističnih koeficientov

$$K_j = \frac{Y_j}{X_j}$$

K_j –koeficient področja j populacije

j=1,2,...,k

Povprečni koeficient na celotni populaciji:

$$\overline{K} = \frac{Y}{X} = \frac{\sum_{j=1}^{k} Y_j}{\sum_{j=1}^{k} X_j}$$

Računanje **povprečnega koeficienta** (na celotni populaciji), če so **poznani K_j in X_j**

$$\overline{K} = \frac{\sum_{j=1}^{k} Y_j}{\sum_{j=1}^{k} X_j} = \frac{\sum K_j * X_j}{\sum X_j}$$

Primer: Povprečni proračunski prihodki na prebivalca treh občin

- **Tabela 17: Proračunski prihodki na prebivalca v treh mestnih občinah za leto 2000**
- (Vir: URL: http://www.fu.uni-lj.si/sib/vhod.htm)

		Prihodki na prebivalca (v tisoč sit)	Prebivalci (v tisoč)	
j		Kj	Xj	Kj*Xj
1	VELENJE	90,7	34,1	3.090,2
2	SLOVENJ GRADEC	126,7	17,0	2.147,8
3	PTUJ	105,6	24,1	2.549,4
			75,2	7.787,4
	Povprečni prihodki na	103,6		

$$\overline{K} = \frac{\sum X_j * K_j}{\sum X_j} = \frac{7.787,4}{75,3} = 103,6$$

Odgovor: Povprečni proračunski prihodki na prebivalca za leto 2000 so v obravnavanih občinah znašali 103,6 tisoč sit.

Standardizirana povprečna relativna števila

Tabela 18: Povprečna plača po izobrazbeni strukturi v podjetjih A in B

		Povprečne plače		Struktura zaposlenih	
Izobrazba	j	$Y_{j/A}$	$Y_{j/B}$	$D_{j/A}$	$D_{j/B}$
Visoka	1	200	220	0,2	0,1
Višja	2	180	180	0,6	0,5
Srednja	3	120	100	0,4	0,4

		Povprečne plače za podjetja po upoštevanju izobrazbenih strukturah			
		Povprečje podjetje A struktura A	Povprečje podjetje A struktura B	Povprečje podjetje B struktura A	Povprečje podjetje B struktura B
Izobrazba	j	$\mathbf{Y_{A/A}}$	$Y_{A/B}$	$Y_{B/A}$	$\mathbf{Y_{B/B}}$
Visoka	1	**40**	20	44	**22**
Višja	2	**108**	90	108	**90**
Srednja	3	**24**	48	20	**40**
Povprečje		**172**	158	172	**152**

AGREGATNI INDEKSI

Agregatni ali grupni indeksi za merjenje sprememb zaradi skupnega vpliva spreminjanja večjega števila pojavov med dvema:
•razdobjema,
•krajema,
•področjema ipd.

Primerjamo agregate pojavov z različnim opredeljevanjem osnov ali baz.

Agregat vsota vrednosti spremenljivke:

$$Y = y_1+y_2+...+y_N$$

Ali pri frekvenčni porazdelitvi – ponderji ali uteži:

$$Y = \sum_{j=1}^{k} f_j * y_j$$

OPREDELITVE AGREGATNIH INDEKSOV

- Agregatni indeks količin in agregatni indeks cen – najpogosteje uporabljena
- Agregat pri obeh pomeni vrednost dobrin pri določenih cenah in količinah dobrin.
- Agregatni indeks količin primerja vrednosti agregatov pri istih cenah za različni količinah (strukturi) dobrin/med dvema primeroma.
- Agregatni indeks cen primerja vrednosti agregatov pri isti količini (strukturi) dobrin za različne cene dobrin -med dvema primeroma.
- Primeri uporabe:
- - življenski stroški in inflacija
- - storilnost ali produktivnost
- - ekonomičnost

Agregatni indeksi - OBRAZCI

Agregatni indeks cen računamo po obrazcu:

$$I_p = 100 * \frac{\sum_{i=1}^{N} p_{ji} q_i}{\sum_{i=1}^{N} p_{0i} q_i}$$

N- število upoštevanih dobrin,
I_p agregatni indeks cen
p_{ji} - cena dobrine i (i=1,2,...,N) v obdobju *j*,
p_{0i} - cena dobrine i (i=1,2,...,N) v osnovnem obdobju *,*
q_i - količina dobrine i*,*

Agregatni indeks količin računamo po obrazcu:

$$I_q = 100 * \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i q_{ji}}{\sum_{i=1}^{N} p_i q_{0i}}$$

N- število upoštevanih vrst dobrin,
I_q agregatni indeks količin
q_{ji} - količina dobrine i (i=1,2,...,N) v obdobju *j*,
q_{0i} - količina dobrine i (i=1,2,...,N) v osnovnem obdobju *,*
p_i - *cena* dobrine i*,*

Indeks rasti življenskih stroškov

Primer : Indeks rasti življenjskih stroškov					Vir: SL 2001 str278	
Življenjska potrebščina	EM	q_i	p_{i97} (v sit)	p_{i98} (v sit)	$p_{i97}*q_i$	$p_{i98}*q_i$
Kruh beli	kg	40	185	213	7400	8520
Jabolka	kg	20	132	155	2640	3100
Meso- goveje	kg	25	1010	1049	25250	26225
Jajca	kos	80	27	24	2160	1920
Skupaj					37450	39765

$$I_{p,98/97} = 100\frac{\sum_{i=1}^{N} p_{i98}q_i}{\sum_{i=1}^{N} p_{i97}q_i} = 100\frac{39765}{37450} = 106{,}2$$

Laspeyresovi in Paaschejevi agregatni indeksi cen

Pri **Laspeyresovem** agregatnem indeksu vzamemo za primerjalno osnovno obdobje.

$$L_p = 100 * \frac{\sum p_j * q_o}{\sum p_o * q_o}$$

Pri **Paaschejevem** agregatnem indeksu vzamemo za primerjalno tekoče obdobje.

$$P_p = 100 * \frac{\sum p_j * q_j}{\sum p_o * q_j}$$

Geometrijsko sredino med obema agregatnima indeksoma imenujemo **Ficherjev** idealni agregatni indeks

$$F_p = \sqrt{L_p * P_p}$$

Primer: Merjenje indeksa cen in storilnosti

- **V spodnji tabeli so podatki za ugotavljanje indeksa cen in obsega dejavnosti krojaške delavnice in čistilnice**

Tabela 5.2: Cene in obseg storitev			Vir:SL2001, str.282	
Storitve	$p_{i/97}$ (v tisoč sit)	$p_{i/98}$ (v tisoč sit)	$p_{i/97}$	$q_{i/98}$
Moške obleke	22,14	24	50	45
Čiščenje moške oblek	1,46	1,57	90	90
Šivanje krila	5,07	5,41	60	80

Storitve	pi/97*qi/97	pi/98*qi/97	pi/97*qi/98	pi/98*qi/98
Moške obleke	1107,0	1200,0	996,3	1080,0
Čiščenje moške obleke	131,4	141,3	131,4	141,3
Šivanje krila	304,2	324,6	405,6	432,8
SKUPAJ	1542,6	1665,9	1533,3	1654,1

Spreminjanje cen:

$$L_p = \frac{1665{,}9}{1542{,}6} = 107{,}99 \qquad P_p = \frac{1654{,}1}{1533{,}3} = 107{,}88$$

$$F_p = \sqrt{L_p * P_p} = \sqrt{107{,}99 * 107{,}88} = 107{,}94$$

Spreminjanje obsega dejavnosti/storilnost:

$$I_q = 100 * \frac{1533{,}3}{1542{,}6} = 99{,}4$$

HARMONIČNA SREDINA

- **Harmonična sredina H_y je recipročna vrednost povprečja iz reciprokov vrednosti y_i .**

- **UPORABA:**
  - **računanje povprečij pri asimetričnih porazdelitvah (če se reciproki porazdeljujejo simetrično)**
  - **računanje povprečij koeficientov, kadar so poleg koeficientov poznani vrednosti števcev teh koeficientov.**

RAČUNANJE HARMONIČNE SREDINE

POSAMIČNE VREDNOSTI

$$H_y = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{y_j}}$$

NAVADNA **HARMONIČNA SREDINA**

FREKVENČNA PORAZDELITEV

$$H_y = \frac{\sum_{j=1}^{k} f_j}{\sum_{j=1}^{k} \frac{f_j}{y_j}}$$

TEHTANA **HARMONIČNA SREDEINA**

HARMONIČNA SREDINA ZA STATISTIČNE KOEFICIENTE

IZHODIŠČE:

$$Kj = \frac{Yj}{Xj}$$

$$\overline{K} = \frac{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_k}{X_1 + X_2 + \ldots + X_k} = \frac{\sum_{j=1}^{k} Y_j}{\sum_{j=1}^{k} X_j}$$

Poznamo: K_j, Y_j

$$X_j = \frac{Y_j}{K_j}$$

Povprečni koeficient:

$$\overline{K} = \frac{\sum_{j=1}^{k} Y_j}{\sum_{j=1}^{k} \frac{Y_j}{K_j}}$$

Primer:

- **Tabela 17: Proračunski prihodki na prebivalca za dve mestni občini - leto 2002**
- **(Vir: URL: http://www.fu.uni-lj.si/sib/vhod.htm)**

		Prihodki na prebivalca (tisoč)	Proračunski prihodki (v 10^9 sit)	
j		Kj	Yj	Xj=Yj/Kj
1	VELENJE	90,60	3090	34,11
2	SLOVENJ GRADEC	126,70	2148	16,95
	SKUPAJ		5238	51,06

$$\overline{K} = \frac{\sum_{j=1}^{k} Y_j}{\sum_{j=1}^{k} X_j} = \frac{\sum_{j=1}^{k} Y_j}{\sum_{j=1}^{k} \frac{Y_j}{K_j}} = \frac{5238}{51,06} = 102,6$$

GEOMETRIJSKA SREDINA

- Geometrijsko sredino uporabljamo za računanje povprečja, kadar opazujemo **relativne odnose med vrednostmi spremenljiv**k.

- **Najpogosteje jo uporabljamo** pri računanju povprečij **dinamike pojava**:
- verižnih indeksih,
- koeficientih dinamike,
- stopnja rasti.

Računanje geometrijske sredine

- **Splošni obrazec:**

$$G_y = \sqrt[N]{y_1 * y_2 * .... * y_N}$$

Povprečni verižni indeks:

$$\overline{V} = \sqrt[N]{V_1 * V_2 * .... * V_N}$$

Povprečni korficient dinamike:

$$\overline{K} = \sqrt[N]{K_1 * K_2 * .... * K_N}$$

Povprečna stopnja rasti:

$$\overline{S} = \overline{V} - 100 = 100 * \overline{K} - 100$$

Geometrijska sredina -Primer

- **Primer: Povprečna stopnja rasti vrednosti bruto investicij (stalne cene) v Sloveniji za obdobje 1997-2000** (Vir.SL02,str.470)

			(Vir: SL2001, str.470)	
	Yj	Vj	Kj	
Leto	10^9 sit			Preizkus
1997	595	-	-	595,00
1998	669	112,4	1,12	656,44
1999	795	118,8	1,19	724,22
2000	799	100,5	1,01	799,00

$$\overline{K} = \sqrt[3]{1.12 * 1.19 * 1.01} = \sqrt[3]{1,3429} = 1,103$$

Vrednost bruto investicij se je v opazovanem obdobju vsako leto v povprečju povečala za 10,3 %.

SREDNJE VREDNOSTI DOLOČENE Z LEGO

- modus ali gostiščna vrednost
- mediana ali središčna vrednost

MEDIANA

- Mediana "*Me*" je srednja vrednost, ki leži na polovici statistične množice
- Mediana je drugi kvartil: in mu ustreza kvantilni rang P=0,5

$$Me = y_{0,5} = y_{0,s} + d_0 * \frac{R_{0,5} - F_{-1}}{f_0}$$

Primer:Mediana za slovenske občine manjše od 10 tisoč prebivalcev

- Tabela: Frekvenčna porazdelitev občin manjših od 10 tisoč prebivalcev (Vir: URL: http://www.fu.uni-lj.si/sib/vhod.htm)

Razred	fj	Fj
0 do pod 2000	23	23
2000 do pod 4000	48	71
4000 do pod 6000	36	107
6000 do pod 8000	20	127
8000 do pod 1000	11	138
SKUPAJ	138	

$$R_{0,5} = P * N + 0,5 = 0,5 * 138 + 0,5 = 69,5$$

$$Me = y_{0,5} = 2000 + 2000 * \frac{69,5 - 23}{48} \cong 3938$$

MODUS

- **Modus je najpogostejša vrednost v opazovani populaciji**.
- V frekvenčnih porazdelitvah najdemo njegovo vrednost v razredu **z največjo frekvenco**.
- Primer: Izpitne ocene

Modus- frekvenčna porazdelitev

- Modus iščemo v razredu z največjo frekvenco
- Vrednost modusa se pomakne proti sosednjemu razredu z večjo frekvenco
- Obrazec:

$$M_o = y_{0,s} + d * \frac{f_0 - f_{-1}}{2f_0 - f_{-1} - f_{+1}}$$

Primer: Frekvenčna porazdelitev slovenskih občin ki ne presegajo 10 tisoč prebivalcev

- **Tabela: Frekvenčna porazdelitev občin manjših od 10 tisoč prebivalcev**
- **(Vir: URL: http://www.fu.uni-lj.si/sib/vhod.htm)**

Razred	fj
0 do pod 2000	23
2000 do pod 4000	48
4000 do pod 6000	36
6000 do pod 8000	20
8000 do pod 1000	11
SKUPAJ	138

$$M_o = y_{0,s} + d * \frac{f_0 - f_{-1}}{2f_0 - f_{-1} - f_{+1}}$$

$$M_o = 2000 + 2000 * \frac{48 - 23}{2 * 48 - 23 - 36} \cong 3351$$

Primer:Aritmetična sredina za slovenske občine - manjše od 10 tisoč prebivalcev

- Tabela: Frekvenčna porazdelitev občin manjših od 10 tisoč prebivalcev (Vir: URL: http://www.fu.uni-lj.si/sib/vhod.htm)

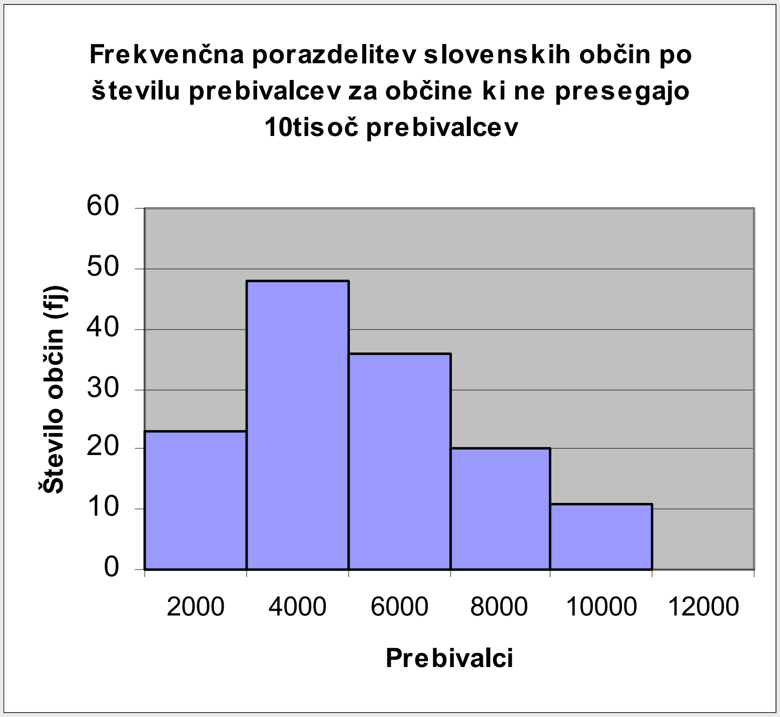
Razred	fj	yj	fj*yj
0 do pod 2000	23	1000	23000
2000 do pod 4000	48	3000	144000
4000 do pod 6000	36	5000	180000
6000 do pod 8000	20	7000	140000
8000 do pod 1000	11	9000	99000
SKUPAJ	138		586000

$$\overline{Y} = \frac{586.000}{138} \cong 4246$$

$$M_o \cong 3351$$

$$Me \cong 3938$$

Grafični prikaz



$$Mo \leq Me \leq \overline{Y}$$