

Naloga 2.1-a

Povzročitelji prometnih nesreč glede na starost:

$$n = 380$$

$$z_{\alpha} = 1,96$$

Starost let		Stevilo
Od	do pod	
14	24	117
24	34	96
34	44	81
44	54	54
54	64	32
	Skupaj	380

- a) Grafično predstavite prikazan pojav.
 b) Določite točkovno oceno za povprečno starost povzročiteljev nesreč.
 c) Pri stopnji tveganja 0,05 določite intervalno oceno povprečne starosti povzročiteljev nesreč.
 d) Ocenite pri stopnji tveganja 0,05 hipotezo, da je povprečna starost povzročiteljev nesreč manjša od 35 let.

b)

Starost let		Stevilo		
Od	do pod	y_j	f_j	$y_j \cdot f_j$
14	24	19	117	2223
24	34	29	96	2784
34	44	39	81	3159
44	54	49	54	2646
54	64	59	32	1888
			380	12700

$$\bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^j f_j \cdot y_j}{n} = 33,4$$

Točkovna ocena za povprečno starost povzročiteljev nesreč je

33,4 leta.

c)

Pri stopnji tveganja 0,05 določite intervalno oceno povprečne starosti povzročiteljev nesreč.

Starost		Stevilo		
Od	do pod	y_j	f_j	$f_j \cdot (y_j - \bar{y})^2$

14	24	19	117	24261
24	34	29	96	1859
34	44	39	81	2540
44	54	49	54	13141
54	64	59	32	20972
			380	62773

Vzorčna ocena variance

$$s_y^2 = \frac{\sum_{j=1}^J f_j \cdot (y_j - \bar{y})^2}{n-1} = 165,6$$

Ker so razredi v našem primeru enako široki, bomo upoštevali Sheppardov popravek in na ta način izboljšali vzorčno oceno variance:

$$s_{y,pop}^2 = s_y^2 - \frac{d^2}{12} = 157,3$$

Standardni odklon vzorca je:

$$s_y = \sqrt{s_{y,pop}^2} = 12,5$$

Standardna napaka vzorčenja je:

$$se(\bar{y}) = \frac{s_y}{\sqrt{n}} = 0,64$$

Potem je velikost odklona zaupanja enaka:

$$d_{\bar{y}} = z_{\alpha/2=0,005} \cdot se(\bar{y}) = 1,26$$

izračunamo tudi spodnjo in zgornjo mejo intervala zaupanja. Spodnja meja intervala zaupanja je tako enaka:

$$\bar{y} - d_{\bar{y}} = 32,1$$

$$\bar{y} + d_{\bar{y}} = 34,7$$

Intervalna ocena za povprečno starost povzročiteljev nesreč pri stopnji tveganja 0,05 je

$$32,1 < \bar{Y} < 34,7$$

Na podlagi oblikovanega vzorca ocenjujemo, da je povprečna starost povzročiteljev nesreč med

32,1 let in 34,7 let.

Sklep postavljamo pri stopnji tveganja $\alpha = 0,05$

d)

Ocenite pri stopnji tveganja 0,05 hipotezo, da je povprečna starost povzročiteljev nesreč manjša od 35 let.

$$z_{\alpha} = 1,64 \quad \bar{y} = 33,40 \quad \bar{Y}_H = 35$$

$$H_1: \bar{Y} < 35$$

$$H_0: \bar{Y} \geq 35$$

$$z = \frac{\bar{y} - \bar{Y}_H}{se(\bar{y})} = -2,50$$

$$H_1: \bar{Y} < 35$$

$$z < 0 \\ -2,5 < 0$$

in

$$|z| > |z_{\alpha}| \\ 2,50 > 1,64$$

\Rightarrow **H₁: Potrjena**

$$H_0: \bar{Y} \geq 35$$

$$z > 0 \\ -2,5 < 0$$

\Rightarrow **H₀: Zavrjena**

Naloga 2.1-b

V tabeli so podatki o številu sistemiziranih delovnih mest v nekaj UE v Sloveniji za leto 1996 (Vir: Upravna statistika 1996)

Število sistemiziranih delovnih mest v UE		Število UE
Od	do pod	fj
25	30	1
30	35	8
35	40	9
40	45	5
45	50	6
50	55	1
	Skupaj	30

Iz podatkov za vzorec :

- določite točkovno oceno za povprečno število sistemiziranih delovnih mest za UE (aritmetično sredino),
- določite intervalno (dvostransko) oceno za aritmetično sredino pri tveganju 0,05,
- ali lahko zavrremo hipotezo, da je bilo v povprečju 45 sistemiziranih delovnih mest na UE pri stopnji tveganja 0,05.

Rezultati

- 39,2
- $37,0 < \bar{Y} < 41,4$
- $z = -5,27$ $H_1: \bar{Y} = 45$ **Zavrnjena**

Naloga 2.1-c

Za 70 občin smo zbrali podatke o površini (za dne 31.12.1996) in jih uredili v frekvenčno porazdelitev (Vir: GURS, SURS, preračuni ZMAR, Delovni zvezek ZMAR):

Površina (v km ²)		Število občin
Od	do pod	fj
0	50	12
50	100	18
100	150	17
150	200	10
200	250	5
250	300	5
300	350	2
350	400	1
SKUPAJ		70

Iz podatkov za vzorec občin :

- določite točkovno oceno za povprečno površino občine,
- določite enostransko oceno za aritmetično sredino pri tveganju 0,05 in jo komentirajte,
- ali lahko zavrnemo hipotezo, da je bila povprečna velikost občine večja od 160m² pri stopnji tveganja 0,01.

Rezultati

a) 129,3

b) 145,6

c) $z = -3,08$

$H_1 : \bar{y} > 160$ **Zavrnjena**

Naloga 2.2-a

Delovna doba brezposelnih oseb je prikazana za leto 1992 v naslednji tabeli (Vir: Statistični letopis RS 1994, Str.: 202)

Delovna doba		Število
Od	do pod	v tisoč
0	2	22,2
2	3	4,5
3	5	7,7
5	10	18,9
10	20	30
20	30	19,2
Nad 30		6
Skupaj		108,5

$$z_{\alpha} = 1,96$$

- a) Grafično predstavite prikazan pojav.
 b) Določite točkovno oceno za delež brezposelnih z delovno dobo večjo od 10 let.
 c) Določite intervalno oceno za delež brezposelnih z delovno dobo večjo od 10 let pri stopnji tveganja 0,05.
 d) Ocenite pri stopnji tveganja 0,05 hipotezo, da je delež brezposelnih z delovno dobo večjo od 20 let večji od 20%.

- b)** Določite točkovno oceno za delež brezposelnih z delovno dobo večjo 10 let.

$$p = \frac{n_a}{n} = 0,51$$

Točkovna ocena za delež brezposelnih z delovno dobo večjo od 10 let je 50,9% .

c)

Določite intervalno oceno za delež brezposelnih z delovno dobo večjo 10 let pri stopnji tveganja 0,05.

Standardna napaka vzorčenja je: $se(p) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0,0015$

Potem je velikost odklona zaupanja enaka: $d_p = z_{\alpha/2=0,025} \cdot se(p) = 0,0030$

izračunamo tudi spodnjo in zgornjo mejo intervala zaupanja. Spodnja meja intervala zaupanja je tako enaka:

$$p - d_p = 0,506 \qquad p + d_p = 0,512$$

Dvostranska intervalna ocena za delež brezposelnih z delovno dobo večjo 10 let pri stopnji tveganja $\alpha = 0,05$

$$0,506 < P < 0,512$$

Na podlagi oblikovanega vzorca ocenjujemo, da je delež brezposelnih z delovno dobo večjo od 10 let med

50,7% in 51,2% .

Sklep postavljamo pri stopnji tveganja $\alpha = 0,05$.

d)

Ocenite pri stopnji tveganja 0,05 hipotezo, da je delež brezposelnih z delovno dobo večjo od 20 let večji od 20%.

$$z_{\alpha} = 1,64 \quad P_H = 0,20$$

$$\begin{aligned} H_1: & \quad P > 0,20 \\ H_0: & \quad P \leq 0,20 \end{aligned}$$

$$p = \frac{n_a}{n} = 0,232$$

$$se(p) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0,0013$$

$$z = \frac{p - P_H}{se(p)} = 25$$

$$H_1: \quad P > 0,2$$

$$\begin{aligned} z &> 0 \\ 25 &> 0 \end{aligned}$$

$$\text{in } |z| > |z_{\alpha}|$$

$$25 > 1,64$$

$\Rightarrow H_1$: Potrjena

$$H_0: \quad P \leq 0,2$$

$$\begin{aligned} z &< 0 \\ 25 &> 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow H_0$: Zavrjena

Hipotezo, da je delež brezposelnih z delovno dobo večjo od 20 let večji od 20%, smo pri stopnji tveganja 0,05 potrdili.

Naloga 2.2-b

Za 70 občin smo zbrali podatke o površini (Vir: Statistični letopis Republika Slovenija 2000)

$$z_{\alpha} = 1,96$$

Površina (v km ²)		Število občin
Od	do pod	fj
0	50	12
50	100	18
100	150	17
150	200	10
200	250	5
250	300	5
300	350	2
350	400	1
SKUPAJ		70

Za 70 občin smo zbrali podatke o površini (Vir: Statistični letopis Republika Slovenija 2000) in ugotovili da je začetek leta 2000 bila pri 55 občinah površina manjša od 200 km².

Ugotovite:

- točkovno oceno za delež občin manjših od 200 km²,
- intervalno oceno pri tveganju 0.05 za delež občin manjših od 200 km²,
- ocenite število občin, manjših od 200 km², če vemo da je bilo na ta datum v Sloveniji 193 občin.

Rezultati

- 0,81
- $0,723 < p < 0,905$
- $140 < f_{<200 \text{ m}^2} < 175$

Naloga 2.2-c

Delovna doba brezposelnih oseb je prikazana za leto 1980 v naslednji tabeli (Vir: Statistični letopis RS 1994, Str.: 202)

$$z_{\alpha} = 1,96$$

Delovna doba		Število
Od	do pod	v tisoč
0	5	4,1
5	10	1,7
10	20	1,7
20	30	0,5
nad 30		0,1
Skupaj		8,1

- Grafično predstavite prikazan pojav.
- Določite točkovno oceno za delež brezposelnih z delovno dobo manjšo ali enako 10 let.
- Določite intervalno oceno za delež brezposelnih z delovno dobo manjšo ali enako 10 let pri stopnji tveganja 0,05.
- Ocenite pri stopnji tveganja 0,05 hipotezo, da je delež brezposelnih z delovno dobo večjo od 20 let večji od 10%.

Rezultati

- b) 0,72
 c) 0,706 < p < 0,726
 d) z = -8,91 $H_1: P > 0,1$ Zavrnjena

Naloga 2.2-d

V letu 2001 je bilo na vzorcu 50 občin 32 takih ki so imele investicijske odhodke nižje od 1000 Mio SIT (Vir: Proračunski kazalci občin« www.vus-uni/sib/vhod.html).

- a) Določite točkovno oceno za delež občin, ki je imel investicijske odhodke nižje od 1000 Mio SIT.
b) Določite intervalno oceno za delež občin, ki je imel investicijske odhodke nižje od 1000 Mio SIT pri stopnji tveganja 0,05.

Rezultati

- a) 0,64
b) $0,507 < P < 0,773$

Naloga 2.2-e

V letu 2001 je bilo na vzorcu 50 občin 18 takih ki so imele investicijske odhodke nižje od 1000 Mio SIT (Vir: Proračunski kazalci občin« www.vus-uni/sib/vhod.html).

- a) Določite točkovno oceno za delež občin, ki je imel investicijske odhodke nižje od 1000 Mio SIT.
b) Določite intervalno oceno za delež občin, ki je imel investicijske odhodke nižje od 1000 Mio SIT pri stopnji tveganja 0,05.

Rezultati

- a) 0,36
b) $0,227 < P < 0,493$

Naloga 2.3-a

Imamo vzorčne podatke o številu prebivalcev v občinah.

Število prebivalcev		Vzorec
Od	do pod	f _j
0	10000	55
10000	20000	20
20000	30000	2
30000	40000	1
40000	50000	2
Skupaj		80

Iz podatkov za vzorec :

- S točkovno oceno opredelite povprečno število prebivalcev v občini.
- Pri stopnji tveganja 0,05 določite intervalno oceno za povprečno število prebivalcev.
- S točkovno oceno opredelite število prebivalcev za preučevano obdobje (192 občin).
- Določite za število prebivalcev v Sloveniji za preučevano obdobje (192 občin) intervalno oceno pri stopnji tveganja 0,05.
- Pri stopnji tveganja 0,05 ocenite hipotezo, da je število prebivalcev enako 2.126.000.

a)

v 1000

Število prebivalcev		Vzorec		
Od	do pod	y _j	f _j	y _j * f _j
0	10000	5	55	275
10000	20000	15	20	300
20000	30000	25	2	50
30000	40000	35	1	35
40000	50000	45	2	90
Skupaj			80	750

$$\bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^J f_j \cdot y_j}{n} = 9,38$$

Točkovna ocena za število prebivalcev v občini je 9375.

b)

Pri stopnji tveganja 0,05 določite intervalno oceno za povprečno število prebivalcev.

Število prebivalcev v t _i	Vzorec
--------------------------------------	--------

Od	do pod	y_j	f_j	$f_j \cdot (y_j - \bar{y})^2$
0	10	5	55	1.053
10	20	15	20	633
20	30	25	2	488
30	40	35	1	657
40	50	45	2	2.538
			80	5.369

Vzorčna ocena variance

$$s_y^2 = \frac{\sum_{j=1}^J f_j \cdot (y_j - \bar{y})^2}{n-1} = 67,96$$

Ker so razredi v našem primeru enalo široki, bomo upoštevali Sheppardov popravek in na ta način izboljšali vzorčno oceno variance:

$$s_{y,pop}^2 = s_y^2 - \frac{d^2}{12} = 59,63$$

Standardni odklon vzorca je:

$$s_y = \sqrt{s_{y,pop}^2} = 7,72$$

Standardna napaka vzorčenja je:

$$se(\bar{y}) = \frac{s_y}{\sqrt{n}} = 0,86$$

$$z_{\alpha} = 1,96$$

Potem je velikost odklona zaupanja enaka: $d_{\bar{y}} = z_{\alpha/2=0,025} \cdot se(\bar{y}) = 1,69$

Na podlagi izračunane velikosti odklona zaupanja lahko izračunamo tudi spodnjo in zgornjo mejo intervala zaupanja. Spodnja meja intervala zaupanja je tako enaka:

$$\bar{Y} - d_{\bar{y}} = 7,69$$

$$\bar{Y} + d_{\bar{y}} = 11,07$$

Na podlagi oblikovanega vzorca ocenjujemo, da je povprečno število prebivalcev v občinah med 7690 in 11070.

Sklep postavljamo pri stopnji tveganja $\alpha = 0,05$.

- c)** S točkovno oceno opredelite število prebivalcev za preučevano obdobje (192 občin).

$$N = 192$$

$$N\bar{y} = \frac{N \cdot \sum_{j=1}^J f_j \cdot y_j}{n} = 1800$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^J f_j \cdot y_j}{n} = 9,38$$

- d)** Določite za število prebivalcev v Sloveniji za preučevano obdobje (192 občin) intervalno oceno pri stopnji tveganja 0,05.

Vzorčna ocena variance

$$s_y^2 = \frac{\sum_{j=1}^J f_j \cdot (y_j - \bar{y})^2}{n-1} = 67,96$$

Ker so razredi v našem primeru enalo široki, bomo upoštevali Sheppardov popravek in na ta način izboljšali vzorčno oceno variance:

$$s_{y,pop}^2 = s_y^2 - \frac{d^2}{12} = 59,63$$

Standardni odklon vzorca je:

$$s_y = \sqrt{s_{y,pop}^2} = 7,72$$

Standardna napaka vzorčenja je:

$$se(\bar{Y}) = N \frac{s_y}{\sqrt{n}} = 165,72$$

$$z_{\alpha} = 1,96$$

Potem je velikost odklona zaupanja enaka: $d_{\bar{Y}} = z_{\alpha/2=0,025} \cdot se(\bar{Y}) = 324,8$

Na podlagi izračunane velikosti odklona zaupanja lahko izračunamo tudi spodnjo in zgornjo mejo intervala zaupanja. Spodnja meja intervala zaupanja je tako enaka:

$$\bar{Y} - d_{\bar{Y}} = 1475,2$$

$$\bar{Y} + d_{\bar{Y}} = 2124,8$$

Na podlagi oblikovanega vzorca ocenjujemo, da je število prebivalcev v vseh občinah skupaj med

1.475.190 in 2.124.810

Sklep postavljamo pri stopnji tveganja $\alpha = 0,05$.

e) Pri stopnji tveganja 0,05 ocenite hipotezo, da je število prebivalcev enako 2.126.000.

$$z_{\alpha} = 1,96 \quad \overset{\leftrightarrow}{y} = 1800000 \quad \overset{\leftrightarrow}{Y}_H = 2126000 \quad se(\overset{\leftrightarrow}{y}) = 165720$$

$$H_1: \quad \overset{\leftrightarrow}{Y} = 2126000$$

$$H_0: \quad \overset{\leftrightarrow}{Y} <> 2126000$$

$$z = \frac{\overset{\leftrightarrow}{y} - \overset{\leftrightarrow}{Y}_H}{se(\overset{\leftrightarrow}{y})} = -1,97$$

$$H_1: \quad \overset{\leftrightarrow}{Y} = 2126000$$

$$|z| \leq |z_{\alpha}|$$

$$1,97 > 1,96$$

$$\Rightarrow$$

H₁ : Zavrjnena

$$H_0: \quad \overset{\leftrightarrow}{Y} <> 2126000$$

$$|z| > |z_{\alpha}|$$

$$1,97 > 1,96$$

$$\Rightarrow$$

H₀ : Potrjena

Naloga 2.3-b

V zavodu A smo zbrali vzorec 110 uslužbencev in podatke o njihovih mesečnih plačah uredili v frekvenčno porazdelitev.

Neto plača (v tisoč DE)		Število zaposlenih
Od	do pod	fj
50	100	15
100	150	20
150	200	35
200	250	30
250	300	10
Skupaj		110

- Določite točkovno oceno za povprečno mesečno plačo.
- Določite točkovno oceno za delež zaposlenih, ki ima mesečno plačo nižjo od 150 tisoč.
- Ocenite potrebna finančna sredstva za izplačilo mesečnih plač 180 zaposlenim.
- Ali lahko zavrnemo hipotezo, da je povprečna plača višja od 200 tisoč DE, pri stopnji tveganja 0,05?

Rezultati

- 175
 - 0,32
 - 29588
 - $z = -4,63$
- $\bar{Y} < 33413$
 $H_1: \bar{Y} > 200$ **Zavrnjena**

Naloga 2.4-a

V zavodu A smo zbrali vzorec 100 uslužbencev, v zavodu B pa vzorec 160 uslužbencev. Plače uslužbencev v obeh zavodih smo uredili v frekvenčno porazdelitev. Frekvenčni porazdelitvi sta navedeni v tabeli

$$z_{\alpha} = 1,96$$

		Zavod A	Zavod B
Vrednost plače (tisoč.sit)		Število uslužbencev	
Od	do pod	f _j	f _j
50	100	15	10
100	150	20	15
150	200	25	60
200	250	30	65
250	300	10	10
SKUPAJ		100	160

- Določite točkovno oceno za razliko povprečnih plač v obeh zavodih.
- Določite intervalno oceno za razliko med povprečnimi plačami v obeh zavodih pri stopnji tveganja 0,05.
- Pri stopnji tveganja 0,05 ocenite hipotezo, da so povprečne plače v obeh zavodih enake.

a)

Določite točkovno oceno za razliko povprečnih plač v obeh zavodih.

Vrednost plače (tisoč.sit)		Število uslužbencev	Zavod A		Zavod B	
Od	do pod	y _j	f _j	y _j * f _j	f _j	y _j * f _j
50	100	75	15	1125	10	750
100	150	125	20	2500	15	1875
150	200	175	25	4375	60	10500
200	250	225	30	6750	65	14625
250	300	275	10	2750	10	2750
SKUPAJ			100	17500	160	30500

$$\bar{y}_A = \frac{\sum_{j=1}^J f_j \cdot y_j}{n} = 175,0$$

$$\bar{y}_B = \frac{\sum_{j=1}^J f_j \cdot y_j}{n} = 190,6$$

Točkovna ocena za razliko povprečnih plač v obeh zavodih je

15,6 .

b)

Določite intervalno oceno za razliko med povprečnimi plačami v obeh zavodih pri stopnji tveganja 0,05.

Vrednost plače (tisoč.sit)		Število uslužben	Zavod A		Zavod B	
Od	do pod	Y_j	f_j	$f_j \cdot (y_j - \bar{y})^2$	f_j	$f_j \cdot (y_j - \bar{y})^2$
50	100	75	15	150000	10	133634
100	150	125	20	50000	15	64550
150	200	175	25	0	60	14602
200	250	225	30	75000	65	76918
250	300	275	10	100000	10	71234
			100	375000	160	360938

Vzorčna ocena variance

$$s_{yA}^2 = \frac{\sum_{j=1}^J f_j \cdot (y_j - \bar{y})^2}{n-1} = 3788$$

$$s_{yA,pop}^2 = s_{yA}^2 - \frac{d^2}{12} = 3580$$

$$s_{yB}^2 = \frac{\sum_{j=1}^J f_j \cdot (y_j - \bar{y})^2}{n-1} = 2270$$

$$s_{yB,pop}^2 = s_{yB}^2 - \frac{d^2}{12} = 2062$$

Standardna napaka vzorčenja je:

$$se(\bar{y}_B - \bar{y}_A) = \sqrt{\frac{s_B^2}{n_B} + \frac{s_A^2}{n_A}} = 7,0$$

Potem je velikost odklona zaupanja enaka: $d_{\bar{y}_B - \bar{y}_A} = z_{\alpha/2=0,025} \cdot se(\bar{y}_B - \bar{y}_A) = 13,7$

Na podlagi izračunane velikosti odklona zaupanja lahko izračunamo meji intervala zaupanja:

$$\bar{y}_B - \bar{y}_A - d_{\bar{y}_B - \bar{y}_A} = 1,9$$

$$\bar{y}_B - \bar{y}_A + d_{\bar{y}_B - \bar{y}_A} = 29,3$$

Dvostranska intervalna ocena za razliko povprečnih plač v obeh zavodih pri stopnji tveganja 0,05 je

$$1,9 \quad \bar{Y}_B - \bar{Y}_A \quad 29,3$$

Intervalna ocena za razliko med povprečnimi plačami v obeh zavodih pri stopnji tveganja 0,05 je med

$$1,90 \quad \text{in} \quad 29,3 \quad \text{tisoč SIT.}$$

c)

Pri stopnji tveganja 0,05 ocenite hipotezo, da so povprečne plače v obeh zavodih enake.

$$z_{\alpha} = 1,96$$

$$se(\bar{y}_B - \bar{y}_A) = 7,0$$

$$H: \quad \bar{Y}_B = \bar{Y}_A$$

$$H_1: \quad \bar{Y}_B - \bar{Y}_A = 0$$

$$H_0: \quad \bar{Y}_B - \bar{Y}_A <> 0$$

$$z = \frac{(\bar{y}_B - \bar{y}_A) - 0}{se(\bar{y}_B - \bar{y}_A)} = 2,23$$

$$H_1: \bar{Y}_B - \bar{Y}_A = 0 \quad |z| \leq |z_\alpha| \Rightarrow H_1: \text{Zavrjnena}$$

2,23 > 1,96

$$H_0: \bar{Y}_B - \bar{Y}_A \neq 0 \quad |z| > |z_\alpha| \Rightarrow H_0: \text{Potrjena}$$

2,23 > 1,96

Hipoteza, da so povprečne plače v obeh zavodih enake, je pri stopnji tveganja 0,05 neresnična.