

## Poglavje 4

# ELEKTRIČNI IN MAGNETNI POJAVI

### 4.1 Električno polje in tok

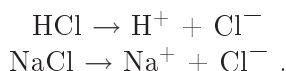
#### 4.1.1 Električni naboj

Električne pojave lahko razložimo na osnovi ugotovitve, da imajo osnovni delci, kot sta proton in elektron (pogl. 5.2), posebno lastnost – *električni naboj* (tabela 4.1). Enota za naboj je ampersekunda (As). Naboj je pozitiven ali negativen. Proton ima n. pr. naboj  $e_0 = 1,6 \cdot 10^{-19}$  As, elektron pa prav tolikšen negativen naboj. Naboj nekega telesa je odvisen od tega, kolikšen je v njem presežek pozitivnih ali negativnih osnovnih delcev. Atomi so električno nevtralni. V vsakem atomu sta namreč števili protonov in elektronov enaki, nevtroni, ki so tudi sestavni del atomov, pa nimajo naboja. Če atomu odvzamemo elektron, dobimo pozitivni ion (kation, n. pr.  $\text{Na}^+$ ) z nabojem  $e_0$ , če pa atomu elektron dodamo, dobimo negativen ion (anion, n. pr.  $\text{Cl}^-$ ) z nabojem  $-e_0$ . Če atomu odvzamemo dva elektrona, dobimo kation z nabojem  $2e_0$  (n. pr.  $\text{Ca}^{2+}$ ). Ioni so eden od sestavnih delov živih organizmov. Posebno ioni  $\text{Na}^+$ ,  $\text{K}^+$ ,  $\text{Ca}^{2+}$ ,  $\text{Mg}^{2+}$  in  $\text{Cl}^-$  igrajo pomembno vlogo pri fizioloških oziroma biokemijskih procesih. Ljudje lahko ione razločimo po okusu. Kationi imajo okus svežine, anioni pa imajo trpek okus.

Tabela 4.1: Vrednosti nabojev v naravi.

pojav	$e$ [As]
naboj elektrona	$-1,6 \cdot 10^{-19}$
naboj na majhnem kondenzatorju	$1 \cdot 10^{-7}$
naboj, ki steče pri povprečnem blisku	1–100
naboj, shranjen v avtomobilskem akumulatorju	$2 \cdot 10^5$
naboj na površini Zemlje	$1 \cdot 10^6$
naboj, ki priteče iz povprečne elektrarne v enem letu	$3 \cdot 10^{11}$

Vse telesne tekočine so *ionske raztopine*. Ionske raztopine nastanejo zaradi disociacije nekaterih molekul, raztopljenih v vodi, na ione. Solna kislina in kuhinjska sol n. pr. v vodi popolnoma razpadeta na ione



Stopnja disociacije, ki jo definiramo kot delež ioniziranih molekul

$$\alpha = \frac{[\text{Na}^+]}{[\text{NaCl}] + [\text{Na}^+]} \quad (4.1)$$

je v navedenih primerih 1. Voda poleg tega, da disociira topljenje, disociira tudi samo sebe:



Stopnja disociacije pa je pri vodi izredno majhna. Koncentracija vodikovih ionov v vodi je  $10^{-7}$  mol/l, zato je

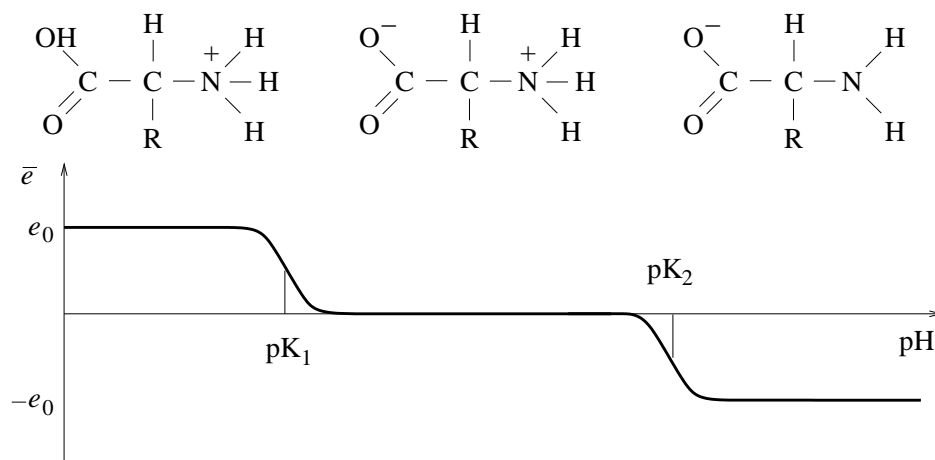
$$\alpha = \frac{10^{-7} \text{ mol/l}}{(1000 \text{ kg/m}^3)/(18 \text{ g/mol}) + 10^{-7} \text{ mol/l}} = 1,8 \cdot 10^{-9} . \quad (4.2)$$

Namesto koncentracije  $[\text{H}^+]$  običajno podamo vrednost pH

$$\text{pH} = -\log\{[\text{H}^+]\ell/\text{mol}\} . \quad (4.3)$$

Čim večja je koncentracija vodikovih ionov, tem manjša je vrednost pH.

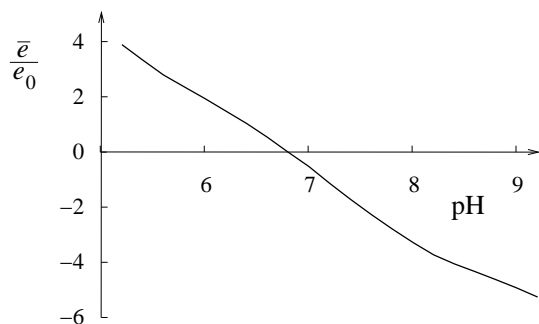
Naboji, ki jih imajo molekule in makromolekule v bioloških vodnih raztopinah, so večinoma posledica disociacije ali asociacije vodikovega iona. Zato je naboj teh molekul odvisen od koncentracije vodikovih ionov. Odvisnost povprečnega naboja neke aminokislinske nevtralnne ostankom (n. pr. valina) od pH je prikazana na sliki 4.1. Pozitivna aminoskupina ( $-\text{NH}_3^+$ ) je nabita pri  $\text{pH} < \sim \text{pK}_2$ , negativna karboksilna skupina ( $-\text{COO}^-$ ) pa pri  $\text{pH} > \sim \text{pK}_1$ . Pri  $\text{pH} < \sim \text{pK}_1$  ima molekula naboj  $e_0$ , v območju med  $\text{pK}_1$  in  $\text{pK}_2$  je nevtralna (»zwitterion«), nad  $\text{pH} \approx \text{pK}_2$  pa ima naboj  $-e_0$  (sl. 4.1).



Slika 4.1: Odvisnost povprečnega naboja aminokislinske nevtralnne ostankom R od pH. Prikazane so tudi ionske strukture aminokislinske nevtralnne ostankom R pri majhnih, srednjih in velikih vrednostih pH.

Poliptidi, to je polimeri aminokislinske nevtralnne ostankom R, imajo predvsem na svoji površini veliko molekulskih skupin, ki lahko vežejo ali oddajo vodikov ion, in so zato v splošnem nabite molekule. Naboj je odvisen od pH. Na sliki 4.2 je prikazana odvisnost naboja molekule dezoksihemoglobina od pH. Pri manjših vrednostih pH prevladujejo pozitivne skupine ( $-\text{NH}_3^+$ , histidin<sup>+</sup>), pri večjih pH, ko te skupine oddajo vodikov ion in postanejo nevtralne, pa prevladujejo negativne hidroksilne skupine in je molekula negativno nabita. Vrednost pH, pri kateri je povprečna vrednost naboja molekule enaka nič, se imenuje *izoelektrična točka*.

Dezoksinukleinske kisline so pri nevtralni vrednosti pH poliioni zaradi nabitih fosfatnih skupin. Tudi biološke membrane imajo naboj. Običajno so pri fizioloških vrednostih pH nabite negativno. Nabiti so membranski proteini, polisaharidi in fosfolipidi. Primer nabitega fosfolipida, ki je pomembna sestavina bioloških membran, je fosfatidilserin. Glava fosfatidilserina ima pri  $\text{pH} \approx 7$  dva negativna naboja in enega pozitivnega in ima zato naboj  $-e_0$ . Na vsaki površini dvojne lipidne plasti, sestavljene iz molekul fosfatidilserina, lahko rečemo, da imamo naboj s ploskovno gostoto



Slika 4.2: Povprečni naboj molekule dezoksihemoglobina ( $\bar{e}$ ) v odvisnosti od pH.

naboja

$$\sigma_e = -\frac{e_0}{a_0} = -\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{As}}{0,7 \cdot 10^{-18} \text{m}^2} = -0,23 \text{As/m}^2, \quad (4.4)$$

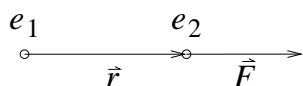
pri čemer je  $a_0 = 0,7 \text{ nm}^2$  površina membrane, ki pripada eni molekuli fosfatidilserina.

### 4.1.2 Coulombov zakon

Pojavi, ki jih obravnavamo pri elektriki, so posledica sil, ki delujejo med telesi zaradi njihovega naboja. Sila med nabojema  $e_1$  in  $e_2$  (Coulombova sila), ki sta med seboj oddaljena za  $r$ , je sorazmerna vrednostima nabojev in obratno sorazmerna kvadratu oddaljenosti ter ima smer premice skozi središči obeh nabitih teles (sl. 4.3). Če je  $\vec{r}$  vektor, ki kaže od prvega do drugega naboja, silo na drugi naboj zaradi prvega naboja zapišemo z izrazom:

$$\vec{F} = \frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (4.5)$$

kjer je  $\vec{r}/r$  enotski vektor, ki kaže v smer proti drugemu naboju. Tako imenovana influenčna konstanta  $\epsilon_0$  ( $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$ ) se pojavi v izrazu za Coulombovo silo (en. 4.5) zato, ker merimo naboj v enoti As, silo pa v N. Velja namreč, da je  $1 \text{ N} = 1 \text{ VAs/m}$ , kjer je 1 V (volt) enota za napetost, ki jo bomo definirali kasneje.



Slika 4.3: Zaradi naboja  $e_1$  deluje na naboj  $e_2$  sila  $\vec{F}$ .

Naboja z enakim predznakom se odbijata, naboja z različnima predznakoma pa privlačita. Sile med nabitimi delci so aditivne. Denimo, da se nahajajo v prostoru trije naboji. To, da deluje Coulombova sila med nabojema 1 in 2, ne vpliva na velikost in smer Coulombove sile med nabojema 1 in 3 ter 2 in 3.

### 4.1.3 Električno polje in električna poljska jakost

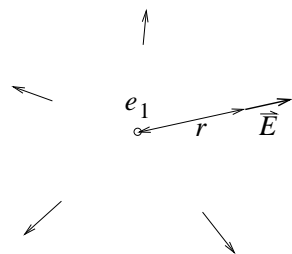
Sila med naboji deluje na daljavo. To pomeni, da sila med nabojema, ki sta oddaljena drug od drugega za razdaljo  $r$ , deluje tudi, če se nahajata v popolnoma praznem prostoru. Delovanje take sile lahko opišemo tudi tako, da uvedemo pojem *električnega polja*. Obstoj polja pomeni, da je zaradi prisotnosti določenega naboja stanje prostora v njegovi okolici drugačno, kot če ga ne bi bilo. Električno polje opišemo z vektorjem *električne poljske jakosti* ( $\vec{E}$ ) (sl. 4.4).

Električna poljska jakost je definirana tako, da da pravo vrednost sile, če se sedaj na oddaljenosti  $r$  od naboja  $e_1$  pojavi naboj  $e_2$ :

$$\vec{F} = \vec{E}_1 e_2, \quad (4.6)$$

tako da imamo z upoštevanjem enačb 4.5 in 4.6 za električno poljsko jakost zaradi naboja  $e$  izraz

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (4.7)$$



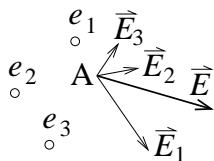
Slika 4.4: Električna poljska jakost kaže stran od pozitivno nabitega delca z nabojem  $e_1$ .

Tabela 4.2: Tipične vrednosti električnih poljskih jakosti.

pojav	$E$ [V/m]
amplituda elektromagnetnega valovanja pri kozmičnem sevanju žarkov $\gamma$	$1 \cdot 10^{-5}$
100 W UKW oddajnik na razdalji 100 km	$5 \cdot 10^{-4}$
električno polje v zemeljski atmosferi	$1 - 3 \cdot 10^2$
električno polje v zemeljski atmosferi tik pred bliskom	$1 - 3 \cdot 10^6$
električno polje preko biološke membrane	$1 \cdot 10^7$
amplituda elektromagnetnega valovanja v močnem laserskem curku	$1 \cdot 10^{14}$

Vrednosti električnega polja pri nekaterih pojavih prikazuje tabela 4.2.

Uvedba električne poljske jakosti ima tudi praktičen pomen. Če je prisotnih veliko nabojev, električno polje na nekem mestu meri rezultanto vseh sil, ki bi delovale zaradi prisotnih nabojev na naboj, postavljen na to mesto. Ker so sile med nabitimi delci aditivne (pogl. 4.1.2), je tudi električna poljska jakost aditivna količina in je enaka vektorski vsoti električnih poljskih jakosti vseh nabojev. Primer seštevanja električnih poljskih jakosti, ko imamo tri naboje, je prikazan na sliki 4.5.



Slika 4.5: Na izbranem mestu (točka A) je električna poljska jakost enaka vsoti električnih poljskih jakosti zaradi nabojev  $e_1$ ,  $e_2$  in  $e_3$  ( $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$ ).

#### 4.1.4 Električni potencial in napetost

Ker je Coulombova sila konzervativna sila (pogl. 2.1.2), lahko električni poljski jakosti priredimo potencial ( $\varphi$ ), tako da je električna poljska jakost gradient tega potenciala\*

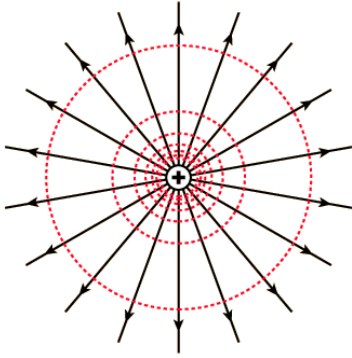
$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (4.8)$$

Kot bomo videli kasneje, je, tako kot je električna poljska jakost povezana s silo, električni potencial povezam z električno potencialno energijo. Ker v primeru krogelne simetrije lahko nadomestimo operacijo »grad« z odvajanjem po  $r$ , je v tem primeru potencial na oddaljenosti  $r$  od naboja  $e$  enak (dodatek, str. 260)

$$\varphi(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (4.9)$$

V prostoru, v katerem se nahajajo naboji, povežemo točke z enako vrednostjo električnega potenciala v ploskve. To so ekvipotencialne ploskve. Električna poljska jakost v neki točki ekvipotencialne ploskve je vedno pravokotna na to ploskev. Električno polje točkastega naboja je krogelno simetrično, zato v tem primeru ekvipotencialne ploskve opisujejo površine krogel (sl. 4.6).

\*Operacija »grad« označuje isto kot operator  $\nabla$  (dodatek, str. 260).



Slika 4.6: Silnice in ekvipotencialne ploskve (črtkano) v okolici pozitivnega naboja.

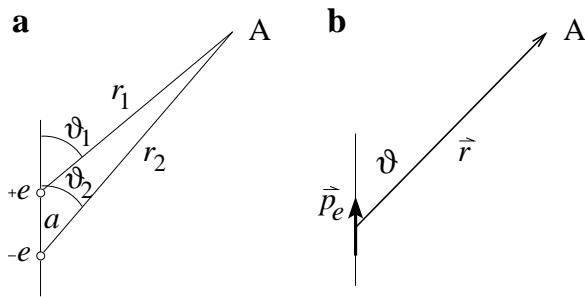
Razliko med dvema potencialoma imenujemo električna napetost. Dobimo je z integracijo enačbe 4.8

$$U = \varphi_2 - \varphi_1 = - \int \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (4.10)$$

Napetost merimo v voltih [V].

S pomočjo pojmov električne poljske jakosti in električnega potenciala bomo sedaj obravnavali električno polje v okolici električnega dipola, v naslednjem poglavju pa s pomočjo Gaussovega izreka še električno polje neskončno velike enakomerno nabite ploskve.

### Električni dipol



Slika 4.7: Električni dipol, njegova velikost ( $p_e = ea$ ) in smer ter parametra  $r$  in  $\vartheta$ , ki določata položaj točke A. Velikost in smer električnega polja sta odvisna od položaja točke A. (a) Skica za izračun električnega potenciala. (b) Prikaz točkastega dipola.

O električnem dipolu govorimo, kadar se nahajata pozitiven (+e) in negativen (-e) električni naboj iste velikosti na določeni razdalji ( $a$ ) (sl. 4.7a). Potencial električnega dipola dobimo tako, da seštejemo potenciala posameznih nabojev (+e in -e)

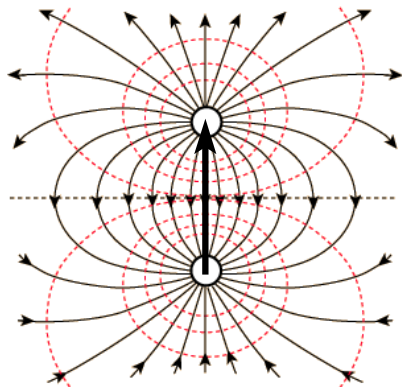
$$\varphi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \approx \frac{ea \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p_e \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (4.11)$$

kjer smo upoštevali, da pri velikih razdaljah v primerjavi z  $a$  ( $r_1, r_2 \gg a$ ) veljajo približki  $\vartheta_1 \approx \vartheta_2 \approx \vartheta$ ,  $r_2 - r_1 = a \cos \vartheta$  in  $r_1 \approx r_2 \approx r$ . Velikost dipola je enaka produktu naboja in medsebojne razdalje ( $p_e = ea$ ), njegovo smer pa določa veznica med nabojema od negativnega proti pozitivnemu (sl. 4.7). Potencial dipola pada s kvadratom oddaljenosti. Električni potencial dipola je sorazmeren skalarnemu produktu (str. 261) dipola  $\vec{p}_e$  in enotskega vektorja  $\vec{r}/r$  (sl. 4.7b). Zaradi njegove odvisnosti od kosinusa vmesnega kota med vektorjema  $\vec{p}_e$  in  $\vec{r}$  je potencial največji v smeri dipola, v simetrijski ravnini dipola pa ima vrednost nič.

Električno poljsko jakost v smeri koordinat  $x$  in  $z$  ( $E_x$  in  $E_z$ ) izračunamo po enačbi 4.8. Silnice, ki ponazarjajo potek električne poljske jakosti, so prikazane na sliki 4.8.

#### 4.1.5 Pretok električnega polja in Gaussov izrek

*Električni pretok* preko neke površine definiramo kot površinski integral jakosti električnega polja po izbrani površini in ga merimo v [Vm]. Pretok električnega polja je definiran popolnoma analogno



Slika 4.8: Silnice električnega polja, ki ponazarjajo potek električne poljske jakosti v okolici dipola. Gostota silnic je večja, kjer je električna poljska jakost večja. Črtkane črte prikazujejo potek ekvipotencialnih ploskev.

s pretokom snovi, ki smo ga vpeljeli v poglavju o mehaniki zveznih snovi. Definiramo ga torej podobno kot pretok vsake fizikalne količine (pogl. 2.3.3, sl. 2.38), in sicer kot

$$\Phi_E = \int_S (\vec{E} \cdot \vec{n}) dS. \quad (4.12)$$

Tu je  $dS$  diferencialni element površine in  $\vec{n}$  normala na površino.

Izračunajmo najprej pretok električnega polja po krogelni lupini, ki zaobjema točkast naboj v njenem središču. Če enačbo 4.12 integriramo po površini, v središču katere je točkast naboj  $e_1$ , kar naredimo tako, da velikost električne poljske jakosti na razdalji  $r$  (en. 4.7) pomnožimo s  $4\pi r^2$ , dobimo kar

$$\Phi_E = \frac{e_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{e_1}{\epsilon_0}. \quad (4.13)$$

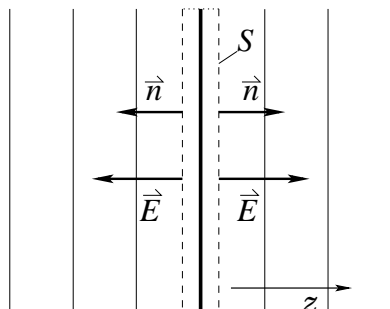
Rezultat bi bil isti, če bi bil naboj nekje drugje in ne ravno v središču krogle. Če naredimo podoben račun še za veliko nabojev, ugotovimo, da je pretok polja po poljubni zaključeni površini v prostoru enak vsoti vseh nabojev, ki se nahajajo znotraj te zaključene površine. Izvor električnega polja so ali diskretni naboji ali zvezno porazdeljen naboj. Če je naboj porazdeljen zvezno, podobno kot snov pri zveznih snoveh, potem lahko njegovo porazdelitev opišemo z gostoto naboja ( $\rho_e$ ), ki ima enoto  $1 \text{ A/m}^3$ . Takrat se Gaussov izrek glasi

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_e dV. \quad (4.14)$$

Gaussov izrek je splošna oblika povezave med izvori električnega polja in električno poljsko jakostjo.

### Električno polje v okolici nabite plošče

Kot primer uporabe Gaussovega izreka izračunajmo električno poljsko jakost v prostoru, če se vsi naboji nahajajo enakomerno porazdeljeni na neskončni ravnini (n. pr. na tanki kovinski plošči). Podatek, ki ga potrebujemo pri tem izračunu, je ploskovna gostota naboja  $\sigma_e$  z enoto  $1 \text{ As/m}^2$ . Računamo električno poljsko jakost, pri čemer je koordinata  $z$  pravokotna na smer plošče (sl. 4.9).



Slika 4.9: Električna poljska jakost ( $\vec{E}$ ) kaže stran od pozitivno nabite plošče. Smer normale na ploskev ( $\vec{n}$ ) se ujema s smerjo električne poljske jakosti. S tankimi črtami so prikazane ekvipotencialne ploskve. Črtkane črte označujejo površino  $S$ , po kateri se izračuna pretok električnega polja.

Zaradi simetrije ima električno polje zgolj komponento  $z$ . Zanjho dobimo iz Gaussovega izreka

$$\int_S (\vec{E} \cdot \vec{n}) dS = 2E_z S_p = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho_e dV = \frac{\sigma_e S_p}{\varepsilon_0}, \quad (4.15)$$

kjer je  $S_p$  površina plošče. Potemtakem je

$$E_z = \frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0} \quad (4.16)$$

desno od ploskve in

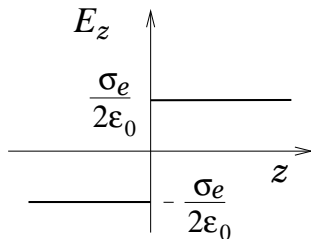
$$E_z = -\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0} \quad (4.17)$$

levo od ploskve. Izjemno preprost rezultat. Električno polje neskončno velike plošče se ne spreminja z oddaljenostjo od nje in je sorazmerno površinski gostoti naboja na njej. Če je površinska gostota naboja pozitivna, električna poljska jakost kaže stran od pozitivno nabite plošče (sl. 4.10). Ekvipotencialne ploskve neskončne nabite ploskve so vzporedne ravnini te ploskve, saj je električno polje homogeno.

Glede na definicijo električnega potenciala (en. 4.8) je tudi jasno, da je v tem primeru

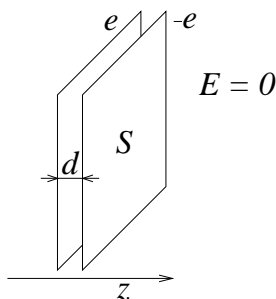
$$E_z = -\frac{d\varphi}{dz}, \quad (4.18)$$

in da je torej potencial linearna funkcija koordinate  $z$  povsod tam, kjer polje obstaja. Študent/ka naj izračuna, kakšna je oblika tega potenciala.



Slika 4.10: Električna poljska jakost v smeri koordinate  $z$  se ne spreminja z oddaljenostjo od neskončne nabite plošče, pač pa se ji spremeni smer na nasprotni strani.

### Ploščati kondenzator

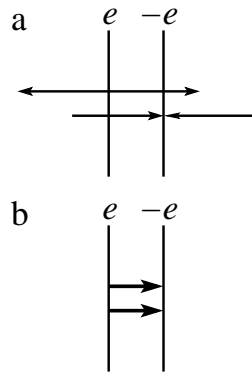


Slika 4.11: Ploščati kondenzator. Električna poljska jakost zunaj ploščatega kondenzatorja je enaka nič.

Ploščati kondenzator sta dve ravni kovinski plošči s površino  $S$ , oddaljeni druga od druge za  $d$ , na katerih imamo enaka naboja, na eni plošči pozitivnega ( $e$ ), na drugi pa negativnega ( $-e$ ) (sl. 4.11). Električni polji zaradi naboja na obeh ploščah se v prostoru med ploščama seštejeta in dobimo

$$E = \frac{e}{\varepsilon_0 S}, \quad (4.19)$$

v prostoru izven plošč pa je skupna električna poljska jakost enaka nič (sl. 4.12). Opozorimo naj, da smemo uporabljati izraz, dobljen za naboj, porazdeljen na neskončno veliki ravni plošči, za izračun električne poljske jakosti v kondenzatorju s končno velikima ploščama le v primeru, če je



Slika 4.12: Puščice prikazujejo seštevanje električnih poljskih jakosti pri kondenzatorju. (a) Električni poljski jakosti posameznih plošč. (b) Skupna električna poljska jakost.

razdalja med ploščama ( $d$ ) veliko manjša od dolžine roba plošč, ki je enak  $\sqrt{S}$ , če sta plošči kvadratni ( $d \ll \sqrt{S}$ ).

Ekvipotencialne ploskve v ploščatem kondenzatorju so ravnine, vzporedne ravninama plošč kondenzatorja. Če upoštevamo enačbo 4.10, ugotovimo, da je napetost med ploščama kondenzatorja

$$U = Ed. \quad (4.20)$$

Upoštevaje enačbi 4.19 in 4.20 dobimo naslednjo zvezo med nabojem na kondenzatorju in napetostjo

$$e = CU, \quad (4.21)$$

kjer sorazmernostni faktor med tema količinama ( $e$  in  $U$ ),

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}, \quad (4.22)$$

imenujemo kapaciteta kondenzatorja. Enota za kapaciteto je 1 F (farad) ( $1 \text{ F} = 1 \text{ As/V}$ ). Pojem kapaciteta kondenzatorja kot zveza med nabojem na kondenzatorju in napetostjo lahko definiramo tudi za drugače izoblikovane kondenzatorje, kot so ploščati kondenzatorji (n. pr. koaksialni kabel), le da v takih primerih nastopajo v izrazih za kapaciteto kondenzatorja drugi parametri kot v enačbi 4.22.

#### 4.1.6 Energija električnega polja

Električna sila je konservativna sila, zato ji lahko pripišemo potencialno energijo. Sila, ki deluje na naboj v električnem polju v nasprotni smeri električne poljske jakosti, je nasprotno enaka električni sili, zato je delo, ki je potrebno, da prenesemo naboj  $e$  iz potenciala  $\varphi_z$  na potencial  $\varphi_k$ , enako

$$A = - \int e \vec{E} \cdot d\vec{s} = e(\varphi_k - \varphi_z) = eU. \quad (4.23)$$

Delo, podano z izrazom 4.23, je enako razliki potencialnih energij, če definiramo električno potencialno energijo kot produkt naboja in potenciala ( $W_{\text{el}} = e\varphi$ ). Električna potencialna energija dveh nabojev ( $e_1$  in  $e_2$ ) je potem enaka

$$W_{\text{el}} = \frac{e_1 e_2}{4\pi\varepsilon_0 r}. \quad (4.24)$$

Električno potencialno energijo lahko izrazimo z električnim poljem. V ta namen bomo sedaj izračunali energijo električnega polja v ploščatem kondenzatorju. Energija električnega polja v kondenzatorju je enaka delu, ki ga opravimo, da kondenzator napolnimo z nabojem  $e$  na eni in nabojem  $-e$  na drugi plošči. Na začetku procesa polnjenja kondenzatorja na ploščah ni naboja. Predstavljamo si, da kondenzator polnimo tako, da prenašamo naboj ene vrste postopoma iz ene plošče na drugo. Ko je naboj na ploščah kondenzatorja že enak  $\pm e'$ , je diferencial dela, ki ga je potrebno opraviti za prenos dodatnega naboja  $de'$  iz negativne na pozitivno ploščo, enak (en. 4.23)

$$dA = E' d de' = \frac{e'}{\varepsilon_0 S} d de', \quad (4.25)$$



kjer smo upoštevali še izraz za električno poljsko jakost v kondenzatorju (en. 4.19). Kot vidimo iz enačbe 4.25, je delo, potrebno za prenos dodatnega naboja  $de'$ , odvisno od tega, koliko naboja je že na ploščah kondenzatorja. Celotno delo, ki ga opravimo pri polnjenju kondenzatorja, je enako vsoti vseh prispevkov, izraženih z enačbo 4.25:

$$A = \int dA = \frac{d}{\varepsilon_0 S} \int_{e'=0}^{e'=e} e' de' = \frac{d}{\varepsilon_0 S} \frac{e'^2}{2} \Big|_{e'=0}^{e'=e} = \frac{de^2}{2\varepsilon_0 S} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 V, \quad (4.26)$$

pri čemer smo upoštevali enačbe 4.20, 4.21 in 4.22 ter izraz za prostornino kondenzatorja ( $V = Sd$ ). Gostota električne energije (energija na enoto volumna) je potem

$$w_{el} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2. \quad (4.27)$$

### 4.1.7 Snov v električnem polju

#### Električni naboj v snovi

Snovi, ki jo postavimo v električno polje, se spremeni njeno stanje. Glede na to, kako se odzovejo v električnem polju, razdelimo snovi na prevodnike in izolatorje. Prevodniki so na primer kovine in ionske raztopine, primera izolatorjev pa sta keramika in kovalentni kristali. Oglejmo si najprej, kaj se zgodi, če postavimo v električno polje kos kovine. Na nosilce naboja v kovini, to je na katione ionske mreže in na gibljive elektrone, začne delovati električna sila. Gibljivi, negativno nabiti elektroni se zato premaknejo v smeri, ki je nasprotna smeri električne poljske jakosti. Posledica tega je, da se na enem delu površine kovine naberejo dodatni elektroni, na drugem delu površine pa je zato elektronov ustrezno manj. V kratkem času se vzpostavi taka površinska porazdelitev nabojev, da je električna poljska jakost povsod znotraj kovine enaka nič. Opisani pojav imenujemo *influenca*. Če so v kovini votline, se zaradi influence izniči jakost električnega polja tudi v njih. Ta pojav uporabljamo na primer pri občutljivih elektrofizioloških poskusih. Da bi se izognili neljubim motnjam zaradi prisotnosti električnih polj v laboratoriju, je prostor, kjer se poskus izvaja, obdan s kovinskimi stenami ali mrežami (*Faradayeva kletka*).

Izolatorji nimajo gibljivih nabojev, vendar električno polje povzroči, da pride do določene pre-razporeditve nabojev tudi v njih. Prerazporeditev je lokalna, na ravni atomov in molekul snovi.

#### Električni dipoli v snovi

Atomi so električno nevtralni, pa tudi središče njihovih pozitivnih in negativnih nabojev je na istem mestu, to je v središču njihovega jedra. V zunanem električnem polju pa se središči pozitivnih in negativnih nabojev razmakneta in atom postane električni dipol, ki je sorazmeren električni poljski jakosti:

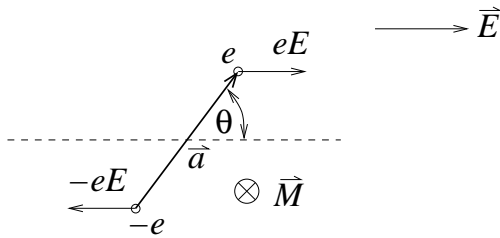
$$\vec{p}_e = \alpha \vec{E}. \quad (4.28)$$

Sorazmernostna konstanta v enačbi ( $\alpha$ ) se imenuje *polarizabilnost*. Njena vrednost je značilna lastnost atomov posameznih elementov.

Tudi molekule se v zunanem električnem polju polarizirajo. Nekatere molekule, pri katerih so atomi razporejeni simetrično, primer take molekule je  $\text{CH}_4$ , imajo središče pozitivnih in negativnih nabojev na istem mestu in zato lahko postanejo električni dipoli tako kot atomi samo v zunanem električnem polju. Pri nekaterih molekulah pa je razporeditev nabojev v njih taka, da sta ti središči razmaknjeni. Take molekule imajo stalen električni dipol. Primer je molekula vode, ki ima električni dipol z vrednostjo  $p_{e,\text{H}_2\text{O}} = 6,1 \cdot 10^{-20}$  Asm.

Na električni dipol deluje električno polje tako, da ga skuša usmeriti v svojo smer. Na dipol, katerega smer je različna od smeri električnega polja, deluje navor (sl. 4.13)

$$\vec{M} = \vec{p}_e \times \vec{E}. \quad (4.29)$$



Slika 4.13: Na električni dipol ( $\vec{p}_e = e\vec{a}$ ), ki je pod kotom  $\theta$  glede na smer električnega polja, deluje navor  $M = 2 \cdot eE \cdot (a/2) \sin \theta = p_e E \sin \theta$ .

Če upoštevamo, da je vrednost navora  $M = p_e E \sin \theta$  in da je delo, ki ga opravimo pri spremembi smeri dipola za kot  $d\theta$ , enako  $dA = M d\theta$  (en. 2.80), je delo, ki ga moramo opraviti, da dipol zavrtimo iz lege, ko je usmerjen v smeri električnega polja, v smer, podano s kotom  $\theta$ , enako

$$A(\theta) = p_e E (1 - \cos \theta) . \quad (4.30)$$

Energijo dipola v odvisnosti od kota  $\theta$  lahko definiramo kot

$$W(\theta) = -p_e E \cos \theta , \quad (4.31)$$

kjer smo upoštevali, da je vrednost energije enaka 0 pri  $\theta = \pi/2$ . V legi, ko je električni dipol usmerjen v smeri električnega polja, je potem njegova energija enaka  $-p_e E$ , ko ima nasprotno smer, pa  $p_e E$ .

Molekule v snoveh, kot so kapljevine in plini, imajo, če ni električnega polja, poljubne smeri, ki se zaradi termičnega gibanja ves čas spreminjajo, tako da je časovna povprečna vrednost električnega dipola vsake od njih enaka nič. V električnem polju in pri končnih temperaturah pa se električni dipoli delno usmerijo v smeri polja, tako da jih je v povprečju več usmerjenih v smeri polja kot v nasprotni smeri.

## Dielektričnost

Ker električni dipoli, ki so v povprečju usmerjeni v smer nekega zunanega električnega polja, tudi ustvarjajo električno polje, je polje v snovi v splošnem manjše od polja  $E_0$ , ki bi ga v prostoru imeli, če ne bi bilo dielektrične snovi. To zmanjšanje polja opišemo z dielektričnostjo ( $\varepsilon$ ), ki ima določeno vrednost za določeno snov. In sicer je

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} . \quad (4.32)$$

Med ploščama kondenzatorja, v katerem je snov z dielektrično konstanto  $\varepsilon$ , je zato električna poljska jakost enaka

$$E = \frac{e}{S\varepsilon\varepsilon_0} . \quad (4.33)$$

Kapaciteta z dielektrikom napolnjenega kondenzatorja je torej

$$C = \varepsilon C_0 , \quad (4.34)$$

kjer je  $C_0$  kapaciteta kondenzatorja, če kondenzator ni napolnjen z dielektrikom.

Med nabojema, ki sta v topilu z dielektričnostjo  $\varepsilon$ , deluje sila

$$\frac{e_1 e_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} \quad (4.35)$$

Dielektrična konstanta vode je približno 80, zaradi česar je sila med raztopljenimi ioni veliko manjša, kot bi bila v vakuumu. Zato se soli tako rade topijo.

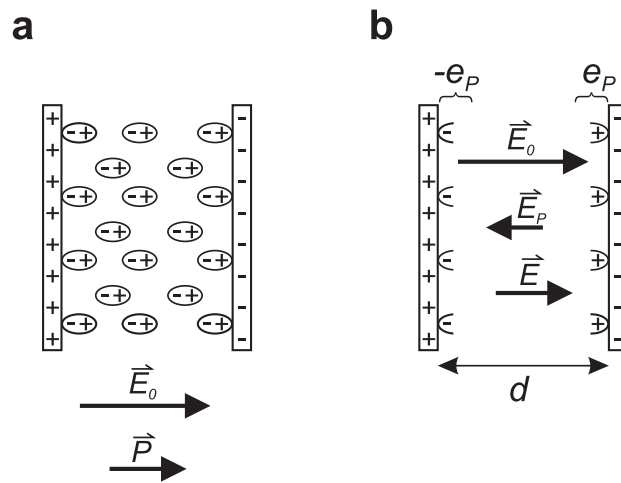
## Polarizacija

Neprevodna snov v električnem polju je polarizirana, kar opisujemo s količino, ki jo imenujemo polarizacija. Polarizacija ( $\vec{P}$ ) meri količino dipola na enoto prostornine in ima enoto  $\text{As}/\text{m}^2$ :

$$\vec{P} = n\vec{p}_e, \quad (4.36)$$

kjer je  $n$  število molekul na enoto prostornine in  $\vec{p}_e$  povprečni električni dipol posamezne molekule. Makroskopski dipol snovi dobimo, ko zmnožimo polarizacijo in volumen snovi.

Kot primer si oglejmo razmere v kondenzatorju, ki je napolnjen z dielektrično snovjo. Nabiti plošči kondenzatorja v njem ustvarjata polje  $E_0$ . Dipoli v dielektrični snovi se obrnejo v smer polja, zato tudi polarizacija ( $P$ ) kaže v isto smer (sl. 4.14a). Čeprav sama snov v povprečju ostane električno nevtralna, pa si lahko predstavljamo, da se zaradi polarizacije na njeni površini tik ob ploščah kondenzatorja nabere naboj ( $e_P$ ) (sl. 4.14b). Naboj, ki se nabere ob ploščah, ustvarja električno polje ( $E_P$ ), ki kaže v nasprotno smer kot  $E_0$ , zato se celotno polje med ploščama zmanjša,  $E = E_0 - E_P$ .



Slika 4.14: Shematičen prikaz polarizacije neprevodne snovi (dielektrika) v električnem polju kondenzatorja. (a) Dipoli v snovi se obrnejo v smer električnega polja  $\vec{E}_0$ , ki ga ustvarjata plošči kondenzatorja, in snov postane polarizirana. Polarizacija v snovi ( $\vec{P}$ ) kaže v smer  $\vec{E}_0$ . (b) Polarizirana snov je v povprečju nevtralna, lahko pa si predstavljamo, da se na njeni površini nabere naboj. Ob pozitivni plošči kondenzatorja se nabere negativni naboj ( $-e_P$ ), ob negativni plošči pa pozitivni naboj ( $e_P$ ), zaradi česar se v snovi vzpostavi polje ( $\vec{E}_P$ ). Celotno polje med ploščama je tako  $E = E_0 - E_P$ .

Zaradi polarizacije snovi v kondenzatorju se naboj na vsaki plošči efektivno zmanjša za naboj, ki se je nabral ob ploščah. Izkaže se, da sta absolutni vrednosti površinskih gostot naboja, ki se je nabral ob ploščah, enaki polarizaciji,  $\sigma_e = e_P/S = P$ , zato se polje v kondenzatorju zmanjša za

$$E_P = \frac{e_P}{\varepsilon_0 S} = \frac{P}{\varepsilon_0}, \quad (4.37)$$

oziroma

$$E = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0}. \quad (4.38)$$

Če upoštevamo že vpeljano definicijo za dielektrično konstanto (en. 4.32), dobimo za zvezo med polarizacijo in električnim poljem izraz

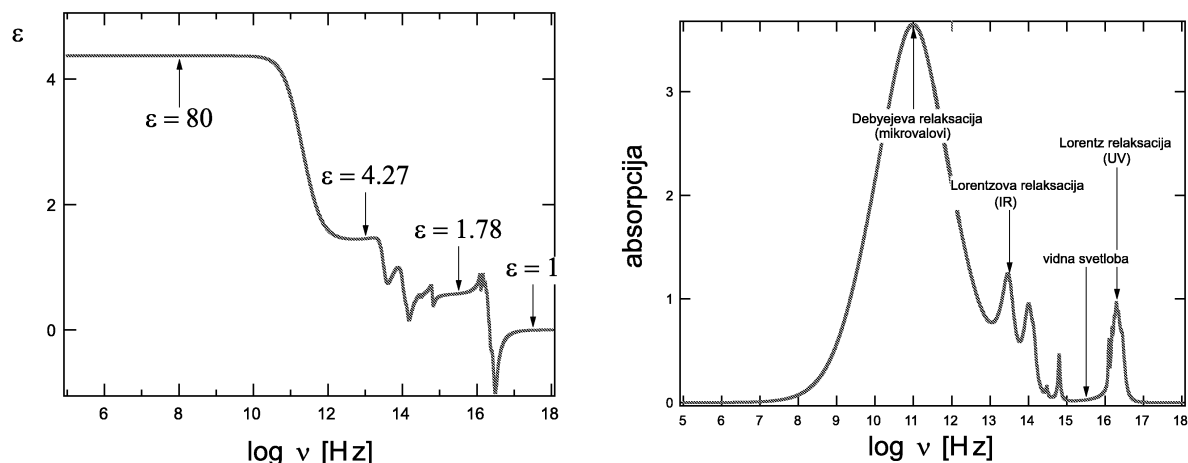
$$P = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E. \quad (4.39)$$

V odsotnosti električnega polja dipoli v dielektriku kažejo v vse smeri in je  $\vec{P} = 0$ .

### Frekvenčna odvisnost dielektrične konstante

Do sedaj smo obravnavali obnašanje snovi v električnem polju, ki se s časom ne spreminja. Ker so v snoveh molekule s stalnim električnim dipolom na nek način vezane na druge molekule, se ne gibljejo poljubno in zato ne morejo slediti prehitrim spremembam smeri električnega polja. Molekule ne morejo slediti prehitrim spremembam smeri električnega polja tudi zaradi svoje lastne mase oziroma vztrajnostnega momenta. Določeni dipoli lahko sledijo izmeničnemu električnemu polju samo do za njih značilne frekvence, zato je dielektrična konstanta pri frekvencah električnega polja, ki so večje od značilne frekvence, manjša.

Lep primer opisanega obnašanja je **voda**. Pri majhnih frekvencah ima dielektrično konstanto 78, nato začne le-ta z večanjem frekvence padati, ker molekula kot celota ne more več slediti hitrim spremembam polja. Pri frekvencah reda velikosti 10 GHz dielektričnost ( $\epsilon$ ) strmo pade na vrednost 30. V območju frekvenc, kjer se  $\epsilon$  zelo spreminja, pride do resonance (sl. 2.51). Pri disipaciji energije, ko se valovanje absorbira (pogl. 6.2.2), voda črpa iz zunanjega polja energijo, ki se troši za *trenje* med vrtečimi se molekulami. Naslednja velika sprememba dielektričnosti se zgodi pri petih različnih infrardečih frekvencah in je posledica tega, da ne le molekula vode kot celota, pač pa tudi posamezni njeni deli, atom kisika in vodikova iona, ne morejo več slediti hitrim spremembam zunanjega polja. Molekula se deformira in niha v lastnih načinih nihanja (pogl. 2.4.7). Pri še večjih frekvencah niti elektronski oblak okrog vodikov in kisika, ne more več slediti hitrim spremembam. Zadnji padec  $\epsilon$  v ultravijoličnem območju frekvenc, ko pride do prehodov med različnimi energijskimi nivoji v molekuli vode (pogl. 5), pa je posledica tega, da niti elektroni v molekuli ne morejo več slediti spremembam polja. Odvisnost dielektričnosti in absorpcije od frekvence prikazuje slika 4.15.



Slika 4.15: Frekvenčna odvisnost dielektričnosti ( $\epsilon$ ) vode (levo) in absorpcije (desno). Absorpcija je največja, ko se  $\epsilon$  najbolj spreminja: pri mikrovalovni frekvenci  $\nu \sim 10^{11}$  Hz, v infrardečem območju  $\nu \sim 10^{14}$  Hz in v ultravijoličnem območju  $\nu \sim 10^{16}$  Hz.

Spreminjanje dielektričnosti v mikrovalovnem področju je osnova delovanja mikrovalovnih pečic, ki delujejo pri frekvenci približno 2,5 GHz. Spreminjanje dielektričnosti v infrardečem področju pa je osnova za t. i. **efekt tople grede**. Efekt tople grede je bistven za obstoj življenja na našem planetu. Voda, oz. vodna para, je namreč (poleg  $\text{CO}_2$ ) eden od plinov tople grede in tudi bistveno prispeva k lokalnemu in globalnemu segrevanju ozračja.

#### 4.1.8 Električni potencial na površini nabite membrane

Na površini membran, ki imajo električni naboj, se vzpostavi tako imenovani *membranski površinski potencial*. Razlika v vrednosti električnega potenciala na površini membrane in v raztopini daleč od membrane vpliva na vezavo nabitih delcev na membrano, na potek nekaterih biokemijskih reakcij na površini membrane, na transport nabitih delcev skozi membrano itd. V tem razdelku

si bomo ogledali vpliv okolne ionske raztopine na velikost membranskega površinskega potenciala. Med drugim bomo ugotovili, do katere oddaljenosti od membrane sega vpliv nabojev na površini membrane.

Naboji, ki se nahajajo na površini membrane, interagirajo z naboji okolne ionske raztopine. Zaradi te interakcije ionska raztopina v neposredni bližini nabite membrane ni električno nevtralna, kot sicer velja za raztopino dovolj daleč od membrane. Če je, denimo, naboj na membrani negativen, bodo njeni naboji privlačili pozitivne ione iz raztopine in odbijali negativne. Dobljeno razporeditev ionov imenujemo *električna dvojna plast*. Naboji v električni dvojni plasti zasenčijo vpliv površinskih membranskih nabojev na okolico. Zato jakost električnega polja, ki je posledica teh nabojev, ni konstantna vse do neskončnosti, kot smo to ugotovili pri obravnavi neskončne enakomerno nabite plošče, postavljene v vakuum ali dielektrik (str. 120), ampak pade do vrednosti nič na končni oddaljenosti od membrane.

Velikost membranskega površinskega potenciala in njegov potek v neposredni bližini membrane se da določiti s kvantitativnimi metodami. Mi bomo to napravili tako, da najprej predpostavimo določeno odvisnost električnega potenciala od oddaljenosti od membrane,  $\varphi = \varphi(z)$ , in z metodami termodinamike ugotovimo ustrezno odvisnost koncentracij pozitivnih in negativnih ionov od oddaljenosti od membrane. Iz tako dobljene porazdelitve nabojev v prostoru pa potem z metodami elektrostatike ugotovimo dejanski potek električnega potenciala. Predpostavili bomo, da so membranski naboji enakomerno porazdeljeni po površini membrane s površinsko gostoto naboja  $\sigma_e$  in da je ionska raztopina raztopina enovalentne soli (n. pr. NaCl).

### Gostota naboja v raztopini

Ioni v raztopini so podvrženi termičnemu gibanju. V prostoru z električnim potencialom imajo dodatno potencialno energijo, ki je za enovalentne ione enaka  $e_0\varphi(z)$  (en. 4.23). Številčno gostoto ionov v tem prostoru lahko določimo z upoštevanjem Boltzmannovega faktorja, ki smo ga uvedli pri barometriki formuli (en. 3.112 na str. 96):

$$\begin{aligned} n_{\text{Na}} &= n_{\infty} e^{-e_0\varphi(z)/k_{\text{B}}T}, \\ n_{\text{Cl}} &= n_{\infty} e^{e_0\varphi(z)/k_{\text{B}}T}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Z  $n_{\infty}$  smo označili številčno gostoto obojnih ionov v neskončni oddaljenosti od membrane. Gostoto naboja v raztopini na oddaljenosti  $z$  od membrane lahko potem zapišemo kot

$$\rho_e(z) = e_0(n_{\text{Na}} - n_{\text{Cl}}) = e_0 n_{\infty} (e^{-e_0\varphi(z)/k_{\text{B}}T} - e^{e_0\varphi(z)/k_{\text{B}}T}). \quad (4.41)$$

### Poissonova enačba

Sedaj se lotimo še določitve električnega potenciala. Najprej bomo ugotovili, kako se z razdaljo od membrane spreminja električna poljska jakost. Vemo denimo, kolikšna je električna poljska jakost levo in desno od nabite plošče (enačbi 4.16 in 4.17). Zaključimo lahko, da se električna poljska jakost na oddaljenosti  $z + \Delta z$  ( $E(z + \Delta z) = \rho_e(z)\Delta z/2\varepsilon\varepsilon_0$ ) razlikuje od električne poljske jakosti na mestu  $z$  ( $E(z) = -\rho_e(z)\Delta z/2\varepsilon\varepsilon_0$ ) za

$$E(z + \Delta z) - E(z) = \frac{\rho_e(z)\Delta z}{\varepsilon\varepsilon_0}, \quad (4.42)$$

kar lahko za zelo majhne korake  $\Delta z \rightarrow dz$  zapišemo kot

$$\frac{dE}{dz} = \frac{\rho_e(z)}{\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (4.43)$$

Če upoštevamo še zvezo med električno poljsko jakostjo in električnim potencialom (en. 4.18), dobimo

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = -\frac{\rho_e(z)}{\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (4.44)$$

### Poisson-Boltzmannova enačba

Tako smo dobili dve enačbi (enačbi 4.41 in 4.44) za obe neznanli količini – gostoto naboja  $\rho_e(z)$  in električni potencial  $\varphi(z)$ . Če obe enačbi združimo tako, da izločimo gostoto naboja, dobimo tako imenovano *Poisson-Boltzmannovo enačbo*:

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = -\frac{e_0 n_\infty}{\varepsilon \varepsilon_0} (e^{-e_0\varphi(z)/k_B T} - e^{e_0\varphi(z)/k_B T}). \quad (4.45)$$

Edina neznanica v tej enačbi je sedaj električni potencial  $\varphi(z)$ , ki ga lahko določimo tako, da enačbo rešimo z ustrezno dvakratno integracijo (dvakratno, ker v enačbi nastopa drugi odvod električnega potenciala). Relativno enostavno lahko enačbo rešimo, kadar so električni potenciali na celotnem območju, kjer je njihova vrednost različna od nič, dovolj majhni, da je ustrezna električna potencialna energija dosti manjša od povprečne termične energije,  $e_0\varphi(z)/k_B T \ll 1$ . Pri normalnih temperaturah je temu pogoju zadoščeno pri potencialih, manjših od 25 mV. Eksponentni funkciji lahko v tem primeru razvijemo v vrsto in obdržimo samo prvi, največji člen. Za številčno gostoto naboja (en. 4.41) dobimo v tem primeru izraz

$$\rho_e(z) \approx -\frac{2e_0^2 n_\infty \varphi(z)}{k_B T}. \quad (4.46)$$

Poisson-Boltzmannova enačba se v tem približku glasi

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{2e_0^2 n_\infty}{\varepsilon \varepsilon_0 k_B T} \varphi \equiv \kappa^2 \varphi. \quad (4.47)$$

Enačba ima enostavno rešitev,

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\kappa z}, \quad (4.48)$$

pri čemer smo s  $\varphi_0$  označili vrednost membranskega površinskega potenciala. Vidimo, da se električni potencial zmanjša na  $1/e$  svoje površinske vrednosti ( $\approx 0,39$ ) na razdalji  $1/\kappa$  od površine membrane. Razdaljo  $1/\kappa$  imenujemo *Debyejeva dolžina*:

$$\frac{1}{\kappa} = \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0 k_B T}{2e_0^2 n_\infty}}. \quad (4.49)$$

Odvisna je od koncentracije ionske raztopine. Pri 0,15 mol/l raztopine NaCl, kar približno ustreza koncentraciji te soli v izvenceličnih tekočinah, znaša Debyejeva dolžina približno 1 nm.

Vrednost membranskega površinskega potenciala ( $\varphi_0$ ) dobimo iz zahteve po električni nevtralnosti celotnega sistema. To v obravnavanem primeru pomeni, da je prebitek pozitivnega naboja v električni dvojni plasti ravno enak negativni površinski gostoti naboja:

$$\int_0^\infty \rho_e(z) dz = -\sigma_e. \quad (4.50)$$

Z integracijo te enačbe, ko vanjo vstavimo rešitev 4.48 in zvezo 4.46, dobimo

$$\varphi_0 = \frac{\sigma_e}{\varepsilon \varepsilon_0 \kappa}. \quad (4.51)$$

Pri površinski gostoti naboja 0,1 As/m<sup>2</sup> in  $1/\kappa = 1$  nm dobimo  $\varphi_0 = 14$  mV. Membranski površinski potencial je seveda tem večji, čim večja je površinska gostota naboja. Odvisen pa je tudi od koncentracije elektrolita. Čim manjša je koncentracija, tem večja sta Debyejeva dolžina in membranski površinski potencial. Če je koncentracija soli velika, ioni v raztopini lažje in na manjši razdalji zasenčijo površinske membranske naboje. Če ionov sploh ni, je situacija enaka kot pri že prej obdelanem problemu neskončne ravne nabite plošče (str. 120). Tudi dobljeni rezultat se ujema – v tem primeru namreč velja  $\kappa = 0$ , zato je drugi odvod potenciala enak nič. Z integracijo dobimo, da je prvi odvod potenciala sorazmeren z oddaljenostjo od plošče, kar pomeni tudi, da je v tem primeru električna poljska jakost povsod enaka.

### 4.1.9 Definicija električnega toka

Električni tok lahko nastane, če se v prostoru nahajajo gibljivi naboji (tabela 4.3). Električni tok je količina naboja, ki v enoti časa preteče skozi nek presek:

$$I = \frac{de}{dt}. \quad (4.52)$$

Enota za električni tok je amper (A). Gostota električnega toka pa je količina naboja, ki v enoti časa preteče skozi enoto preseka

$$j_e = \frac{I}{S} = \frac{1}{S} \frac{de}{dt}. \quad (4.53)$$

Enota za gostoto električnega toka je  $1 \text{ A/m}^2$ .

Tabela 4.3: Vrednosti električnih tokov.

pojav	$I$ [A]
tok skozi en sam membranski protein	$1 - 10 \cdot 10^{-12}$
tok pri prevajanju živčnega pulza	$1 \cdot 10^{-6}$
gospodinjski tok	1
tok skozi magnetne pospeševalnika	$1,2 \cdot 10^4$
tok pri tipičnem blisku	$1 - 20 \cdot 10^4$
tok v zemeljskem jedru	$1 \cdot 10^9$

Električni tok lahko zaznamo

1. ker se snovi, skozi katere teče, segrejejo,
2. ker povzroči elektrolizo in
3. ker povzroči nastanek magnetnega polja.

S pomočjo vsakega od navedenih učinkov lahko električni tok tudi merimo. Povemo naj, da so enoto amper včasih vpeljali z elektrolizo: tok  $1 \text{ A}$  izloči pri elektrolizi srebrovega nitrata v eni sekundi  $1,118 \text{ mg}$  srebra. Sedaj veljavno definicijo za amper bomo spoznali v poglavju o magnetizmu na strani 138.

### 4.1.10 Električni tok skozi prevodne snovi

Prevodne snovi so snovi, po katerih se naboji lahko premikajo. Prevodne so na primer kovine, v katerih se lahko premikajo nekateri (prevodni) elektroni. V kovinah so prevodni elektroni edini nosilci električnega toka. V ionskih raztopinah so nosilci toka pozitivni in negativni ioni (kationi in anioni).

Če so različna mesta v prevodni snovi na različnih električnih potencialih, se vzpostavi električno polje (en. 4.8) in skozi njega teče tok. Če je električna poljska jakost povsod enaka nič, se nosilci toka sicer gibljejo zaradi svoje termične energije, vendar je njihovo gibanje neurejeno in poteka v vseh smereh, tako da je povprečna hitrost nabojev enaka nič. Zaradi električnega polja pa se nosilci začno gibati v smeri silnic tega polja. Gibanje nosilca naboja skozi snov si lahko predstavljamo kot gibanje kroglice, na katero deluje zunanja sila, skozi viskozno tekočino. Primerjava je dejansko dobesedna, ko gre za gibanje ionov v ionski raztopini. Ione si namreč predstavljamo kot kroglice, ki jih zapolnjuje ion skupaj s tistimi molekulami vode, ki so vezane na ion. Če izenačimo silo trenja, izraženo s Stokesovim zakonom (str. 56), z električno silo, dobimo

$$6\pi r\eta\bar{v} = eE. \quad (4.54)$$

Z vpeljavo *gibljivosti*  $\beta = e/6\pi r\eta$  lahko izrazimo povprečno hitrost kot

$$\bar{v} = \beta E . \quad (4.55)$$

Tudi gibanje elektronov v kovini je v povprečju enakomerno, ker se zaradi električnega polja pospešeni elektroni v kovini zadevajo v ione kristalne mreže in se zato njihova povprečna hitrost ustali in je sorazmerna električni poljski jakosti.

Če poznamo povprečno hitrost nosilcev naboja ter koliko jih je na enoto prostornine ( $n$ ), lahko napišemo gostoto električnega toka kot

$$j_e = ne_0\bar{v} . \quad (4.56)$$

Če v slednjo enačbo vstavimo izraz za povprečno hitrost (en. 4.55), dobimo zvezo med gostoto toka in električno poljsko jakostjo

$$j_e = ne_0\beta E = \sigma E . \quad (4.57)$$

Koeficient  $\sigma = ne_0\beta$  se imenuje *specifična prevodnost snovi*. Gostota električnega toka in jakost električnega polja sta vektroski količini, zato v splošnem zapišemo (prim. enačbi 3.146 in 3.165)

$$\vec{j}_e = \sigma \vec{E} . \quad (4.58)$$

#### 4.1.11 Električno polje tokovnih izvorov in ponorov ter dipola

Obravnavamo preprost primer stalnega točkastega tokovnega izvora v sredini prevodne snovi, ki zavzema celoten prostor. Pod točkastim tokovnim izvorom si predstavljamo točko v tej snovi, kjer na enoto časa nastajajo novi pozitivni naboji ( $I_+$ ). Novi naboji odrivajo prejšnje, kar v terminologiji elektrostatike pomeni, da se je v prostoru vzpostavilo električno polje. Prej kot slej potem, ko je tokovni izvor pričel delovati, se v prostoru vzpostavi stacionarno stanje. To pomeni, da kolikor naboja v enoti časa priteče v nek prostorski element snovi, ga iz tega prostora tudi odteče. Ker naboji odtekaajo od tokovnega izvora na vse strani enakomerno, je gostota toka na vseh mestih, ki so na razdalji  $r$  od točkastega izvora, enaka in sicer taka, da je celotni tok skozi ploskev  $4\pi r^2$  enak vrednosti  $I_+$ :

$$j_e \cdot 4\pi r^2 = I_+ . \quad (4.59)$$

Gostota toka na oddaljenosti  $r$  od izvora je torej

$$j_e(r) = \frac{I_+}{4\pi r^2} . \quad (4.60)$$

Električna poljska jakost, ki poganja ta tok, je enaka (en. 4.57)

$$E(r) = \frac{j_e}{\sigma} = \frac{I_+}{\sigma \cdot 4\pi r^2} . \quad (4.61)$$

Vidimo, da je električna poljska jakost v prostoru v okolici točkastega tokovnega izvora odvisna od razdalje od izvora na enak način kot električna poljska jakost točkastega naboja v praznem prostoru. Električno polje v prevodni snovi, ki nastane zaradi točkastega tokovnega izvora, lahko zato po analogiji opišemo z električnim poljem, ki bi ga ustvaril navidezni naboj

$$e = \frac{\varepsilon_0 I_+}{\sigma} . \quad (4.62)$$

Gornjo ugotovitev lahko posplošimo za tokovni dipol, v katerem imamo poleg točkastega tokovnega izvora ( $I_+$ ) na določeni razdalji ( $a$ ) od njega odmaknjeni točkasti ponor ( $I_-$ ). Ponor je mesto, na katerem naboji izginjajo. Če sta absolutni vrednosti  $I_+$  in  $I_-$  enaki, potem vsi naboji, ki so se pojavili v izvoru, v ponoru tudi poniknejo.

Po analogiji s točkastim tokovnim izvorom se v okolici opisanega sistema vzpostavi električno polje, kot da bi imeli opravka z električnim dipolom (sl. 4.7) z vrednostjo

$$p_e = \frac{a\varepsilon_0 I_+}{\sigma} . \quad (4.63)$$



Poznavanje analogije med električnim potencialom pravega dipola in dipola, ki ga dobimo s tokovnimi izvorom in ponorom, se uporablja pri razlagi pojavov pri elektrokardiografiji. Pri tem diagnostičnem postopku meritve električnih potencialov na določenih mestih v telesu, ki so posledica električnih pojavov v srcu, povedo nekaj o stanju srca. Električna dogajanja v srcu lahko opišemo s tokovnim dipolom, katerega velikost in smer se s časom spreminjata. Tkiva so prevodne snovi in zato električni tokovi tečejo od izvora do ponora po celem telesu. Pri analizi električnih potencialov med različnimi deli telesa si zaradi analogije z električnim dipolom velikokrat preprosto predstavljamo, da imamo na mestu srca ustrezen električni dipol.

#### 4.1.12 Ohmov zakon

Ohmov zakon povezuje električni tok z napetostjo. Običajno se ga napiše v obliki, ki velja za kovinsko žico z dolžino  $\ell$  in presekom  $S$ . V tem primeru je električna poljska jakost enaka

$$E = \frac{U}{\ell}. \quad (4.64)$$

Z upoštevanjem slednje enačbe (en. 4.64) in definicije za gostoto električnega toka (en. 4.53) lahko Ohmov zakon (en. 4.57) zapišemo v obliki

$$I = \frac{U}{R}, \quad (4.65)$$

kjer imenujemo  $R$  električni upor. Električni upor žice je torej

$$R = \frac{\zeta \ell}{S}, \quad (4.66)$$

kjer smo lastnost prevodne snovi, iz katere je žica, sedaj opisali s specifično upornostjo

$$\zeta = \frac{1}{\sigma}. \quad (4.67)$$

#### 4.1.13 Električne izgube pri toku skozi prevodne snovi

Električni tok skozi snovi je tipičen primer disipativnega pojava. Električna energija se pretvarja v toplotno energijo. Izračunajmo si delo, ki ga opravi sila trenja  $F_{\text{tr}}$ . Sila trenja je po velikosti enaka produktu  $eE$ . Delo sile trenja pri premiku enega naboja za dolžino  $s$  ( $A_1$ ) lahko zato napišemo kot

$$A_1 = F_{\text{tr}}s = eEs. \quad (4.68)$$

Velja tudi

$$s = \bar{v}t, \quad (4.69)$$

torej imamo

$$A_1 = eE\bar{v}t. \quad (4.70)$$

V kosu prevodnika imamo  $nV$  nosilcev naboja, torej je celotno opravljeno delo enako

$$A = VnA_1 = S\ell neE\bar{v}t = IUt, \quad (4.71)$$

pri čemer smo upoštevali enačbo za gostoto električnega toka (en. 4.56) in njeno definicijo (en. 4.53) ter zvezo med  $E$  in  $U$  (en. 4.64). Moč, ki se torej troši pri toku skozi prevodnik, je

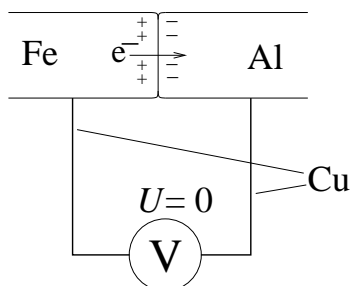
$$P = \frac{A}{t} = IU. \quad (4.72)$$

Izgube pri električnem toku so iste vrste kot izgube pri toku viskozne tekočine, saj so posledica trenja pri gibanju nabitih delcev skozi snov.

## 4.2 Nastanek električnih potencialov

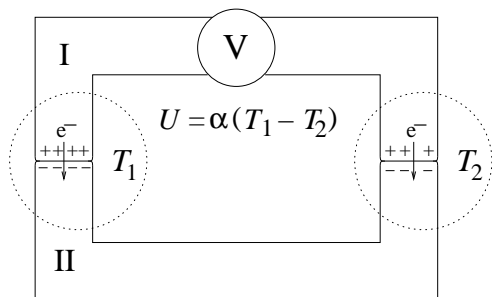
Obravnavali bomo nekaj primerov nastanka električnega potenciala na meji med dvema sredstvom. Uporabili bomo metode, ki smo jih spoznali v poglavju o toploti in termodinamiki, ter upoštevali zakonitosti, ki smo jih spoznali pri poglavju o elektriki.

### 4.2.1 Kontaktni potencial



Slika 4.16: Ko staknemo železo z aluminejem, steče nekaj prevodnih elektronov v aluminij. Če povežemo ti kovini preko bakra z voltmetrom, napetosti ne izmerimo, ker je vsota vseh napetosti v tokokrogu enaka nič.

Na stiku dveh različnih kovin tista kovina, v kateri so elektroni šibkeje vezani, nekaj elektronov izgubi ter postane pozitivna, kovina, v kateri so elektroni močnejše vezani, pa elektrone prevzame in postane negativna (sl. 4.16). Proces se zelo hitro uravnesi, saj preseljeni elektroni ustvarjajo električno polje, ki nasprotuje njihovi nadaljnji selitvi. Napetostno razliko, ki je nastala s preselitvijo elektronov na stiku različnih kovin, imenujemo *kontaktna napetost*. Kontaktna napetost je odvisna od vrste kovin.



Slika 4.17: Termočlen in porazdelitev nosilcev naboja na stiku dveh kovin, če temperaturi na stikih nista enaki. Shematsko je narisan tudi voltmetr.

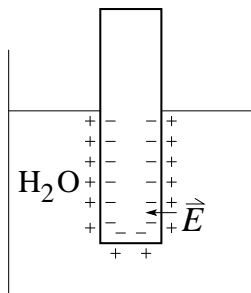
Kontaktne napetosti ne moremo meriti neposredno. Merimo pa lahko razliko kontaktnih napetosti med dvema spojema termočlena. Termočlen je sestavljen iz dveh žic iz različnih kovin (na sliki 4.17 označeni kot kovini I in II), ki sta speti na dveh koncih (stika 1 in 2). Kadar sta oba spoja na enaki temperaturi, sta kontaktni napetosti na obeh mestih enako veliki, vendar nasprotnega predznaka, zato med spojema ni električne napetosti. Pri različnih temperaturah pa se kontaktni napetosti razlikujeta in med spojema nastane električna napetost. Tej napetosti pravimo *termoelektrična napetost* in jo lahko zaznamo z voltmetrom. Za majhne temperaturne razlike med spojema je termoelektrična napetost ( $U$ ) kar sorazmerna razliki temperatur med stičiščema kovin

$$U = \alpha(T_1 - T_2) . \quad (4.73)$$

Sorazmernostno konstanto  $\alpha$  imenujemo občutljivost termočlena.

### 4.2.2 Elektrodni potencial

Če damo kovinsko elektrodo v topilo, denimo v vodo, se začne kovina (delno) raztapljati. Kovine se topijo tako, da v raztopino prehajajo le pozitivni kovinski kationi. Molekule topila se zaradi svojih električnih dipolov namreč uredijo ob kationih na površini kovine in s tem zrahljajo vezi, s katerimi so kationi vezani v kovinski kristal. Elektroni, ki so v elektronskem oblaku porazdeljeni po vsej kovini, so močnejše vezani na kovino in zato ne prehajajo v raztopino. Ker v raztopino prehajajo le



Slika 4.18: Prehajanje pozitivnih nabojev iz kovine povzroči nastanek električnega polja.

pozitivni naboji, negativni pa ostajajo v kovini, se med raztapljanjem kovine ta nabija negativno, v raztopini blizu kovine pa narašča število pozitivnih kovinskih kationov. Zato se med kovino in raztopino vzpostavi električno polje, ki kaže od raztopine proti kovini in zato vleče raztopljene kovinske ione nazaj proti kovini, ustrezna količina negativno nabitih elektronov pa se kopiči ob površini kovine v njeni notranjosti (sl. 4.18). Na ta način nastalo električno polje med raztapljanjem narašča. Ko toliko naraste, da je število ionov, ki se v časovni enoti raztopijo, enako številu ionov, ki jih v časovni enoti električno polje potegne iz raztopine nazaj v kovino, se vzpostavi ravnovesje. V tem ravnovesnem stanju vlada med kovino in raztopino razlika električnih potencialov, ki jo imenujemo *elektrodni potencial* ali *elektrodna napetost*. Vedno je tako, da je kovina negativna glede na raztopino. Čim bolj topljiva je kovina, tem več pozitivnih ionov preide iz kovine v raztopino in tem bolj negativna je elektrodna napetost te kovine. Kovine, ki se le malo raztapljajo, imajo majhno elektrodno napetost, kar pomeni, da je potencial v kovini le malo negativen glede na raztopino. Popolnoma netopne kovine bi imele elektrodno napetost enako nič.

Elektrodna napetost je odvisna predvsem od vrste kovine in od topila, v katerem je elektroda. Čim slabše so vezani kovinski kationi v kristalno mrežo, tem večji je elektrodni potencial. Na elektrodni potencial vpliva tudi topilo: če imajo molekule topila večji električni dipol in zato povzročajo večjo dielektričnost topila, le-to povzroča večjo elektrodno napetost, ker njegove molekule bolj oslabijo vezi, s katerimi so kationi vezani v kovinsko kristalno mrežo. Moramo pa poudariti, da je elektrodni potencial odvisen tudi od temperature in predvsem od koncentracije kovinskih kationov v raztopini. Če je v raztopini že mnogo kationov, preden potopimo kovino vanjo, se bo raztopilo manj kovinskih kationov in bo zato elektrodna napetost manjša. To, da elektrodna napetost pada z naraščajočo koncentracijo raztopine, se da torej kvalitativno razumeti. Mi pa bi radi izpeljali zvezo med tema količinama, ki bi nam povedala, kako je elektrodna napetost odvisna od koncentracije, in bi nam omogočila izračunati spremembo elektrodne napetosti pri dani spremembi koncentracije raztopine. Glede na vse, kar smo se naučili o termodinamskem ravnovesju, nam to ne bo težko.

Kovinski ioni morajo biti v ravnovesju med trdno fazo (kovino), ki jo bomo označevali z indeksom 1, in raztopino, označeno z indeksom 2. Ko smo govorili o kemijskem ravnovesju, smo dejali, da se ravnovesje vzpostavi takrat, ko je kemijski potencial, to je prosta entalpija na en mol snovi, enak v obeh fazah. Ker imajo nabiti kovinski ioni v obeh fazah, ki imata tudi različni električni potencial, tudi drugačno električno potencialno energijo, moramo izraz za prosto entalpijo dopolniti. Pogoji za ravnovesje se zato glasi: v obeh fazah mora biti enak *elektrokemijski potencial*, to je vsota kemijskega potenciala in električne potencialne energije enega mola ionov, ali

$$\mu_1 + ZF\varphi_1 = \mu_2 + ZF\varphi_2 . \quad (4.74)$$

Tu sta  $\mu_1$  in  $\mu_2$  kemijska potenciala kovinskih ionov v kovini oziroma v raztopini,  $\varphi_1$  in  $\varphi_2$  sta ustrezna električna potenciala,  $F$  je *Faradayev naboj* (ali *Faradayevo število*), to je naboj enega mola enkrat nabitih ionov ( $F = N_A e_0 = 9,6 \cdot 10^4$  As/mol),  $Z$  pa je valenca, ki pove, koliko osnovnih nabojev nosi vsak ion (n. pr.  $Z = 2$  za ione  $\text{Cu}^{2+}$  ali  $Z = -1$  za ione  $\text{Cl}^-$ ). Člen  $ZF\varphi$  predstavlja električno potencialno energijo enega mola ionov, ki se nahajajo na električnem potencialu  $\varphi$ . Enega mola zato, ker tudi prvi člen v enačbi 4.74 predstavlja prosto entalpijo enega mola ionov.

Kemijski potencial v kovini ( $\mu_1$ ) je odvisen od vrste kovine in od temperature, medtem ko vemo,

da lahko kemijski potencial dovolj razredčene raztopine izrazimo kot

$$\mu_2 = \mu_0 + RT \ln c_2 . \quad (4.75)$$

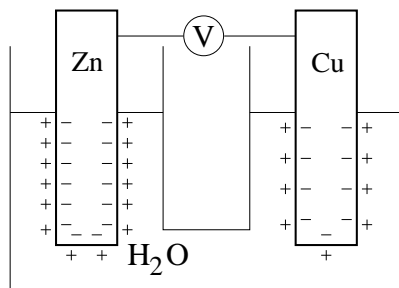
Še enkrat moramo poudariti, da tak izraz velja le za majhne koncentracije ( $c_2$ ), ko lahko raztopino obravnavamo kot idealno raztopino. Z  $\mu_0$  je označen kemijski potencial ionov v raztopini s koncentracijo  $c_2 = 1 \text{ mol}/\ell$ . Če vstavimo izraz 4.75 v enačbo 4.74, dobimo za elektrodno napetost  $U$ , ki je enaka razliki električnih potencialov med kovino in raztopino,

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = U_0 + \frac{RT}{ZF} \ln c_2 . \quad (4.76)$$

Pri tem smo z  $U_0$  označili

$$U_0 = \frac{\mu_0 - \mu_1}{ZF} . \quad (4.77)$$

$U_0$  je *elektrodna napetost kovine*, to je napetost pri koncentraciji  $c_2 = 1 \text{ mol}/\ell$ . Za  $U_0$  pričakujemo, da je negativna, ker je elektroda vedno na negativnem potencialu glede na raztopino. Enačba 4.76 pove, da je elektrodna napetost logaritmično odvisna od koncentracije raztopine. Vidimo, da postaja z večanjem koncentracije kovinskih kationov v raztopini elektrodna napetost vedno manj negativna, torej po absolutni vrednosti pada, kar smo pričakovali že na začetku.



Slika 4.19: Z voltmetrom lahko izmerimo razliko elektrodnih napetosti med cinkom in bakrom.

Elektrodna napetost ni neposredno merljiva količina. Če želimo namreč napraviti tokokrog, da bi lahko izmerili elektrodno napetost, pri tem nujno ustvarimo še en stik med kovino in raztopino, ki ima seveda tudi svojo elektrodno napetost. Količina, ki jo izmerimo, je enaka razliki obeh elektrodnih napetosti (sl. 4.19). Zaradi tega podajamo elektrodno napetost določene kovine glede na elektrodno napetost standardne elektrode, za katero je izbrana vodikova elektroda. To je platinska elektroda z adsorbiranim vodikom, ki se nahaja v enomolarni raztopini vodikovih kationov.

To, da ima neka kovina negativno elektrodno napetost glede na vodikovo elektrodo, pomeni, da je elektrodna napetost te kovine večja (bolj negativna) od elektrodne napetosti vodika in da je torej ta kovina bolj topljiva od vodika. Pozitivna elektrodna napetost glede na vodikovo elektrodo ne pomeni, da je pri tej kovini elektroda pozitivna glede na raztopino. Elektrodna napetost te kovine je še vedno negativna, vendar po absolutni vrednosti manjša od elektrodne napetosti vodika. Podatki za elektrodne napetosti posameznih kovin glede na vodikovo elektrodo so navadno podani pri določeni temperaturi in določeni koncentraciji kovinskih kationov v vodi. Elektrodno napetost pri drugih pogojih (temperatura, koncentracija) lahko izračunamo iz izraza 4.76.

### 4.2.3 Prekomembranski potencial: Nernstova in Goldmanova enačba

Obravnavamo sistem, v katerem membrana loči dve različni ionski raztopini. Membrana prepušča nekatere ione, ki se nahajajo v teh raztopinah. Kot primer bomo vzeli, da so to ioni  $\text{Na}^+$ ,  $\text{K}^+$  in  $\text{Cl}^-$ . Ti trije ioni igrajo ključno vlogo pri prenosu živčnih signalov, prepustnosti membran živčnih celic zanje so  $P_{\text{Na}^+} = 10^{-11} \text{ m/s}$ ,  $P_{\text{K}^+} = 10^{-9} \text{ m/s}$ ,  $P_{\text{Cl}^-} = 10^{-10} \text{ m/s}$ . Vidimo, da so membrane živčnih celic najbolj prepustne za kalijeve ione, manj za klorove in še manj za natrijeve ione. Pri vzdraženju živčnih celic se prepustnosti membrane spremenijo. Na tem mestu bomo kot primer obravnavali živčno celico v mirujočem stanju. Prekomembranski potencial se v tem primeru imenuje *mirovni potencial*.

Velikost mirovnega potenciala živčnih celic lahko dobro ocenimo, če predpostavimo, da je njihova membrana prepustna samo za kalijeve ione. V tem primeru je odvisen mirovni potencial od koncentracij kalijevih ionov v celici in zunaj celice. Tipična koncentracija kalijevih ionov v živčnih celicah je  $[K]_c = 135 \text{ mmol}/\ell$ , zunanja pa  $[K]_z = 4 \text{ mmol}/\ell$ . Kalijeve ioni zato zaradi difuzije prehajajo iz celice v zunanjo raztopino. Na ta način preide iz celice v izvencelični prostor tudi nekaj pozitivnega naboja. Pojav je analogen raztapljanju pozitivnih ionov pri elektrodi. Zaradi prehajanja pozitivnih kalijevih ionov se na zunanji strani membrane nabirajo pozitivni ioni, na notranji strani pa ustrezna količina negativnih ionov. Ustvari se potencialna razlika, ki zavira prehajanje pozitivnih ionov iz celice. V zelo kratkem času se vzpostavi termodinamsko ravnovesje, ki ga tako kot pri elektrodi dobimo, če izenačimo elektrokemijska potenciala v celici (z indeksom 1) in zunaj celice (z indeksom 2):

$$\mu_1 + ZF\varphi_1 = \mu_2 + ZF\varphi_2, \quad (4.78)$$

kjer sta kemijska potenciala v obeh raztopinah podana z

$$\mu_1 = \mu_{1,0} + RT\ln[K]_1 \text{ in } \mu_2 = \mu_{2,0} + RT\ln[K]_2,$$

z indeksom 0 pa smo označili stanje v raztopini s koncentracijo  $1 \text{ mol}/\ell$ . Za razliko med električnima potencialoma v celici in zunaj nje, (prekomembranski potencial  $U_c$ ) dobimo

$$U_c = \varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{RT}{ZF} \ln \frac{[K]_1}{[K]_2}, \quad (4.79)$$

kar da, če vstavimo ustrezni koncentraciji kalijevih ionov zunaj in znotraj celice in upoštevamo, da je  $Z = 1$ , vrednost  $-92 \text{ mV}$ . Potential znotraj živčne celice je negativen glede na potencial zunaj nje. Enačba 4.79 se imenuje Nernstova enačba. V fiziološki literaturi se velikokrat uporablja logaritem z bazo 10. Vrednost faktorja pred logaritmom je potem (za enovalentne ione) približno  $-60 \text{ mV}$ .

Biološke membrane so v splošnem prevodne tudi za druge ione, pri živčni celici gre poleg kalijevih predvsem še za natrijeve in klorove ione. V primerih, ko je membrana prevodna za več kot en ion, se termodinamsko ravnovesje ne vzpostavi, do potencialne razlike pa vseeno pride. Če bi namreč pozitivni in negativni ioni prehajali z difuzijo preko membrane neodvisno drug od drugega, bi v splošnem teklo preko membrane električni tok. Zaradi močnih elektrostatskih sil pa ostajata celična in zunanja raztopina električno nevtralni. V membrani se vzpostavi električno polje, ki poskrbi, da preko nje ne teče električni tok. Ustrezno napetost preko membrane v približku dobro opiše tako imenovana Goldmanova enačba:

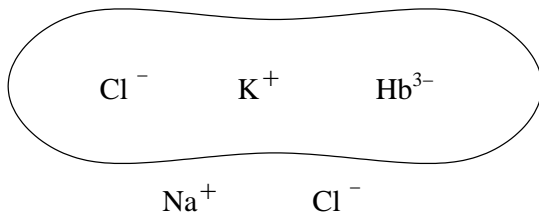
$$U_c = -60\text{mV} \log \frac{P_K[K]_1 + P_{Cl}[Cl]_2 + P_{Na}[Na]_1}{P_K[K]_2 + P_{Cl}[Cl]_1 + P_{Na}[Na]_2}$$

Če je prepustnost enega od ionov veliko večja od prepustnosti ostalih dveh, se Goldmanova enačba poenostavi v Nernstovo enačbo.

#### 4.2.4 Prekomembranski potencial pri rdeči krvni celici (Donnanovo ravnovesje)

Z Donnanovim ravnovesjem imamo opravka, če so molekule raztopljenih snovi, ki jih polprepustna membrana *ne* prepušča, električno nabite. Donnanovo ravnovesje se vzpostavi pri večini živih celic. V njihovih plazmah imamo namreč celo vrsto električno nabitih molekul beljakovin, ki jih membrane ne prepuščajo.

Kot primer si oglejmo rdeče krvne celice, suspendirane v tako imenovani fiziološki raztopini. Sistem lahko približno opišemo tako: izven celice je raztopina enovalentne soli (n. pr. NaCl), znotraj celice pa imamo ob raztopini enovalentne soli še molekule beljakovine hemoglobina (sl. 4.20). Membrana rdeče krvne celice prepušča vodo in klorove ione, zelo slabo prepušča katione, hemoglobina pa sploh ne. Slednji je električno nabit. Kakšen naboj nosi, je odvisno od vrednosti pH raztopine. Pri fiziološki vrednosti  $\text{pH} = 7,4$  nosi vsaka molekula hemoglobina približno tri negativne osnovne naboje:  $e \approx -3e_0$ , oziroma  $Z \approx -3$  (sl. 4.2).



Slika 4.20: Rdeča krvna celica, suspendirana v fiziološki raztopini.

Ker membrana rdeče krvne celice poleg vode prepušča tudi klorove ione, morata biti v ravnovesju enaka kemijska potenciala zunaj in znotraj celice tako za vodo, kot tudi za klorove ione. Kot bomo videli malo kasneje, mora biti koncentracija klorovih ionov v celici taka, da je zadoščeno zahtevi po električni nevtralnosti raztopine, in zato ne more biti enaka koncentraciji klorovih ionov zunaj celice. Podobno kot smo v prejšnjem podpoglavju, ko smo kot primer obravnavali živčno celico, ugotovili za kalijeve ione, si morata biti v ravnovesju tudi tukaj enaka elektrokemijska potenciala, to je vsoti kemijskega in električnega potenciala za klorove ione zunaj in znotraj celice:

$$\mu_1(\text{Cl}) - F\varphi_1 = \mu_2(\text{Cl}) - F\varphi_2. \quad (4.80)$$

Če vstavimo

$$\mu_1 = \mu_{1,0}(\text{Cl}) + RT \ln [\text{Cl}]_1,$$

$$\mu_2 = \mu_{2,0}(\text{Cl}) + RT \ln [\text{Cl}]_2,$$

dobimo za razmerje koncentracij klorovih ionov

$$r = \frac{[\text{Cl}]_1}{[\text{Cl}]_2} = e^{F(\varphi_1 - \varphi_2)/RT}. \quad (4.81)$$

Razmerje  $r$  se imenuje *Donnanovo razmerje*. Enačbo 4.81 bi lahko tudi obrnili, tako da bi izrazili razliko med potencialoma v odvisnosti od razmerja koncentracij klorovih ionov. Dobili bi ustrezno Nernstovo enačbo.

Velikost Donnanovega razmerja je odvisna od celotnega naboja v celici raztopljenih snovi, ki jih membrana ne prepušča. Namreč, zagotovljeno mora biti pogoju o *električni nevtralnosti* vsake raztopine posebej, kajti zaradi močnih elektrostatskih sil je skupni naboj v vsakem delu prostornine enak nič. Koncentracija klorovih ionov v celici je zato enaka

$$[\text{Cl}]_1 = [\text{K}]_1 + Z[\text{Hb}]_1 \quad (4.82)$$

V primeru rdeče krvne celice sta koncentraciji klorovih ionov v celici in izven nje različni zaradi naboja na hemoglobinu. Ker je naboj na hemoglobinu pri fiziološkem pH negativen, je koncentracija klorovih ionov znotraj celice manjša od koncentracije klorovih ionov zunaj celice, potencial v celici pa je glede na potencial zunaj celice negativen.

Poleg gornjih enačb mora veljati tudi enačba za enakost kemijskih potencialov vode. To upoštevamo tako, da izenačimo osmotska tlaka zunaj in znotraj celice,

$$\pi_2 = \pi_1. \quad (4.83)$$

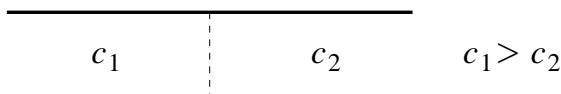
Osmozni tlak zunaj celice je sorazmeren dvakratni koncentraciji klorovih ionov, ker je zaradi elektronevtralnosti koncentracija natrijevih ionov enaka koncentraciji klorovih ionov, osmotski tlak v celici pa je sorazmeren vsoti koncentracij vseh raztopljenih snovi, zato velja

$$2[\text{Cl}]_2 = [\text{Cl}]_1 + [\text{K}]_1 + [\text{Hb}]_1. \quad (4.84)$$

Pri celici, kot je rdeča krvna celica, nam ni treba upoštevati hidrostatskih tlakov. Voda v celico priteka ali odteka, dokler ni zadoščeno enačbi 4.84. Podatki, ki jih potrebujemo, da izračunamo volumen rdeče krvne celice in prekomembranski potencial, so količina kalija v celici ( $9,3 \cdot 10^{-15}$  mol), količina hemoglobina v celici ( $0,5 \cdot 10^{-15}$  mol) in koncentracija natrijevega klorida v zunanji raztopini (0,15 mol/ℓ).

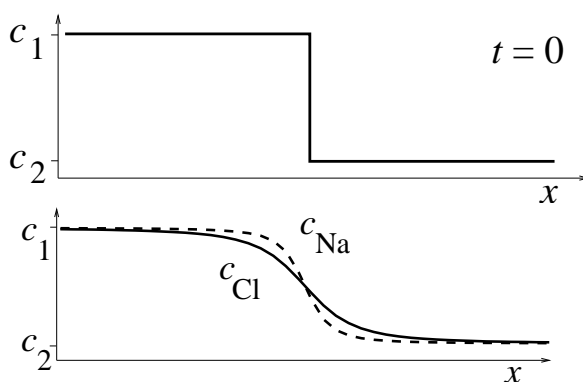
### 4.2.5 Difuzijski potencial

Razlika električnih potencialov se lahko pojavi na meji med dvema različnima raztopinama tudi če med njima ni membrane. Natančneje si bomo ogledali le primer, ko je v obeh raztopinah raztopljen isti elektrolit (n. pr. NaCl), le da sta koncentraciji različni (sl. 4.21). Označimo z indeksom 1 del raztopine z večjo koncentracijo, z indeksom 2 pa del raztopine z manjšo koncentracijo NaCl.

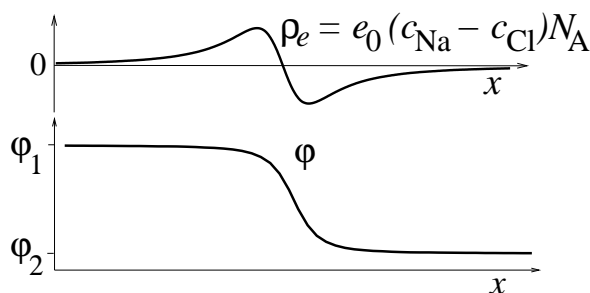


Slika 4.21: Shema stika dveh raztopin NaCl z različnima koncentracijama.

Ioni  $\text{Na}^+$  in  $\text{Cl}^-$  torej začno difundirati iz raztopine 1 v raztopino 2. Ker so ioni  $\text{Cl}^-$  bolj gibljivi od ionov  $\text{Na}^+$ , tudi hitreje difundirajo. Zato preide takoj na začetku več negativnih kot pozitivnih ionov iz raztopine 1 v raztopino 2 (sl. 4.22), ki zato postane negativno nabita glede na raztopino 1. Ustvarjena potencialna razlika zavira difuzijo bolj gibljivih ionov  $\text{Cl}^-$  in pospešuje manj gibljive ione  $\text{Na}^+$  (sl. 4.23). Potentialna razlika narašča, dokler ni tako velika, da se hitrost difuzije pozitivnih in negativnih ionov izenači. Tedaj pozitivni in negativni ioni difundirajo skupaj in potencialna razlika med obema raztopinama doseže ravnovesno vrednost (*difuzijski potencial*), ki se ne spreminja več, če le vzdržujemo v obeh predelkih stalni koncentraciji  $c_1$  in  $c_2$ .



Slika 4.22: Odvisnost koncentracije od  $x$  v začetnem trenutku (zgoraj) in po določenem času (spodaj).



Slika 4.23: Odvisnost gostote naboja (zgoraj) in potenciala (spodaj) od  $x$ .

Videli smo, da je za nastanek difuzijskega potenciala potrebno, da imamo dve raztopini z različnima koncentracijama ter da sta obe vrsti ionov različno gibljivi. Tu smo obravnavali najpreprostejši primer, ko je v obeh raztopinah isti elektrolit, le njegova koncentracija je različna. Z računom so

dobili v tem primeru za difuzijski potencial izraz

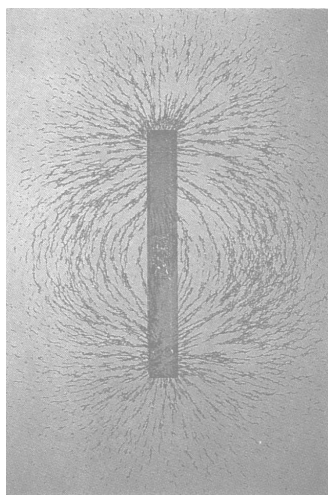
$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{RT}{F} \frac{\beta_- - \beta_+}{\beta_+ + \beta_-} \ln \frac{c_2}{c_1} . \quad (4.85)$$

kjer sta  $\beta_+$  in  $\beta_-$  gibljivosti pozitivnega in negativnega iona,  $c_1$  in  $c_2$  pa koncentraciji soli v obeh predelkih. Za v uvodu opisani zgled difuzije natrijevih in klorovih ionov veljata naslednji vrednosti za gibljivost:  $\beta_+ = 5,2 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{Vs}$  in  $\beta_- = 7,9 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{Vs}$ , kar da za razmerje  $(\beta_- - \beta_+)/(\beta_+ + \beta_-) \approx 0,206$ .

## 4.3 Magnetno polje in pretok

### 4.3.1 Uvod

Nekatere snovi, ki jih imenujemo stalni magneti, delujejo na okolne snovi z magnetno silo. Za tej sili ustrezno magnetno polje je značilno, da kaže v določeno smer. Na sliki 4.24 vidimo opilke, ki kažejo v smer magnetnega polja, ki ga ustvarja paličasti magnet. Razpored opilkov nas spominja na silnice pri električnem dipolu (sl. 4.8). Silnice magnetnega polja so usmerjene od severnega (N) proti južnemu (S) polu in so zaključene.



Slika 4.24: Opilki kažejo smer magnetnega polja pri paličastem magnetu. (vzeto iz: D. C. Giancoli, Physics: principles with applications (third edition), Prentice-Hall International Editions, 1991)

### 4.3.2 Amperova sila med žicama

Amperova sila med vodniki s stacionarnimi tokovi je magnetni analog Coulombove sile med naboji. Pri eksperimentih z dvema ravnima, vzporednima tokovnima vodnikoma\* na razdalji  $r$ , po katerih tečeta konstantna tokova  $I_1$  in  $I_2$ , ugotovimo, da na dolžino  $l$  vodnika 2 deluje sila (sl. 4.25)

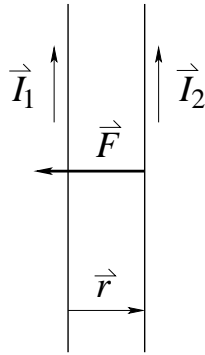
$$\vec{F} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi r} \frac{\vec{r}}{r} . \quad (4.86)$$

kjer je induksijska konstanta  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$ . Smerni enotski vektor  $\vec{r}/r$  kaže pravokotno od vodnika 1 k vodniku 2. Za istosmerna tokova je sila privlačna, za nasprotno usmerjena pa je odbojna. Slednjo enačbo lahko izkoristimo za definicijo velikosti toka: Po dveh zelo dolgih vzporednih vodnikih, ki sta razmaknjena za 1 m, teče tok 1 A, če deluje prvi vodnik na 1 m dolg odsek drugega vodnika s silo  $2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$ .

---

\*pogovorno žicama





Slika 4.25: Zaradi električnega toka  $\vec{I}_1$  po prvem vodniku deluje na dolžino  $l$  drugega vodnika, po katerem teče tok  $\vec{I}_2$ , sila  $\vec{F}$ .

### 4.3.3 Magnetno polje

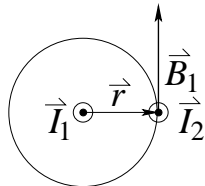
Podobno, kot smo pri električni sili vpeljali jakost električnega polja  $\vec{E}$  in z njo izrazili Coulombovo silo, lahko postopamo tudi v primeru Amperove sile. Vpeljimo gostoto magnetnega polja ( $\vec{B}_1$ ) z enačbo

$$\vec{F} = l\vec{I}_2 \times \vec{B}_1. \quad (4.87)$$

Enota za gostoto magnetnega polja je 1 T (Tesla) ( $1 \text{ T} = 1 \text{ Vs/m}^2$ ) (tabela 4.4). Vektor toka  $\vec{I}_2$  na drugem ravnem vodniku smo vpeljali tako, da je po absolutni vrednosti enak  $I_2$ , smer pa je določena s smerjo toka. Tako dobimo (en. 4.86), da je

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{2\pi r} \vec{I}_1 \times \frac{\vec{r}}{r}, \quad (4.88)$$

kjer enotski vektor  $\vec{r}/r$  kaže pravokotno na prvi vodnik.  $\vec{B}_1$  ima polarno smer po **Oerstedovem pravilu** za smer magnetnega polja žice. Glasi se takole: palec desne roke postavimo v smeri toka, zakrivimo prste in njihova smer sedaj kaže v smeri magnetnega polja, ki ga ustvarja tok (sl. 4.26). Sila, ki je sorazmerna vektorskemu produktu  $\vec{I}_2 \times \vec{B}_1$ , ima smer pravokotne veznice med obema žicama ( $-\vec{r}$ ).

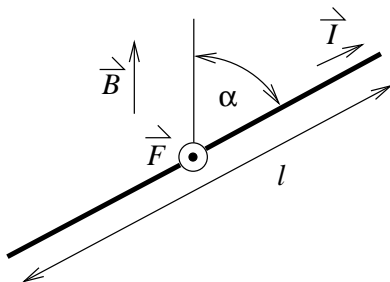


Slika 4.26: Gostota magnetnega polja zaradi toka po vodniku 1 na mestu vodnika 2 ( $\vec{B}_1$ ) kaže pravokotno na ravnino, v kateri ležita vzporedna vodnika (sl. 4.25).

V enačbi 4.87 nastopa vektorski produkt (dodatek, str. 262), zato je velikost sile sorazmerna s sinusom kota med vektorjema toka in magnetnega polja. Velikost sile na ravni vodnik dolžine ( $l$ ), po katerem teče tok ( $I$ ), v zunanjem magnetnem polju ( $B$ ) je potemtakem

$$F = lIB \sin \alpha, \quad (4.89)$$

kjer je  $\alpha$  kot med smerjo toka in smerjo magnetnega polja (sl. 4.27).



Slika 4.27: Sila na električni vodnik je pravokotna na magnetno polje in smer toka.

Tabela 4.4: Vrednosti magnetnih polj.

pojav	$B$ [T]
možganska aktivnost	$1 \cdot 10^{-15}$
srčna aktivnost	$1 \cdot 10^{-10}$
zemeljsko magnetno polje	$2 - 7 \cdot 10^{-5}$
železni magnet	$1 \cdot 10^{-1}$
pospeševalniki	$1 \cdot 10^1$
atomska jedro	$1 \cdot 10^{12}$

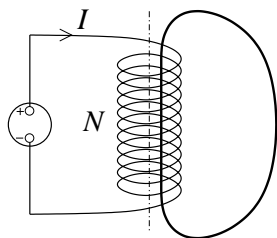
#### 4.3.4 Amperov zakon

Iz enačbe 4.88 se zdi, da je magnetno polje zelo zapletena funkcija toka v žici. Bolj preprosto bomo vsebino te enačbe lahko zapisali, če integriramo magnetno polje po zanki z radijem  $r$ . Ker je vektor položaja na zanki  $d\vec{s}$  ves čas očitno vzporeden s smerjo magnetnega polja, dobimo

$$\int_{(zanka)} \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \cdot 2\pi r = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot 2\pi r = \mu_0 I. \quad (4.90)$$

Integral magnetnega polja po poljubni krožni zanki je sorazmeren toku, ki prebada to zanko. Zgornji ugotovitvi pravimo tudi Amperov zakon.

#### Magnetno polje tuljave



Slika 4.28: Zaključena zanka opisuje pot pri integraciji magnetnega polja, ki nastane zaradi električnega toka ( $I$ ). Odsek zanke v tuljavi je vzporeden z njeno osjo.

Vzemimo dolgo tokovno navitje oziroma tuljavo. Če je tuljava dovolj dolga, obstaja magnetno polje zgolj v njeni notranjosti, kjer je povsod enako (homogeno), zunaj pa je enako nič. Amperov zakon uporabimo tako, da integriramo gostoto magnetnega polja po zaključeni zanki, kjer je celoten odsek zanke v tuljavi vzporeden z osjo tuljave (sl. 4.28). Zunaj zanke integracija nima nobenega pomena, ker je magnetno polje enako nič. Amperov zakon dobimo v obliki

$$\int_{(zanka)} \vec{B} \cdot d\vec{s} = Bl = \mu_0 NI. \quad (4.91)$$

Tu je  $l$  dolžina tuljave,  $NI$  pa je vsota tokov preko vseh zank tuljave z  $N$  navoji. Magnetno polje znotraj tuljave je potem enako

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}. \quad (4.92)$$

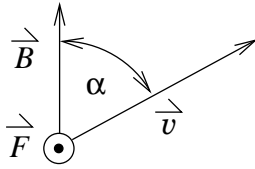
Magnetno polje tuljave je torej obratno sorazmerno z njeno dolžino in premo sorazmerno s številom navojev na tuljavi.

#### 4.3.5 Sila na gibajoč naboj v magnetnem polju

Če poznamo izraz za Amperovo silo med dvema vodnikoma, lahko izračunamo tudi silo na naboj, ki se giblje v zunanjem magnetnem polju. Sila na pozitiven naboj je

$$\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B}, \quad (4.93)$$

kar se ujema z enačbo 4.87, če upoštevamo, da je  $\vec{I} = S n e_0 \vec{v}$  (en. 4.56) in da je število nabojev v vodniku dolžine  $l$  enako  $n l S$ . Ker v slednji enačbi torej nastopa vektorski produkt (str. 262), je velikost sile sorazmerna s sinusom kota med vektorjema hitrosti in magnetnega polja ( $\alpha$ ),  $F = e v B \sin \alpha$ . Smer delovanja sile pri nabitem delcu ugotovimo, ko vrtimo smer hitrosti po najkrajši poti proti smeri magnetnega polja (sl. 4.29). Pri negativno nabitem delcu ima sila nasprotno smer kot pri pozitivnem delcu z isto hitrostjo zaradi nasprotnega naboja.



Slika 4.29: Pri izbranem kotu  $\alpha$  kaže sila naravnost proti nam, če sta vektorja  $\vec{v}$  ter  $\vec{B}$  v ravnini in če je naboj  $e$  pozitiven.

Ker je sila pravokotna na hitrost (t. j. na smer gibanja delca), ne more spreminjati njegove hitrosti temveč samo smer gibanja. Ker sila zaradi magnetnega polja ne spremeni velikosti hitrosti, tudi nobenega dela ne opravi na delcu.

### Kroženje nabitega delca

Nabiti delec pride v magnetno polje, ki je pravokotno glede na smer njegove hitrosti ( $\vec{v} \perp \vec{B}$ ). Ko se giblje v polju, deluje magnetna sila pravokotno glede na smer njegovega trenutnega gibanja. Zaradi te sile se delec giblje pospešeno pravokotno ( $a_r$ ) na smer njegove trenutne hitrosti. Velikost hitrosti se ne spreminja. Ker se delec giblje tako, da je smer pospeška pravokotna na smer hitrosti, kroži v ravnini, ki je pravokotna na magnetno polje (sl. 4.30). Po Newtonovem zakonu je magnetna sila (en. 4.93) enaka produktu mase delca ( $m$ ) in radialnega pospeška, torej

$$e v B = m a_r . \quad (4.94)$$

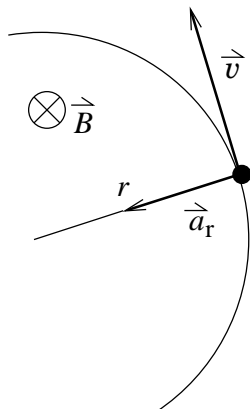
Če upoštevamo izraz za pospešek v smeri radija (en. 2.47)

$$a_r = \frac{v^2}{r} , \quad (4.95)$$

kjer sta  $v$  hitrost delca in  $r$  polmer kroženja, dobimo izraz

$$r = \frac{m v}{e B} . \quad (4.96)$$

Pri večji hitrosti ima nabiti delec večji polmer kroženja.



Slika 4.30: Nabiti delec v magnetnem polju se giblje po krožnici, če je njegova hitrost pravokotna na homogeno magnetno polje.

### Hallov pojav

Hallov pojav je nastanek električne napetosti med stranicama tokovodnika, ki ga postavimo v magnetno polje. Če teče električni tok po vodniku v magnetnem polju, se delci z nabojem gibljejo in na njih deluje sila magnetnega polja. Zaradi te sile se delci z nabojem kopičijo na eni strani vodnika in njihov primanjkljaj na nasprotni strani povzroči nastanek električnega polja v vodniku. Dogajanje je prikazano na sliki 4.31.

Razmere so stacionarne, ko sta sili električnega in magnetnega polja enaki

$$F_{\text{el}} = F_{\text{m}}, \quad (4.97)$$

in, če izpišemo ustrezni sili (enačbi 4.6 in 4.93), dobimo

$$eE = evB, \quad (4.98)$$

kjer so  $e$  naboj delca,  $v$  njegova hitrost,  $E$  jakost električnega polja in  $B$  gostota magnetnega polja.

Če z  $b$  označimo razdaljo med obema stranema vodnika, lahko zapišemo Hallovo napetost kot

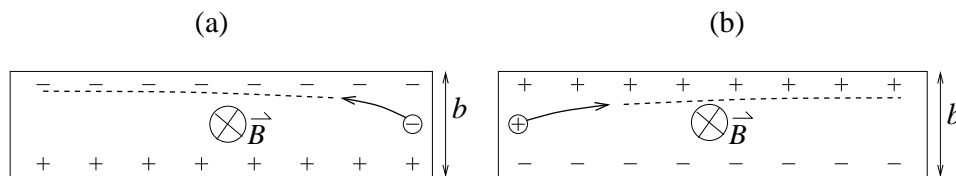
$$U = Eb = vBb, \quad (4.99)$$

saj je električna poljska jakost v tem primeru, ko je polje homogeno, kar kvocient napetosti in razdalje ( $E = U/b$ ).

Hallovo napetost (en. 4.99) lahko ob upoštevanju zveze med tokom in hitrostjo delcev ( $I = Senv$ , prim. en. 4.56) zapišemo v obliki

$$U = \frac{IBb}{neS}. \quad (4.100)$$

Merljive količine so: sama Hallova napetost ( $U$ ), električni tok ( $I$ ), gostota magnetnega polja ( $B$ ) in dimenzije vodnika ( $b$ ,  $S$ ). Iz enačbe 4.100 lahko potem izračunamo gostoto delcev na prostornino ( $n$ ).



Slika 4.31: Razporeditev delcev z nabojem, če teče tok od leve proti desni. Sila deluje pri izbrani smeri magnetnega polja navzgor na negativne ( $\ominus$ ) in pozitivne ( $\oplus$ ) delce. Slika (a) ustreza primeru električnega toka po kovini, kjer k toku prispevajo elektroni. Slika (b) ustreza n. pr. električnemu toku pri elektrolitu, pri katerem prispevajo k toku v glavnem kationi. (Ob predpostavki, da je gibljivost anionov bistveno manjša od gibljivosti kationov.)

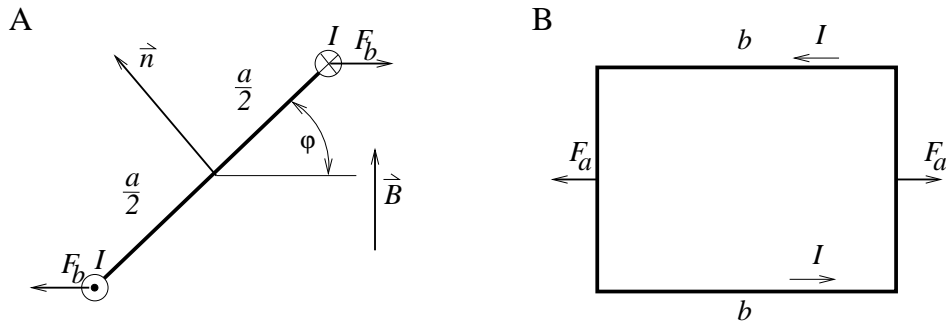
### Navor na tokovno zanko v magnetnem polju in Amperova analogija

V magnetno polje postavimo zanko v obliki pravokotnika s stranicama  $a$  ter  $b$  in s tokom  $I$  tako, da je smer magnetnega polja pravokotna na stranici  $b$  (sl. 4.32). Rezultanta vseh sil, ki delujejo v homogenem magnetnem polju na sklenjeno zanko, je enaka nič. To pa ne velja za rezultanto navorov. Na stranici  $a$  in na stranici  $b$  delujeta nasprotno enaki sili. Sili na stranici  $a$  delujeta v ravnini zanke in zato ne prispevata k navoru. Sili na stranici  $b$  pa prispevata k navoru in sestavljata dvojico sil z navorom

$$M = 2\frac{a}{2}F_b \sin \varphi = aIbB \sin \varphi = SIB \sin \varphi, \quad (4.101)$$

kjer je  $S = ab$  ploščina zanke. Izkaže se, da velja slednja enačba tudi za krožno zanko, pri čemer je  $S$  njena ploščina.\*

\*Vsako zanko moremo sestaviti iz samih majhnih pravokotnih zank, zato velja enačba 4.101 za ravninsko zanko s poljubno obliko.



Slika 4.32: Dvojica sil deluje z navorom na zanko, po kateri teče tok. Prikazana sta pogleda na zanko od strani (A) in z leve (B).

Navor na zanko lahko zapišemo tudi v vektorski obliki, ki vključuje tudi smer delovanja navora:

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}, \quad (4.102)$$

kjer je  $\vec{p}_m = IS\vec{n}$  magnetni dipol zanke.  $\vec{n}$  je enotski vektor, ki ima smer normale na ploskev.  $\vec{p}_m$ , ki ga usvari tok  $I$ , ima smer normale na ploskev. Iz enačbe 4.102 razberemo, da se magnetni dipol hoče usmeriti v smer zunanjega magnetnega polja ( $\vec{B}$ ).

Enako kot pri električnem je tudi pri magnetnem dipolu sprememba energije dipola enaka delu, ki ga opravimo pri vrtenju (str. 124). Zato je tudi izraz za energijo magnetnega dipola ( $W(\varphi)$ ) na sliki 4.32 analogen izrazu za energijo električnega dipola (en. 4.31):

$$W(\varphi) = -p_m B \cos \varphi. \quad (4.103)$$

Stabilno ravnovesje imamo in energija magnetnega dipola je najmanjša, ko  $\vec{p}_m$  kaže v smeri  $\vec{B}$ .

Stalni magneti so dejansko magnetni dipoli (sl. 4.24). Opilki na sliki 4.24 se usmerijo vzdolž silnic magnetnega polja, ki ga ustvarja magnetni dipol in potekajo analogno silnicam električne poljske jakosti pri električnem dipolu.

### 4.3.6 Magnetni pretok

Magnetni pretok je produkt gostote magnetnega polja in površine ploskve, ki jo prebadajo silnice magnetnega polja (sl. 4.33). Ker je lahko ploskev nagnjena glede na smer magnetnega polja ( $\vec{B}$ ) (sl. 4.33), zapišemo, če je magnetno polje homogeno, izraz za magnetni pretok ( $\phi_m$ ) v obliki

$$\phi_m = BS \cos \varphi = (\vec{B} \cdot \vec{n})S, \quad (4.104)$$

splošno pa v obliki

$$\phi_m = \int \vec{B} \cos \varphi dS. \quad (4.105)$$

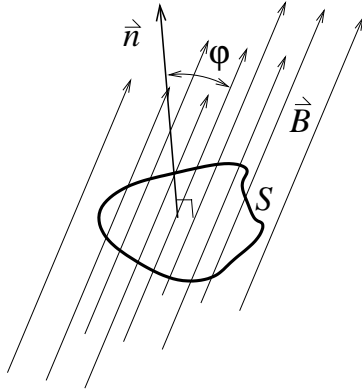
Enačba 4.105 je analogna enačbi 2.131, ki povezuje tok tekočine skozi presek  $S$  z gostoto njenega toka (str. 2.131).

### 4.3.7 Indukcija

Časovno spreminjanje magnetnega pretoka povzroči nastanek električnega polja. Do tako imenovane inducirane napetosti lahko pride na tri različne načine, ki jih bomo opisali.

Pri prvem načinu obravnavamo spreminjanje magnetnega pretoka zaradi spreminjanja velikosti ploskve, ki jo objema zanka s prečko (sl. 4.34). Prečka drsi po zanki s hitrostjo  $v$ . Z enako hitrostjo kot prečka se po njej gibljejo tudi nabiti delci, zato na njih deluje sila zaradi magnetnega polja. Ker se pozitivni in negativni delci gibljejo v isto smer, deluje sila nanje v nasprotni smeri. Med koncema prečke se vzpostavi napetost, ki jo imenujemo inducirana napetost

$$U_i = lvB, \quad (4.106)$$

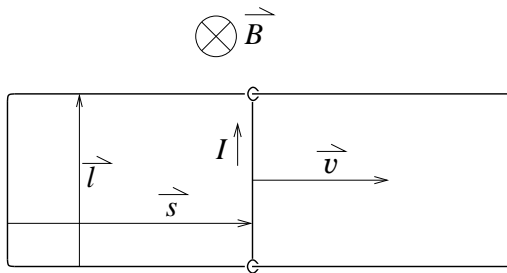


Slika 4.33: K magnetnemu pretoku prispevajo silnice, ki gredo skozi ploskev  $S$ .  $\vec{n}$  je enotski vektor, ki je pravokoten na ploskev  $S$ .

kjer je  $l$  dolžina prečke in  $B$  gostota magnetnega polja. Slednjo enačbo smo zapisali za primer, ko so vektorji  $\vec{l}$ ,  $\vec{v}$  in  $\vec{B}$  (sl. 4.34) pravokotni med seboj. V primeru, da vektorji  $\vec{l}$ ,  $\vec{v}$  in  $\vec{B}$  niso pravokotni, dobimo za inducirano napetost izraz

$$U_i = (\vec{l} \times \vec{v}) \cdot \vec{B}. \quad (4.107)$$

Inducirana napetost požene tok  $I$ , ki zmanjša magnetni pretok skozi zanko. Ker je prečka v magnetnem polju, deluje zaradi tega toka nanjo sila (prim. z enačbo 4.87). *Lenzovo pravilo* pravi, da sila zaradi električnega toka, ki ga povzroči inducirana napetost, deluje v nasprotni smeri gibanja vodnika.



Slika 4.34: Magnetni pretok skozi zanko se spreminja zaradi gibanja prečke proti desni s hitrostjo  $\vec{v}$ .

Indukcijski zakon (en. 4.107) lahko zapišemo v obliki

$$U_i = -\frac{d\vec{S}}{dt} \cdot \vec{B}, \quad (4.108)$$

kjer smo upoštevali, da produkt dolžine zanke in hitrosti ( $lv$ ) predstavlja hitrost spreminjanja površine zanke ( $dS/dt$ ). V bolj splošni obliki pa se indukcijski zakon glasi

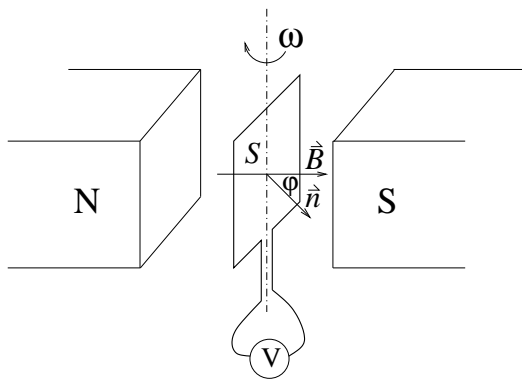
$$U_i = -\frac{d\phi_m}{dt}. \quad (4.109)$$

Slednja enačba pove, da se inducira napetost zaradi spreminjanja magnetnega pretoka skozi zanko.

Magnetni pretok skozi zanko (en. 4.104) se na primer spremeni tudi pri spreminjanju kota med smerjo magnetnega polja in zanke ( $\varphi$ ). To se uporablja pri generatorju izmenične napetosti (sl. 4.35), kjer je kot  $\varphi$  sorazmeren s časom:  $\varphi = \omega t$ , pri čemer je  $\omega$  kotna hitrost zanke. Magnetni pretok skozi zanko zapišemo z enačbo  $\phi_m = BS \cos \omega t$  (en. 4.104), zato je inducirana napetost (en. 4.109) enaka

$$U_i = -\frac{d\phi_m}{dt} = -BS \frac{d \cos \omega t}{dt} = \omega BS \sin \omega t. \quad (4.110)$$

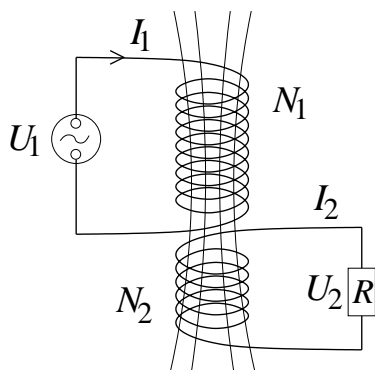
Do tretjega način indukcije pride pri časovnem spreminjanju gostote magnetnega polja. To se uporablja pri transformatorju. V prvi tuljavi poženemo tok, da ustvarimo magnetno polje (en. 4.92)



Slika 4.35: Zanka v magnetnem polju kroži s konstantno kotno hitrostjo  $\omega$ . Z "N" in "S" sta označena različna pola trajnega magneta.  $\vec{n}$  je normala na zanko površine  $S$ .

z izmenično napetostjo ( $U_1$ ), zato imamo v obeh tuljavah izmenično magnetno polje (sl. 4.36), ki ga lahko zapišemo z enačbo

$$B = B_0 \sin \omega t .$$



Slika 4.36: Transformator ima dve tuljavi. Gostota magnetnega polja je v obeh tuljavah enaka.

Zaradi spreminjajočega se magnetnega pretoka se v tuljavah inducirata izmenični napetosti

$$U_{i1} = -N_1 S \frac{dB}{dt} \quad (4.111)$$

in

$$U_{i2} = -N_2 S \frac{dB}{dt} , \quad (4.112)$$

ki sta sorazmerni s številom ovojev  $N_1$  in  $N_2$ . Namreč, večje kot je število zank, sorazmerno večja je tudi napetost. Ko slednji enačbi delimo, dobimo, da je razmerje induciranih napetosti enako razmerju števila ovojev, torej

$$\frac{U_{i1}}{U_{i2}} = \frac{N_1}{N_2} . \quad (4.113)$$

Če so izgube v transformatorju zanemarljive, sta napetosti v prvi tuljavi uravnovešeni ( $U_1 + U_{i1} = 0$ ) in dobimo za amplitudi napetosti

$$\frac{U_{10}}{U_{20}} = \frac{N_1}{N_2} , \quad (4.114)$$

pri čemer smo tudi upoštevali, da je amplituda napetosti na priključkih druge tuljave enaka amplitudi inducirane napetosti ( $U_{i20} = U_{20}$ ).

### Samoindukcija ali lastna indukcija

Vsaka tokovna zanka ustvarja magnetno polje in magnetni pretok ( $\phi$ ), ki sta sorazmerna z električnim tokom, torej

$$\phi_m = LI , \quad (4.115)$$

kjer je  $L$  induktivnost zanke. Enota za induktivnost je Henry (Vs/A). Do inducirane napetosti pride, če se po tokovni zanki spreminja električni tok. Zaradi sorazmernosti med električnim tokom in magnetnim pretokom lahko ob upoštevanju indukcijskega zakona (en. 4.109) zapišemo

$$U_i = -L \frac{dI}{dt} . \quad (4.116)$$

Izpeljimo izraz za induktivnost tuljave. Magnetni pretok skozi en ovoj pri tuljavi je enak produktu površine ovoja in gostote magnetnega polja ( $SB$ ). Skupen magnetni pretok za tuljavo ( $\phi_{m,N}$ ) je enak produktu magnetnega pretoka skozi en ovoj in števila ovojev ( $N$ ):

$$\phi_{m,N} = NSB . \quad (4.117)$$

Če upoštevamo izraz za gostoto magnetnega polja v tuljavi (en. 4.92), dobimo

$$\phi_{m,N} = LI \quad (4.118)$$

z induktivnostjo tuljave

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l} . \quad (4.119)$$

### 4.3.8 Gostota energije magnetnega polja

Izračunamo električno delo, ki se opravi pri povečevanju toka na tuljavi ( $I'$ ) od vrednosti 0 do  $I$ . Diferencial dela na tuljavi ( $dA$ ) pri povečanju naboja za  $de'$  v času  $dt$  je enak

$$dA = -U_i de' = -U_i I' dt = L \frac{dI'}{dt} I' dt = LI' dI' , \quad (4.120)$$

kjer smo upoštevali zvezo med inducirano napetostjo in tokom na tuljavi (en. 4.116). Za celotno delo dobimo

$$A = \int_0^I LI' dI' = \frac{LI^2}{2} . \quad (4.121)$$

Energija v tuljavi, ki jo pripišemo magnetnemu polju, je enaka delu  $A$ ,  $W_B = A$ . Če v izrazu za energijo magnetnega polja upoštevamo izraz za induktivnost tuljave (en. 4.119) in izraz za gostoto magnetnega polja v odvisnosti od električnega toka (prim. z enačbo 4.92), zapišemo

$$W_B = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 S}{l} \left( \frac{lB}{\mu_0 N} \right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} Sl . \quad (4.122)$$

V faktorju  $B^2/(2\mu_0)$  spoznamo izraz za gostoto energije magnetnega polja, saj produkt  $Sl$  predstavlja prostornino tuljave. Gostota energije magnetnega polja je v poljubnem primeru enaka

$$w_B = \frac{B^2}{2\mu_0} . \quad (4.123)$$

### 4.3.9 Snov v magnetnem polju

#### Magnetizacija

V naravi obstajajo osnovni delci, atomi in molekule, ki imajo magnetni dipol. Molekula ima lahko magnetni dipol tudi zaradi zunanjšega magnetnega polja. Če vektorsko seštejemo vse posamezne magnetne dipole molekul v snovi, dobimo skupen magnetni dipol. Magnetni dipol na volumsko enoto imenujemo magnetizacija. Magnetizacija je torej enaka produktu števila magnetnih dipolov na prostorninsko enoto ( $n$ ) in povprečnega magnetnega dipola ( $\vec{p}_m$ )

$$\vec{M} = n\vec{p}_m , \quad (4.124)$$

Magnetizacija opiše povprečno usmerjenost jedrskih magnetnih dipolov.



## Permeabilnost

Če damo snov v magnetno polje, ki ga določa električni tok ali trajni magnet, se na mestu, kjer je sedaj snov, magnetno polje spremeni. To pomeni, da gostota magnetnega polja na mestu, kjer je snov ( $B$ ), ni enaka gostoti magnetnega polja, če na tem mestu snovi ne bi bilo ( $B_0$ ). Gostota magnetnega polja v snovi ( $B$ ) je sorazmerna z gostoto zunanjega magnetnega polja ( $B_0$ ), ki je določena s tokom ali trajnim magnetom,

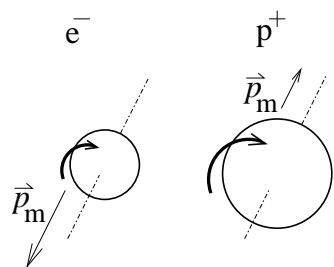
$$B = \mu B_0 \quad (4.125)$$

kjer je  $\mu$  permeabilnost.

Glede na magnetne lastnosti poznamo tri vrste snovi. Pri diamagnetnih in paramagnetnih snoveh, kjer pridejo do izraza lastnosti posameznega atoma ali molekule, je permeabilnost približno ena – diamagnetne snovi imajo permeabilnost malo manjšo kot ena in paramagnetne snovi imajo permeabilnost malo večjo kot ena. Pri feromagnetnih snoveh, kjer pridejo do izraza lastnosti večjega dela snovi, je permeabilnost precej večja kot ena.

Diamagnetne lastnosti pojasnimo na osnovi električnega toka po zanki. Predstavljamo si, da elektroni, ki krožijo okoli jedra, ustvarijo električni tok po sklenjeni zanki. Zaradi zunanjega magnetnega polja pa se pri tokovni zanki inducira napetost, ki zmanjša magnetni pretok, kot smo ugotovili v poglavju 4.3.7. Skladno z zmanjšanjem magnetnega pretoka se zmanjša tudi magnetno polje.

Paramagnetne lastnosti pojasnimo na osnovi magnetnega dipola elektronov. Elektrone si predstavljamo kot vrteče kroglice (sl. 4.37). Ker so električno nabiti, ustvarijo magnetni dipol, podobno kot ga ustvari električni tok po sklenjeni zanki (sl. 4.32). Iz izraza za navor na magnetni dipol (en. 4.102 na strani 143) pa je razvidno, da navor usmerja magnetne dipole v smer zunanjega magnetnega polja. Če so magnetni dipoli v snovi v povprečju usmerjeni v smer zunanjega magnetnega polja, je gostota magnetnega polja v snovi večja kot gostota zunanjega magnetnega polja na tem mestu, če snovi ne bi bilo.

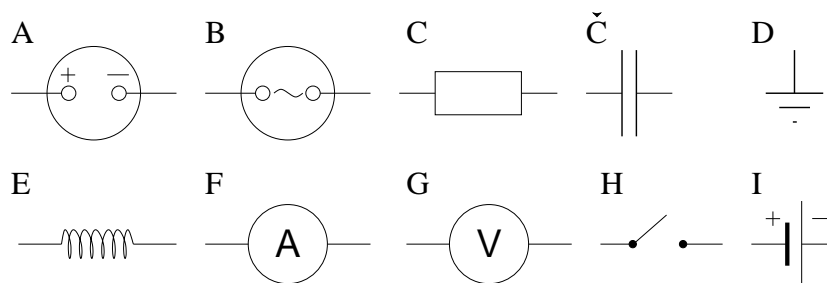


Slika 4.37: Elektroni ( $e^-$ ) in protoni ( $p^+$ ) se vrtijo okrog lastne osi. Če imata elektron in proton isto smer vrtenja, sta smeri njunih magnetnih dipolov nasprotni, skladno z “električnim tokom”, ki ga ustvarjata nasprotno nabiti vrteči kroglici.

## 4.4 Električna vezja

### 4.4.1 Elementi električnih vezij

V električnih vezjih so v splošnem lahko vezani elementi z različnimi lastnostmi. V shemah električnih vezij označujemo različne elemente z različnimi dogovorjenimi oznakami (sl. 4.38).



Slika 4.38: Oznake za elemente električnih vezij: izvor enosmerne napetosti (A), izvor izmenične napetosti (B), upor (C), kondenzator (Č), ozemljitev (D), tuljava (E), ampermeter (F), voltmeter (G), stikalo (H) in starejša oznaka za izvor enosmerne napetosti (I).

### 4.4.2 Izvori napetosti

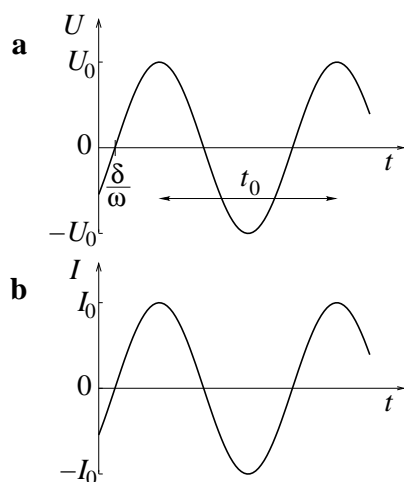
V električnih vezjih lahko nastopajo različni izvori napetosti. Obravnavali bomo primere, kjer je napetost na izvoru enosmerne napetosti stalna in kjer se napetost na izvoru spreminja. Če se napetost spreminja periodično, govorimo o izmenični napetosti. Oznaki za izvor enosmerne in izmenične napetosti sta narisani na slikah 4.38A in B. Kot primer si bomo ogledali harmonično in žagasto napetost. Če so spremembe neperiodične, pa imamo velikokrat opravka s sunki električne napetosti.

#### Harmonična napetost

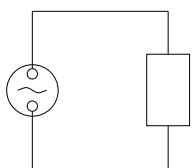
Potek harmonične izmenične napetosti

$$U = U_0 \sin(\omega t + \delta), \quad (4.126)$$

kjer je  $U_0$  amplituda napetosti in  $\delta$  fazni zamik, je narisano na sliki 4.39a. Zveza med krožno frekvenco ( $\omega$ ), frekvenco\* ( $\nu$ ) in časom ene periode ( $t_0$ ) je taka kot pri nihanju ali valovanju:  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/t_0$ .



Slika 4.39: Prikaz spreminjanja harmonične izmenične napetosti (a) in toka (b) na upor.



Slika 4.40: Vezava upora na izvor izmenične napetosti.

Če vezemo upor na izvor izmenične napetosti (sl. 4.40), je električni tok v vsakem trenutku sorazmeren z napetostjo po Ohmovem zakonu (en. 4.65). Zato se tudi električni tok po vezju izmenično spreminja.

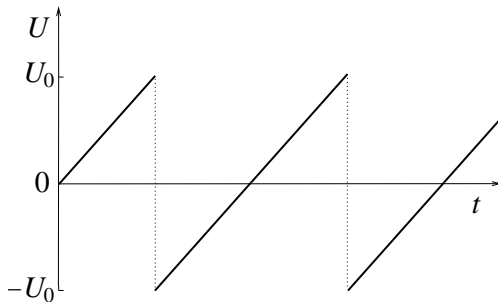
$$I = I_0 \sin(\omega t + \delta),$$

kot je prikazano na sliki 4.39b.

#### Žagasta napetost

Ena od možnih periodičnih odvisnosti napetosti od časa je žagasta napetost, ki je prikazana na sliki 4.41.

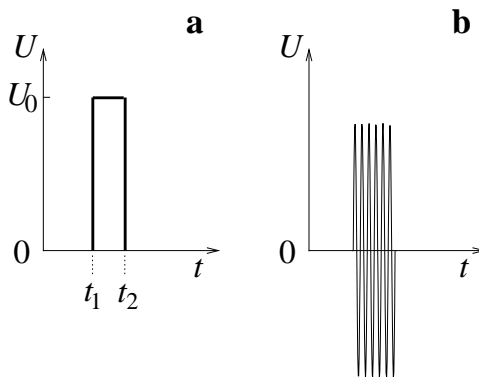
\*Pri hišni napeljavi je frekvenca enaka 50 Hz.



Slika 4.41: Ob določenih časih se napetost skokovito spremeni iz  $U_0$  na  $-U_0$ .

### Napetostni sunki

O napetostnem sunku govorimo, ko se napetost kmalu po tem, ko se spremeni, vrne na prvotno vrednost. Velikost pravokotnega napetostnega sunka je enaka  $\int_{t_1}^{t_2} U dt$  in jo merimo v [Vs]. Velikost napetostnega sunka, prikazanega na sliki 4.42a, je enaka  $U_0(t_2 - t_1)$ .



Slika 4.42: Pravokotni (a) in harmonični (b) napetostni sunek.

O napetostnem sunku govorimo tudi, ko kratek čas traja harmonična napetost (sl. 4.42b).

### 4.4.3 Efektivna napetost

Moč, ki se troši na upor, je v vsakem trenutku produkt napetosti in toka 4.72. Ob upoštevanju Ohmovega zakona (en. 4.65) lahko zapišemo

$$P = \frac{U^2}{R}. \quad (4.127)$$

V primeru harmonične izmenične napetosti (en. 4.126) je moč podana z

$$P = \frac{U_0^2 \sin^2(\omega t + \delta)}{R}.$$

Ker je povprečna vrednost kvadratne vrednosti sinusa enaka 0,5 (sl. 4.52), je povprečna moč enaka polovici največje moči

$$\bar{P} = \frac{U_0^2}{2R}. \quad (4.128)$$

Da bi lahko primerjali učinke električnega toka ne glede na to, ali imamo izmenično ali enosmerno napetost (en. 4.127), uvedemo efektivno napetost\* ( $U_{ef}$ ), tako da velja

$$\bar{P} = \frac{U_{ef}^2}{R}. \quad (4.129)$$

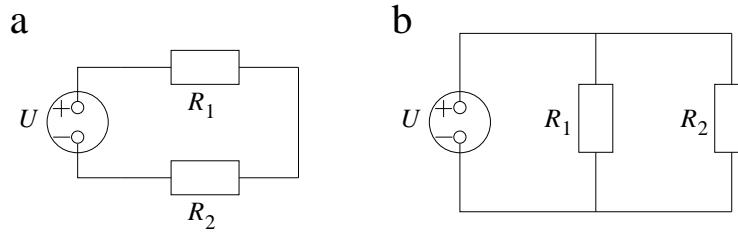
\*Pri hišni napeljavi je efektivna napetost enaka 220 V.

Primerjava enačbe 4.129 in enačbe 4.128 nam da

$$U_{\text{ef}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}.$$

Povprečna moč na uporu je tudi enaka  $\bar{P} = RI_0^2/2$ , kjer je  $I_0$  amplituda harmoničnega spreminjanja toka. Enako kot efektivno napetost definiramo tudi efektivni tok  $I_{\text{ef}} = I_0/\sqrt{2}$ , da velja  $\bar{P} = RI_{\text{ef}}^2$ .

#### 4.4.4 Ohmska vezja: Zaporedna in vzporedna vezava električnih uporov



Slika 4.43: Zaporedna (a) in vzporedna (b) vezava električnih uporov.

V ohmskih vezjih imamo ponavadi opravka z več izvori napetosti in več upori. Električne upore lahko vežemo zaporedno ali vzporedno. V primeru zaporedne vezave (sl. 4.43a) teče isti tok skozi oba upora z upornostima  $R_1$  in  $R_2$ . Na uporih sta potem napetosti  $U_1$  in  $U_2$  enaki  $R_1I$  in  $R_2I$ . Vsota napetosti na zaporedno vezanih uporih mora biti enaka napetosti na izvoru ( $U$ ), zato velja

$$U = R_s I, \quad (4.130)$$

pri čemer je  $R_s$  vsota obeh upornosti

$$R_s = R_1 + R_2. \quad (4.131)$$

V primeru vzporedne vezave (sl. 4.43b) se tok, ki ga žene izvor ( $I$ ), razdeli na dva dela

$$I = I_1 + I_2, \quad (4.132)$$

kjer sta  $I_1$  in  $I_2$  tokova, ki tečeta skozi upora  $R_1$  in  $R_2$ . Ker je napetost na uporih enaka napetosti izvora, sta tokova  $I_1$  in  $I_2$  podana z

$$U = R_1 I_1 \text{ in } U = R_2 I_2. \quad (4.133)$$

Če definiramo skupni upor tako, da je

$$U = R_s I \quad (4.134)$$

in vstavimo tokove iz enačb 4.133 in 4.134 v enačbo 4.132, dobimo

$$\frac{1}{R_s} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (4.135)$$

#### 4.4.5 Kapacitivna vezja

V kapacitivnih vezjih nastopajo kondenzatorji.

**Zaporedna in vzporedna vezava kondenzatorjev**

Pri zaporedni vezavi kondenzatorjev, ki jih priključimo na izvor enosmerne napetosti, je naboj, ki se nabere na ploščah prvega kondenzatorja ( $e_1$ ), enak naboju na drugem kondenzatorju ( $e_2$ ), čeprav kapacitivnosti kondenzatorjev nista enaki. Če pišemo  $e_1 = e_2 = e$ , velja (en. 4.21)

$$U_1 = \frac{e}{C_1} \quad U_2 = \frac{e}{C_2} . \quad (4.136)$$

Skupna napetost na obeh kondenzatorjih je enaka napetosti na izvoru

$$U = U_1 + U_2 . \quad (4.137)$$

Če vstavimo izraza za napetosti na kondenzatorjih (enačbi 4.136) v enačbo 4.137, lahko zapišemo

$$e = C_s U , \quad (4.138)$$

kjer skupno kapacitivnost ( $C_s$ ) izračunamo po enačbi

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} . \quad (4.139)$$

Pri vzporedni vezavi kondenzatorjev je napetost na obeh kondenzatorjih enaka napetosti na izvoru, četudi kapacitivnosti kondenzatorjev nista enaki. Vrednosti nabojev na kondenzatorjih ( $e_1$  in  $e_2$ ) sta enaki

$$e_1 = C_1 U \quad \text{in} \quad e_2 = C_2 U . \quad (4.140)$$

Skupni naboj na kondenzatorjih ( $e = e_1 + e_2$ ) je sorazmeren z napetostjo  $U$

$$e = C_1 U + C_2 U = C_s U ,$$

kjer je skupna kapacitivnost ( $C_s$ ) vsota obeh kapacitivnosti

$$C_s = C_1 + C_2 . \quad (4.141)$$

**Izmenični električni tok skozi kondenzator**

Izračunali bomo vrednost električnega toka, ko priključimo kondenzator na izvor izmenične napetosti ( $U = U_0 \sin \omega t$ ). V tem primeru je napetost na kondenzatorju enaka napetosti na izvoru, torej

$$U = \frac{e}{C} .$$

Če slednjo enačbo odvajamo po času in upoštevamo, da je sprememba naboja na časovno enoto enaka toku na kondenzator (en. 4.52), dobimo

$$I = \omega C U_0 \cos \omega t . \quad (4.142)$$

Razmerje med amplitudo napetosti ( $U_0$ ) in amplitudo toka ( $\omega C U_0$ ) je enako upornosti kondenzatorja

$$R_C = \frac{1}{\omega C} . \quad (4.143)$$

Za enosmerno napetost kondenzator predstavlja neskončno velik upor. Enačbo 4.142 lahko zapišemo tudi v obliki

$$I = \frac{U_0}{R_C} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad (4.144)$$

in razberemo, da tok prehiteva napetost na kondenzatorju za  $\pi/2\omega$ .

#### 4.4.6 RC vezja

V RC vezjih nastopajo upori in kondenzatorji.

##### Polnjenje in praznjenje kondenzatorja preko upora

Najprej nas zanima časovna odvisnost spreminjanja napetosti na kondenzatorju, ki ga v času  $t = 0$  preko upora priključimo na stalen izvor napetosti (sl. 4.44a). V začetku je kondenzator prazen ( $e(t = 0) = 0$ ). Napetost na izvoru napetosti ( $U_0$ ) je enaka vsoti napetosti na uporu in kondenzatorju

$$U_0 = RI + \frac{e}{C}, \quad (4.145)$$

kjer je  $R$  upor,  $I$  tok skozi upor,  $e$  naboj na kondenzatorju in  $C$  kapaciteta kondenzatorja. Naboj doteka na kondenzator, zato je električni tok enak odvodu naboja na kondenzatorju po času. Ob upoštevanju zveze  $I = de/dt$  lahko enačbo 4.145 prepisemo v obliko

$$dt = \tau \frac{de}{CU_0 - e}, \quad (4.146)$$

kjer smo vpeljali časovno konstanto ( $\tau = RC$ ). Po integraciji slednje enačbe po času v mejah od 0 do  $t$  in po naboju v mejah od 0 do  $e$  dobimo

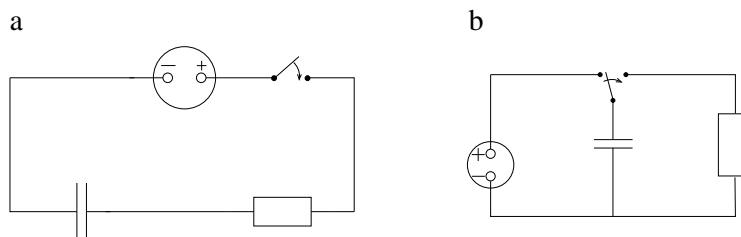
$$t = -\tau \ln \frac{CU_0 - e}{CU_0}. \quad (4.147)$$

Če izrazimo naboj kot funkcijo časa, dobimo

$$e = CU_0(1 - e^{-t/\tau}), \quad (4.148)$$

kjer je  $CU_0$  vrednost naboja na kondenzatorju po zelo dolgem času. Z isto časovno konstanto, kot se spreminja naboj, se spreminja tudi napetost na kondenzatorju

$$U = U_0(1 - e^{-t/\tau}). \quad (4.149)$$



Slika 4.44: Shema pri polnjenju (a) in praznjenju (b) kondenzatorja. S stikalom vklopimo polnjenje kondenzatorja, s pretikalom pa preklopimo iz polnjenja na praznjenje kondenzatorja.

Izračunali bomo še spreminjanje napetosti na kondenzatorju, ki se prazni preko upora (sl. 4.44b). V začetku je na kondenzatorju naboj  $e_z$ . Napetost na kondenzatorju je ves čas enaka napetosti na uporu

$$RI = \frac{e}{C}, \quad (4.150)$$

kjer je  $R$  upor,  $I$  tok skozi upor,  $e$  naboj na kondenzatorju in  $C$  kapaciteta kondenzatorja. Naboj odteka s kondenzatorja, zato je električni tok enak negativni vrednosti odvoda naboja na kondenzatorju po času. Ob upoštevanju zveze  $I = -de/dt$  ugotovimo, da je sprememba naboja po času sorazmerna s samim nabojem

$$\frac{de}{dt} = -\frac{e}{RC}. \quad (4.151)$$

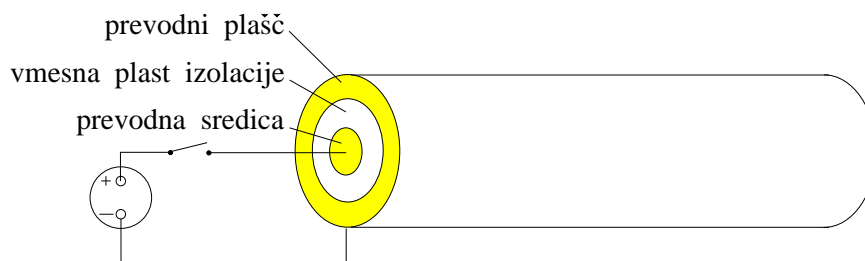
Če vpeljemo časovno konstanto ( $\tau = RC$ ), integracija slednje enačbe privede do rešitve za spremi-  
njanje naboja v obliki

$$e = e_z e^{-t/\tau} . \quad (4.152)$$

Če je začetna napetost na kondenzatorju enaka  $U_0$ , velja

$$U = U_0 e^{-t/\tau} . \quad (4.153)$$

### Širjenje električnega naboja po koaksialnem kablju



Slika 4.45: Koaksialni električni kabel.

Koaksialni električni kabel ima prevodno sredico, ki jo obdaja izolacija, zunanost pa je spet prevodna (sl. 4.45). Zaradi plasti izolacije ima koaksialni kabel tudi električno kapaciteto. Če vzpostavimo med prevodnim plaščem in sredico napetost ( $U$ ), se na površinah prevodnih snovi na meji z izolatorjem nabere naboj ( $e$ ). Enako kot v ploščatem kondenzatorju tudi pri kablju velja enačba 4.21.

Ko na koncu kabla med prevodno sredico in prevodnim plaščem priključimo izvor napetosti, se napetost po kablju spreminja v odvisnosti od časa, saj se konstantna napetost po kablju ne vzpostavi v trenutku\*. Opišemo lahko, kako se napetost spreminja v odvisnosti od časa ( $t$ ) in oddaljenosti od izbranega konca ( $x$ ), če en konec kabla za kratek čas priključimo na izvor napetosti, pri čemer je sunek napetosti enak  $\int_{t_1}^{t_2} U dt$ . V tem primeru imajo funkcije, ki opisujejo spreminjanje napetosti od  $x$  pri stalnem času, obliko Gaussove funkcije†. Spreminjanje napetosti od časa in kraja je narisana na sliki 4.46. V začetku narašča napetost počasi. Nato se prične hitro povečevati do maksimalne vrednosti, zmanjševanje napetosti pa je relativno počasno. Na izbranem mestu ( $x_m$ ) pride do maksimalne napetosti ( $U_m$ ) ob določenem času ( $t_m$ ). Daljši račun pokaže, da je  $U_m$  obratnosorazmeren z  $x_m$  in da je  $t_m$  sorazmeren z  $x_m^2$ . Ugotovimo lahko, da se naboj, ki je sorazmeren s sunkom napetosti, s časom porazdeli po kablju.

#### 4.4.7 Induktivni tokokrogi

##### Vezava tuljave na generator izmenične napetosti

Najprej obravnavamo zgled, kjer je tuljava vezana na generator izmenične napetosti (sl. 4.47). Električni tok ( $I$ ) je tak, da inducirana napetost v vsakem trenutku uravnesi priključeno napetost

$$U + U_i = 0 . \quad (4.156)$$

\*Spreminjanje napetosti opisujejo rešitve enačbe

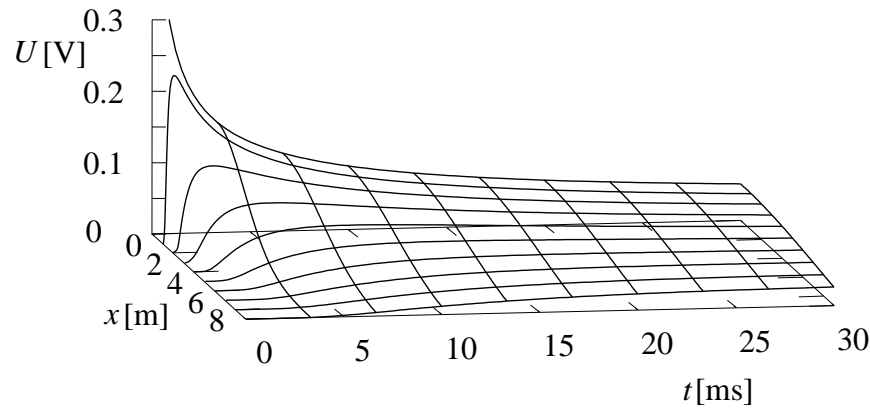
$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{rc} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} , \quad (4.154)$$

kjer sta  $r$  in  $c$  upornost in kapacitivnost na dolžinsko enoto.

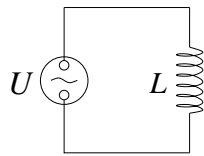
†Rešitev enačbe 4.154 je odvisnost napetosti od časa  $t$  in oddaljenosti  $x$ , podana z enačbo

$$U(t, x) = e_0 \sqrt{\frac{r}{4\pi ct}} e^{-\frac{rcx^2}{4t}} , \quad (4.155)$$

kjer je  $e_0$  naboj, ki je stekel v začetnem trenutku na kablju pri  $x = 0$ .



Slika 4.46: Napetost na koaksialnem kablu ( $U$ ) v odvisnosti od časa ( $t$ ) in oddaljenosti od začetka kabla ( $x$ ) (en. 4.155). Vrednosti kapacitivnosti in upornosti na dolžinsko enoto ( $c$  in  $r$ ) sta  $10^{-6}$  F/m in  $10^3 \Omega/\text{m}$ , naboj zaradi začetnega sunka napetosti ( $e_0$ ) je  $10^{-6}$  As.



Slika 4.47: Vezava tuljave na generator izmenične napetosti.

Če v slednjo enačbo vstavimo izraz za inducirano napetost v tuljavi (en. 4.116), dobimo

$$U = L \frac{dI}{dt}. \quad (4.157)$$

Če napetost na generatorju zapišemo z izrazom  $U = U_0 \sin \omega t$ , lahko z integracijo enačbe 4.157 dobimo

$$I = -\frac{U_0}{\omega L} \cos \omega t. \quad (4.158)$$

Razmerje med amplitudo napetosti ( $U_0$ ) in amplitudo toka ( $U_0/\omega L$ ) je enako upornosti tuljave

$$R_L = \omega L. \quad (4.159)$$

Enačbo 4.158 lahko zapišemo tudi v obliki

$$I = \frac{U_0}{R_L} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}), \quad (4.160)$$

iz katere razberemo, da tok zaostaja za napetostjo na tuljavi za  $\pi/2\omega$  (sl. 4.48). Iz enačbe 4.158 razberemo, da je amplituda toka skozi tuljavo ( $U_0/(\omega L)$ ) obratno sorazmerna s frekvenco izmenične napetosti. Za enosmerno napetost tuljava ne predstavlja nobenega upora.

### Polnjenje in praznjenje tuljave

Obravnavamo zgled, ko tuljava požene tok skozi upor (sl. 4.49). V ta namen skozi tuljavo najprej poženemo tok z generatorjem istosmerne napetosti. Tedaj teče skozi tuljavo tok  $I_0 = U_0/R_0$  in na tuljavi ni nobene napetosti, saj tuljava za enosmerno napetost ne predstavlja nobenega upora. Ko izklopimo stikalo (sl. 4.49), je inducirana napetost enaka napetosti na upor:

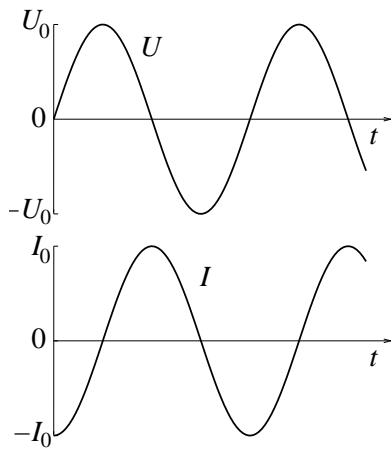
$$-L \frac{dI}{dt} = RI. \quad (4.161)$$

Rešitev slednje enačbe je eksponentna funkcija:

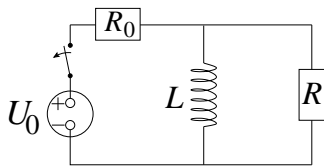
$$I = I_0 e^{-t/\tau}. \quad (4.162)$$

Električni tok se približuje vrednosti nič s časovno konstanto  $\tau = L/R$ .

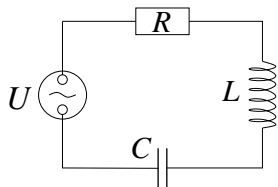




Slika 4.48: Prikaz napetosti in toka na tuljavi v odvisnosti od časa.

Slika 4.49: Vezava tuljave pri polnjenju skozi upor  $R_0$  in praznjenju skozi upor  $R$ .

### LRC tokokrog

Slika 4.50: Zaporedna vezava upora ( $R$ ), tuljave ( $L$ ) in kondenzatorja ( $C$ ) na generator izmenične napetosti ( $U$ ).

Sedaj obravnavamo primer, ko zaporedno na generator izmenične napetosti vežemo upor, tuljavo in kondenzator (sl. 4.50). Napetost na priključkih generatorja ( $U = U_0 \sin \omega t$ ) je enaka vsoti napetosti na uporu, tuljavi in kondenzatorju

$$U = IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{e}{C}, \quad (4.163)$$

kjer smo upoštevali tudi izraz za napetost na kondenzatorju ( $e/C$ ). Po odvajanju slednje enačbe po času in upoštevanju zveze  $I = de/dt$  dobimo

$$U_0 \omega \cos \omega t = \frac{dI}{dt} R + L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{I}{C}. \quad (4.164)$$

Rešitev iščemo v obliki

$$I = I_0 \sin(\omega t + \delta), \quad (4.165)$$

kjer sta  $I_0$  amplituda in  $\delta$  fazni zamik harmoničnega toka. Po daljšem računu dobimo:

$$I_0 = \frac{U_0}{Z}, \quad (4.166)$$

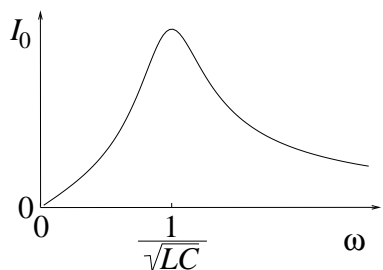
kjer je

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2} \quad (4.167)$$

*impedanca*, in izraz, iz katerega izračunamo fazni zamik

$$\tan \delta = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}. \quad (4.168)$$

Če narišemo odvisnost toka od frekvence pri konstantni amplitudni napetosti na generatorju ( $U_0$ ), ugotovimo, da pri določeni frekvenci tok močno naraste (sl. 4.51). Temu pojavu pravimo resonanca in je analogen pojavu resonance, ki smo ga obravnavali pri nihanju (str. 65). Tok je največji, ko je impedanca ( $Z$ ) najmanjša. Iz enačbe 4.167 sledi, da je tok največji krožni frekvenci pri  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .



Slika 4.51: Tok skozi zaporedno vezan upor, tuljavo in kondenzator v odvisnosti od frekvence. Pri  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  pride do resonance.

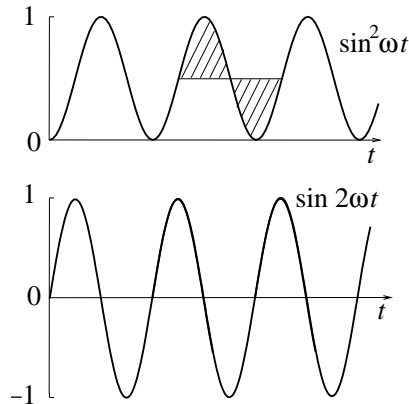
Ker v vezju nihata napetost in tok harmonično, niha harmonično tudi moč, ki je produkt skupne napetosti na uporu, tuljavi in kondenzatorju in električnega toka

$$\begin{aligned} P &= UI = U_0 I_0 \sin \omega t \sin(\omega t + \delta) = U_0 I_0 \sin \omega t (\sin \omega t \cos \delta + \cos \omega t \sin \delta) = \\ &= U_0 I_0 (\sin^2 \omega t \cos \delta + \frac{1}{2} \sin 2\omega t \sin \delta). \end{aligned}$$

Povprečna moč je

$$\bar{P} = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \delta = U_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \cos \delta, \quad (4.169)$$

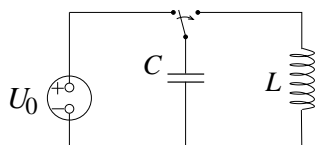
ker je povprečje  $\sin^2 \omega t$  po času enako 0,5 in je povprečje  $\sin 2\omega t$  po času enako 0 (sl. 4.52).



Slika 4.52: Diagram harmoničnih funkcij  $\sin^2 \omega t$  in  $\sin 2\omega t$ .

Če vstavimo izraz za amplitudo napetosti ( $U_0 = ZI_0$ ) in izraz za fazni zamik (en. 4.168), pri čemer upoštevamo  $\cos \delta = 1/\sqrt{1 + \tan^2 \delta}$ , v enačbo 4.169, dobimo, da se energija troši le na uporu  $\bar{P} = I_0^2 R/2$ .

### Nihajni krog



Slika 4.53: Nihajni krog.

Kot zadnji zgled obravnavamo električni nihajni krog. Zaporedno vezana kondenzator in tuljava predstavljata nihalo (sl. 4.53). Ko prestavimo stikalo na desno, se kondenzator prične prazniti,

inducirana napetost na tuljavi pa je enaka napetosti na kondenzatorju (sl. 4.53):

$$-L \frac{dI}{dt} = \frac{e}{C}. \quad (4.170)$$

Po odvajanju sledi

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{I}{C} = 0, \text{ oziroma } \frac{d^2 I}{dt^2} = -\frac{I}{LC}, \quad (4.171)$$

kjer smo upoštevali zvezo med nabojem in tokom (en. 4.52). Kot vidimo, je nihanje harmonično in ima rešitev enačbe 4.171 obliko

$$I = I_0 \sin \omega_0 t, \quad (4.172)$$

kjer je  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . Naboj na kondenzatorju, ki je integral toka po času,  $e = \int I dt$  (prim. en. 4.52), lahko zapišemo kot

$$e = -\frac{I_0}{\omega_0} \cos \omega_0 t. \quad (4.173)$$

Če izračunamo vsoto energij na kondenzatorju ( $W_C = e^2/(2C)$ , prim z enačbo 4.26) in tuljavi (en. 4.121)

$$\frac{e^2}{2C} + L \frac{I^2}{2} = \frac{I_0^2}{2C\omega_0^2} \cos^2 \omega_0 t + L \frac{I_0^2}{2} \sin^2 \omega_0 t = L \frac{I_0^2}{2} \quad (4.174)$$

ugotovimo, da se skupna energija ohranja, saj se vsota energij ( $W_C + W_B$ ) ne spreminja s časom. Energija se pretaka iz energije električnega polja v energijo magnetnega polja in obratno. Na kondenzatorju je energija največja ob časih, ko velja  $\cos^2 \omega_0 t = 1$ , na tuljavi pa je energija največja, ko velja  $\sin^2 \omega_0 t = 1$ .