

Poglavje 2

MEHANIKA

Pojavov v naravi ne moremo razumeti brez primerne opisa medsebojnega delovanja njenih sestavnih delov. Opisovanje narave bomo zato začeli z opisovanjem teles in sil med njimi. Razlago bomo razdelili na opis točkastih, togih in zveznih teles. Spoznali bomo, da je tak fizikalen opis zelo splošen in omogoča, da na podoben način obravnavamo zelo različne stvari. Tako lahko n. pr. na podoben način opišemo gibanje planeta okoli sonca, gibanje atleta pri skoku v daljavo ali pa gibanje molekule zraka. Po drugi strani lahko isto stvar v različnih situacijah opisujemo različno: molekulo DNK lahko pri opisu difuzije obravnavamo kot točkasto telo, pri opisovanju strukture dvojne vijačnice jo obravnavamo kot togo telo, če pa nas zanima zvijanje molekule DNK v celičnem jedru, jo obravnavamo kot zvezno telo. Uporabe matematike se v tem poglavju ne bomo ustrašili, saj vemo, da pri kvantitativnem opisovanju narave brez nje ne gre.

2.1 Mehanika točkastega telesa

2.1.1 Opis gibanja

V tem poglavju se bomo naučili, kako se popiše gibanje telesa*. Zakaj pride do gibanja in kaj določa njegove lastnosti, bomo zvedeli šele v naslednjem poglavju - dinamiki. Začeli bomo z najpreprostejšim opisom – z opisom gibanja masne točke po premici ter nato prešli na opis gibanja masne točke po ravnini oziroma v prostoru. Na koncu se bomo naučili popisati še gibanje togega telesa, ki se lahko še rotira. Spotoma se bomo navadili uporabe nekaterih matematičnih metod (odvod, integral), ki jih bomo potrebovali tudi pozneje. Ogledali si bomo tudi nekaj zgledov uporabe pridobljenega znanja.

Opis gibanja masne točke

Masna točka je neskončno majhen predmet, kar v praksi pomeni, da so njegove dimenzije mnogo manjše od značilnih dimenzij problema, ki ga obravnavamo. Za opis gibanja masne točke zadostuje, da ob vsakem trenutku poznamo njeno lego.

Pri **premočrtnem gibanju** se giblje točka po premici in njeno lego popišemo tako, da na premici izberemo koordinatno izhodišče. **Legu točke** popišemo s koordinato x , ki nam predstavlja razdaljo točke od koordinatnega izhodišča in je pozitivna na eni strani izhodišča ter negativna na drugi (sl. 2.1). Tako gibanje imenujemo gibanje z eno prostostno stopnjo, ker lego popišemo z enim samim podatkom. Enota za koordinato x je seveda meter (m) ali kaka druga enota za dolžino, n. pr. $1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$, $1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$, $1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$, $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$. Gibanje je popisano, če poznamo ob vsakem času t lego točke, to je njeno koordinato x . Poznati moramo torej koordinato x kot funkcijo časa t : $x = x(t)$.

Hitrost točke nam pove, kakšno pot opravi točka oziroma kakšna je sprememba koordinate x v enoti časa. Enota za hitrost je 1 ms^{-1} ali kaj sorodnega, n. pr. $1 \text{ km/h} = (1/3,6) \text{ m/s}$. Če je

*Opisu gibanja telesa pravimo *kinematika*.

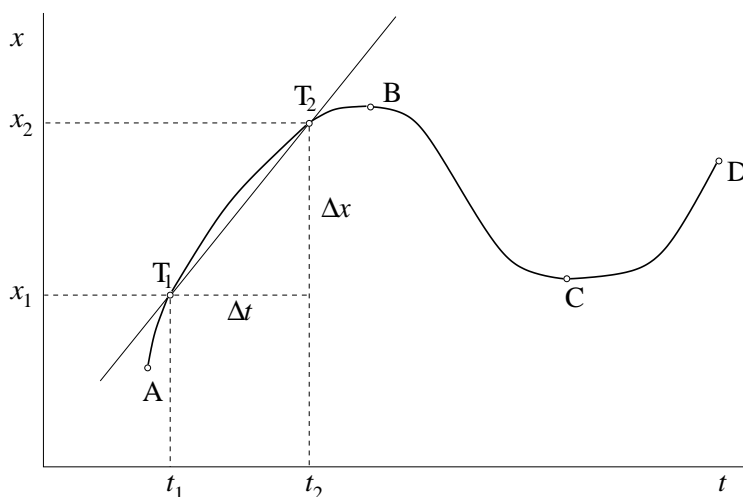


Slika 2.1: Koordinatni sistem za opis lege točke pri premočrtnem gibanju. Trenutna lega masne točke (koordinata x) je 2,3 m.

predmet ob času t_1 na mestu x_1 , ob času t_2 pa na mestu x_2 , je v časovnem intervalu $\Delta t = t_2 - t_1$ opravil pot $\Delta x = x_2 - x_1$. Zato je njegova povprečna hitrost (\bar{v}) na tem intervalu podana z

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (2.1)$$

Na diagramu, ki prikazuje odvisnost koordinate x od časa (sl. 2.2), nam predstavlja povprečno hitrost naklonski koeficient premice, ki gre skozi točki $T_1(t_1, x_1)$ in $T_2(t_2, x_2)$. Naklonski koeficient je namreč definiran kot razmerje med nasprotno in priležno kateto.



Slika 2.2: Krivulja, ki se začne v točki A in konča v točki D, predstavlja odvisnost lege masne točke (koordinato x) od časa t . Na sliki je tudi pokazano, kako se izračuna povprečna hitrost (en. 2.1).

Mi bi pa radi določili **trenutno hitrost** ob času t_1 . Če časovni interval Δt zmanjšujemo, se točka T_2 približuje po krivulji točki T_1 in naklonski koeficient ustrezne premice skozi T_1 in T_2 nam podaja povprečno hitrost v vedno manjšem časovnem intervalu. Ko postane Δt neskončno majhen in ga nadomestimo z diferencialom dt , je tudi opravljena pot neskončno majhna in enaka diferencialu dx . Izraz za povprečno hitrost (en. 2.1) preide v izraz za trenutno hitrost

$$v = \frac{dx}{dt}. \quad (2.2)$$

Trenutna hitrost je podana z odvodom koordinate x po času in predstavlja naklonski koeficient tangente na krivuljo na sliki 2.2. Hitrost je pozitivna, če se predmet giblje proti večjim x -om in je krivulja na sliki 2.2 naraščajoča (med točkama A in B ter C in D), ter negativna, če se predmet giblje proti manjšim x -om in je krivulja padajoča (med točkama B in C). V točkah, kjer doseže koordinata ekstremne vrednosti (točki B in C), je tangenta vodoravna in zato hitrost enaka nič.

Pospešek pove, kako se spreminja hitrost s časom, in je definiran kot prirastek hitrosti na časovno enoto. Njegova enota je 1 ms^{-2} . Po analognem sklepanju, kot smo ga izvedli zgoraj za hitrost, pridemo do tega, da je pospešek (a) enak odvodu hitrosti po času oziroma, z upoštevanjem izraza 2.2, drugemu odvodu koordinate x po času

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (2.3)$$

Geometrijsko pospešek predstavlja naklonski koeficient tangente na krivuljo $v = v(t)$ in je pozitiven, če hitrost narašča (postaja bolj pozitivna ali manj negativna), in negativen, če hitrost pada. Ko hitrost doseže največjo ali najmanjšo vrednost, je pospešek enak nič.

Izraza 2.2 in 2.3 omogočata, da iz znane odvisnosti $x(t)$, to je iz poznavanja spreminjanja lege telesa s časom, izračunamo, kako se hitrost in pospešek spreminjata s časom. Večkrat pa nas zanima obratni postopek: Iz znane odvisnosti pospeška od časa $a = a(t)$ bi radi določili, kako se spreminja hitrost $v(t)$ in lega telesa $x(t)$. Iz prvega dela enačbe 2.3 sledi, da je prirastek hitrosti dv v časovnem intervalu dt podan z

$$dv = a dt, \quad (2.4)$$

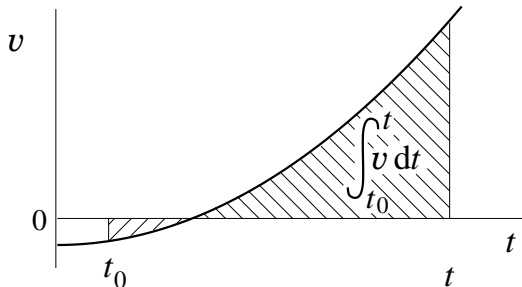
celoten prirastek hitrosti od začetnega časa (t_0) do končnega časa (t) pa je enak vsoti takih infinitesimalnih prispevkov, ki jo izrazimo z integralom $\int_{t_0}^t a dt$. Hitrost ob času t ($v(t)$) je enaka začetni hitrosti v_0 ob času t_0 plus prirastek hitrosti

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a dt. \quad (2.5)$$

Ker je sprememba lege dx v času dt enaka $v dt$, je koordinata x ob času t enaka njeni vrednosti ob začetnem času plus prirastek

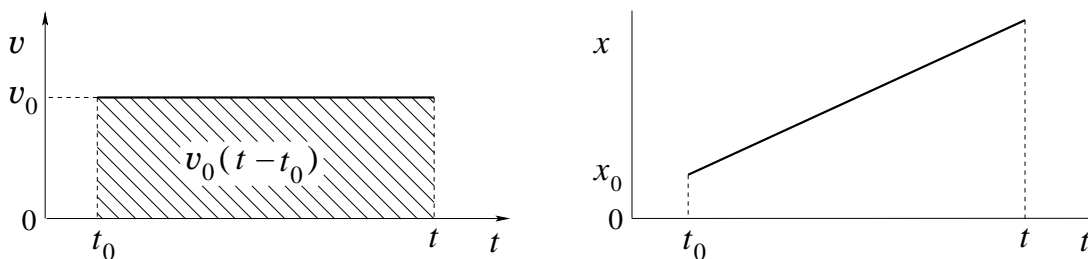
$$x = x_0 + \int_{t_0}^t v dt. \quad (2.6)$$

Integrala $\int a dt$ in $\int v dt$, ki predstavljata prirastek hitrosti oziroma koordinate, sta enaka ploščini med krivuljo in abscisno osjo na diagramu $a(t)$ oziroma $v(t)$, pri čemer se del ploščine, ki je pod abscisno osjo, šteje negativno (sl. 2.3).



Slika 2.3: Ploščina pod krivuljo v v intervalu od t_0 do t v diagramu $v(t)$ predstavlja opravljeno pot v tem intervalu.

Zgledi premega gibanja



Slika 2.4: Pri enakomernem gibanju kateregakoli predmeta je hitrost stalna. Ploščina pod črto v intervalu od t_0 do t predstavlja opravljeno pot (levo). Opravljena pot (x) v odvisnosti od časa (t) pri enakomernem gibanju (desno).

Enakomerno gibanje: Pri enakomernem gibanju je hitrost stalna: $v = v_0 = \text{konst.}$ Zato je po en. 2.3 pospešek enak nič ($a = 0$). Primer enakomernega gibanja je gibanje vlaka po ravnem

tiru, ko vlak ne pospešuje. Koordinato predmeta določimo po en. 2.6. Ker je hitrost konstantna, je integral trivialen

$$x - x_0 = \int_{t_0}^t v dt = vt \Big|_{t_0}^t = v(t - t_0), \quad (2.7)$$

kjer oznaka $\Big|_{t_0}^t$ pomeni, da moramo vzeti vrednost integrala na zgornji meji in od nje odšteti vrednost na spodnji meji. Če merimo čas od $t_0 = 0$, ko je predmet v koordinatnem izhodišču $x_0 = 0$, dobimo dobro znano zvezo

$$x = vt, \quad (2.8)$$

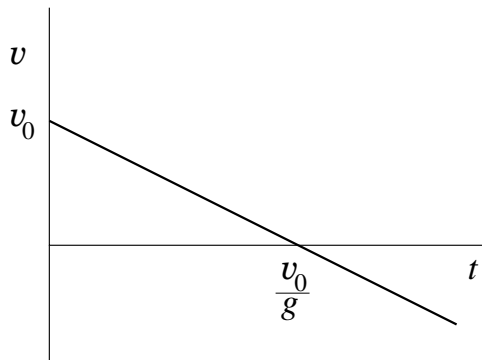
ki nam pove, da je opravljena pot enaka zmnožku hitrosti in časa. Ta zveza seveda velja le za enakomerno gibanje. Za enakomerno gibanje je torej pospešek enak nič, hitrost je stalna, pot oziroma koordinata pa narašča sorazmerno s časom (sl. 2.4).

Enakomerno pospešeno gibanje: Pri enakomerno pospešenem gibanju je pospešek stalen. Dobro znan primer enakomerno pospešenega gibanja je prosti pad, ko se predmet giblje s stalnim pospeškom, ki je enak pospešku prostega pada $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Obravnavamo primer, ko ob času $t = 0$ z višine z_0 nad zemljo predmet vržemo navpično navzgor z začetno hitrostjo v_0 . Koordinatni sistem uvedemo tako, da je njegovo izhodišče na površini zemlje in da koordinata, ki jo bomo v tem primeru označili z z , narašča v smeri navzgor. Ker pospešek prostega pada deluje navzdol, v tem koordinatnem sistemu velja $a = -g$. Iz splošne enačbe 2.5 sledi za $t_0 = 0$

$$v = v_0 - gt. \quad (2.9)$$

Hitrost predmeta se enakomerno spreminja. Odvisnost hitrosti od časa je prikazana na sliki 2.5.



Slika 2.5: Odvisnost hitrosti v od časa t pri prostem padu, če ima predmet v začetku hitrost v_0 v smeri navzgor.

Za ilustracijo opišimo gibanje predmeta bolj natančno. Hitrost navzgor je v začetku enaka v_0 in nato s časom enakomerno pada. Vrednost nič doseže po času v_0/g , ko predmet pride do najvišje točke. Potem postane hitrost negativna, kajti predmet sedaj pada. Absolutna vrednost hitrosti pa enakomerno narašča do padca telesa na tla.

Koordinato oziroma lego predmeta $z(t)$ določimo iz enačbe 2.6 z upoštevanjem izraza 2.9. Če vzamemo $t_0 = 0$, dobimo

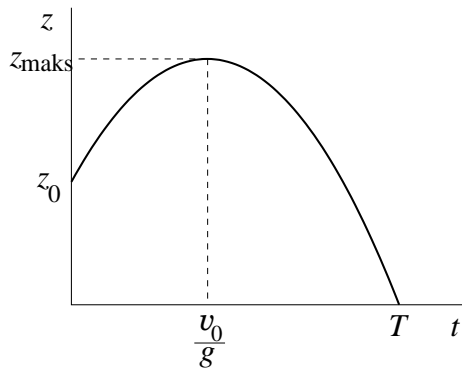
$$z = z_0 + \int_0^t (v_0 - gt) dt = z_0 + v_0 t - \frac{g}{2} t^2, \quad (2.10)$$

kjer smo upoštevali, da je $\int t dt = t^2/2$. Dobljeni izraz lahko pretvorimo v bolj nazorno obliko

$$z = z_0 + \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} g \left(t - \frac{v_0}{g} \right)^2, \quad (2.11)$$

kjer je vsa časovna odvisnost skrita v drugem delu, ki predstavlja parabolo, ki je s temenom obrnjena navzgor. Teme je pri $t = v_0/g$, kjer doseže predmet najvišjo točko

$$z_{\text{maks}} = z_0 + \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}. \quad (2.12)$$



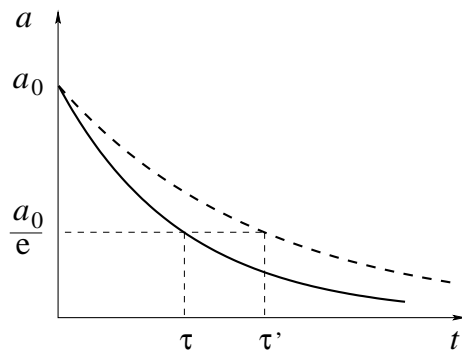
Slika 2.6: Odvisnost lege predmeta (x) od časa (t) pri prostem padu, če ima predmet v začetku hitrost v_0 v smeri navzgor, začetna lega pa je z_0 .

Pot narašča kvadratno s časom. Odvisnost $z = z(t)$ je prikazana na sliki 2.6. Čas T , po katerem predmet pade na tla, dobimo iz enačbe 2.11 z zahtevo, da je $z = 0$, hitrost ob padcu na tla pa lahko določimo iz enačbe 2.9.

Zgled za neenakomerno pospešeno gibanje – eksponentno padajoč pospešek: Predstavljamo si, da hočemo predmet, ki je ob času $t_0 = 0$ v koordinatnem izhodišču ($x = 0$) in miruje ($v_0 = 0$), pospešiti na neko končno hitrost. Zato mora biti pospešek različen od nič le v začetku, ko telo pospešujemo, potem pa mora doseči vrednost nič. Vzemimo, da pospešek eksponentno pada s časom

$$a = a_0 e^{-t/\tau}, \quad (2.13)$$

kjer je a_0 začetna vrednost pospeška, τ pa je karakterističen čas, ki pove, kako hitro pospešek pada. V časovnem intervalu τ pospešek pade za faktor $e \approx 2,7$. Odvisnost pospeška od časa je prikazana na sliki 2.7.



Slika 2.7: Diagram eksponentno padajočega pospeška s časom (en. 2.13). Črtkana krivulja prikazuje eksponentno padajoči pospešek z daljšim karakterističnim časom (τ').

Hitrost izračunamo s splošnim izrazom (en. 2.5)

$$v = a_0 \int_0^t e^{-t/\tau} dt = -a_0 \tau \int_0^t e^{-t/\tau} d\left(-\frac{t}{\tau}\right) = -a_0 \tau e^{-t/\tau} \Big|_0^t = a_0 \tau (1 - e^{-t/\tau}) = v_{\text{maks}} (1 - e^{-t/\tau}). \quad (2.14)$$

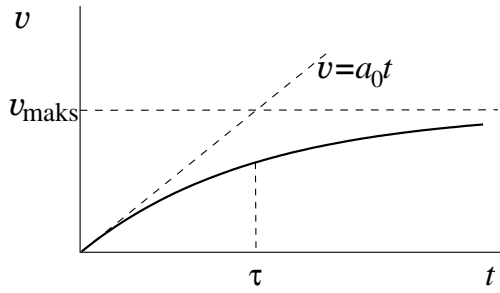
Tu smo upoštevali, da je $\int e^u du = e^u$, pri čemer smo vzeli $u = -t/\tau$. Z $v_{\text{maks}} = a_0 \tau$ smo označili maksimalno hitrost, ki jo predmet doseže pri velikih časih ($t \gg \tau$), ko gre pospešek proti nič. Tedaj se predmet giblje enakomerno. Pri majhnih časih ($t \ll \tau$), ob začetku pospeševanja, pa hitrost linearno narašča s časom (sl. 2.8). Natančnejša analiza pokaže, da tedaj velja $v = a_0 t$, kar pomeni, da imamo opravka z enakomerno pospešenim gibanjem s pospeškom a_0 . Vmesno področje ($t \approx \tau$) predstavlja prehod iz področja enakomerno pospešenega gibanja v področje enakomernega gibanja (sl. 2.8).

Pot izračunamo kot integral hitrosti (en. 2.6)

$$x = v_{\text{maks}} \int_0^t (1 - e^{-t/\tau}) dt = v_{\text{maks}} t - v_{\text{maks}} \tau (1 - e^{-t/\tau}). \quad (2.15)$$

Odvisnost poti od časa je prikazana na sliki 2.9. Parabolična odvisnost na začetku ($t \ll \tau$) je tipična za enakomerno pospešeno gibanje. Da se videti, da velja tedaj

$$x = \frac{1}{2} a_0 t^2, \quad (2.16)$$

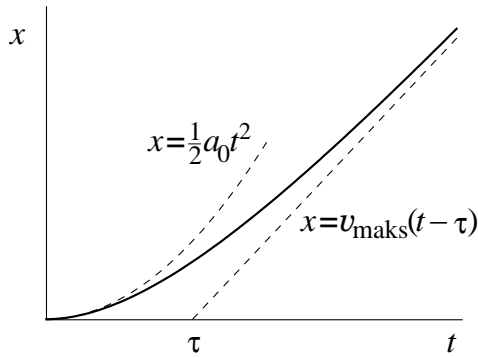


Slika 2.8: Spreminjanje hitrosti pri eksponentno padajočem pospešku s časom, podanem z enačbo 2.13.

kar ustreza enakomerno pospešenemu gibanju s pospeškom a_0 . Pri velikih časih, ko gre eksponentna funkcija proti nič, velja

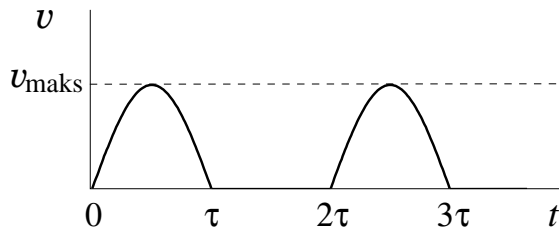
$$x = v_{\text{maks}}(t - \tau). \quad (2.17)$$

Linearna odvisnost je tipična za enakomerno gibanje, časovni zamik τ pa predstavlja zakasnitev zaradi počasnega pospeševanja glede na gibanje, ko bi predmet imel stalno hitrost v_{maks} takoj od začetka.



Slika 2.9: Spreminjanje poti pri eksponentno padajočem pospešku s časom, podanem z enačbo 2.13. Črtkano sta narisani odvisnosti poti v začetku in po zelo dolgem času.

Zgled za neenakomerno pospešeno gibanje – gibanje stopala pri hoji: Gibanje stopala pri hoji v smeri hoje je neenakomerno. Stopalo ene noge med premikanjem druge noge miruje, potem pa se mu nekaj časa hitrost povečuje, nato pa zmanjšuje, dokler na koncu koraka zopet ne zavzame vrednost nič. Poskusimo časovni potek hitrosti narisati na diagramu (sl. 2.10). Definirajmo dve lahko izmerljivi količini, ki sta značilni za hojo. Ena je dolžina koraka (ℓ), druga pa čas trajanja koraka (τ). Čas trajanja koraka je podan s časom, ki ga potrebujemo, da prestavimo stopalo iz enega mirujočega položaja za drugim stopalom v novi mirujoči položaj pred drugim stopalom. Pri tem, bomo dejali, se premakne stopalo za razdaljo 2ℓ . Taka definicija dolžine koraka je namreč v skladu z običajno uporabo tega pojma. Če pravimo, da smo napravili deset korakov, smo namreč posamezno nogo premaknili petkrat, vsakič se je premaknila za 2ℓ , tako da je celoten premik res 10ℓ – deset dolžin koraka. Ali drugače: pri vsakem premiku noge (za 2ℓ) se premakne telo, ki je enkrat pred stopalom drugič pa za njim, le za ℓ , tako da se premaknemo po desetih korakih res za 10ℓ naprej.



Slika 2.10: Spreminjanje hitrosti stopala (v) s časom (t) pri hoji.

Povprečno hitrost lahko določimo tako, da gledamo telo ali da gledamo stopalo. Obe hitrosti morata biti seveda enaki. Telo se pri vsakem koraku, ki traja čas τ , premakne za eno dolžino koraka ℓ . Zato je povprečna hitrost

$$\bar{v} = \frac{\ell}{\tau}. \quad (2.18)$$

Stopalo se v časovnem intervalu τ , ko se premika, premakne za 2ℓ , nato pa čas τ miruje, tako da v času 2τ opravi pot 2ℓ . Povprečna hitrost je zato spet enaka zgornji. Če vzamemo, da je dolžina koraka $0,75$ m, čas trajanja koraka pa $0,5$ s, hodimo s povprečno hitrostjo $1,5$ m/s.

Da bi ocenili, kolikšna je največja hitrost stopala (v_{maks}), izrazimo v približku odvisnost hitrosti stopala od časa kar s pozitivnim delom sinusne funkcije. V intervalih $0 \leq t \leq \tau$, $2\tau \leq t \leq 3\tau$, itd. je potem odvisnost

hitrosti od časa enaka

$$v(t) = v_{\text{maks}} \sin \frac{\pi t}{\tau}, \quad (2.19)$$

kjer smo faktor π/τ v argumentu sinusa izbrali tako, da je hitrost enaka nič pri $t = 0$, naslednja ničla pa je pri $t = \tau$. V intervalih $\tau \leq t \leq 2\tau$, $3\tau \leq t \leq 4\tau$, itd. je hitrost enaka nič.

S pomočjo tega nastavka (en. 2.19) in splošnega izraza (en. 2.6) lahko izračunamo pot, ki jo opravi stopalo v času τ , ki mora biti enaka dvojni dolžini koraka

$$2\ell = \int_0^{\tau} v(t) dt = v_{\text{maks}} \int_0^{\tau} \sin \frac{\pi t}{\tau} dt. \quad (2.20)$$

Vpeljemo novo spremenljivko $u = \pi t/\tau$, ki se spreminja v mejah od 0 do π in katere diferencial je $du = (\pi/\tau)dt$, ter dobimo

$$2\ell = \frac{v_{\text{maks}}\tau}{\pi} \int_0^{\pi} \sin u du = \frac{v_{\text{maks}}\tau}{\pi} (-\cos u) \Big|_0^{\pi} = \frac{v_{\text{maks}}\tau}{\pi} (-\cos \pi + \cos 0) = \frac{v_{\text{maks}}\tau}{\pi} \cdot 2. \quad (2.21)$$

Največja hitrost stopala je potem enaka

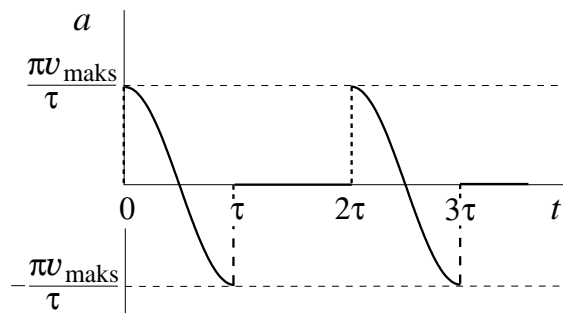
$$v_{\text{maks}} = \frac{\pi \ell}{\tau} = \pi \bar{v}. \quad (2.22)$$

Ugotovili smo, da je π -krat večja od povprečne hitrosti. Za gornje podatke je največja hitrost 4,7 m/s.

Pospešek dobimo z odvajanjem hitrosti (en. 2.3)

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{\pi v_{\text{maks}}}{\tau} \cos \frac{\pi t}{\tau} = \frac{\pi^2 \bar{v}}{\tau} \cos \frac{\pi t}{\tau}. \quad (2.23)$$

Pospešek je največji na začetku in na koncu koraka (sl. 2.11). Ta maksimalna vrednost je za gornje podatke 29,6 m/s².

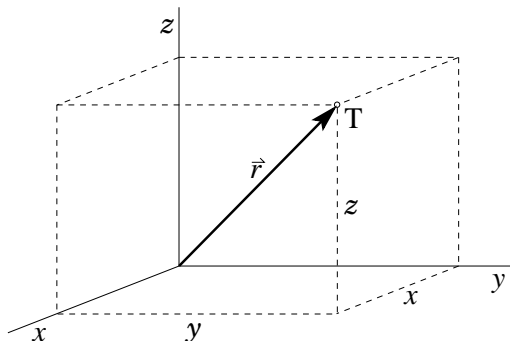


Slika 2.11: Pospešek stopala (a) v odvisnosti od časa (t) pri hoji.

Gibanje masne točke v prostoru oziroma v ravnini

Lego točke v prostoru opišemo tako, da uvedemo **koordinatni sistem** s koordinatnim izhodiščem in tremi med seboj pravokotnimi osmi x , y in z (sl. 2.12). Lega točke je podana s tremi koordinatami x , y in z . Točka v prostoru ima torej tri **prostostne stopnje**, ker potrebujemo tri podatke za popis njene lege. Te tri podatke lahko združimo v eno samo količino, to je krajevni vektor \vec{r} . Koordinate točke x , y in z imenujemo komponente krajevnega vektorja \vec{r} in zapišemo $\vec{r} = (x, y, z)$. Vektor \vec{r} ponazorimo s puščico, ki sega od koordinatnega izhodišča do točke in kaže proti točki. Velikost vektorja predstavlja oddaljenost točke od izhodišča, njegova smer pa smer, v kateri je točka glede na izhodišče.

Pozneje bomo srečali še več količin, za katere je poleg njihove velikosti pomembna tudi smer. Vse take količine, kot so na primer hitrost, sila, pospešek, električna poljska jakost itd., so **vektorji** in je za njihovo določitev potrebno poznati njihovo velikost, n. pr. velikost hitrosti, ter smer, n. pr. smer gibanja. Količine kot masa, temperatura, tlak itd. so popolnoma podane le z velikostjo in

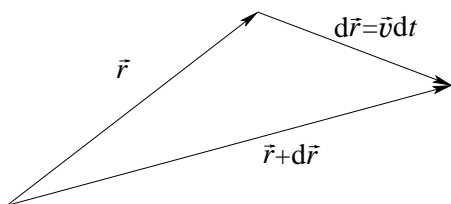


Slika 2.12: Ponazoritev vektorja \vec{r} v koordinatnem sistemu.

jih imenujemo **skalarji**. Oglejmo si nekaj najosnovnejših pravil, ki veljajo za vektorje, na primeru vektorja \vec{r} , ki določa lego točke v prostoru.

Kot smo že povedali, vektor lahko razstavimo na komponente x , y in z , kar pomeni, da lahko iz koordinatnega izhodišča pridemo do točke T (sl. 2.12) tako, da se premaknemo za x v smeri x , za y v smeri y in za z v smeri z . Velikost vektorja predstavlja njegova dolžina, ki je enaka dolžini diagonale kvadra na sliki 2.12. Če velikost vektorja \vec{r} označimo z r ali $|\vec{r}|$, velja

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2.24)$$



Slika 2.13: Hitrost točke, pomnožena z dt , je enaka spremembi lege točke (\vec{r}) v dt .

Hitrost točke je vektor, ki pove, kako hitro in v kateri smeri se spreminja lega točke v prostoru. Ker je lega točke podana s komponentami v smeri x , y , in z , je tudi vektor hitrosti podan s komponentami hitrosti v teh smereh, ki popisujejo spreminjanje posameznih komponent. Torej

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right). \quad (2.25)$$

Smer vektorja hitrosti je v splošnem drugačna od smeri \vec{v} (sl. 2.13).

Podobno velja za pospešek, ki predstavlja spremembo hitrosti na časovno enoto in je tudi vektor, katerega velikost pove velikost spreminjanja hitrosti na časovno enoto, smer pa smer spreminjanja hitrosti

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2} \right). \quad (2.26)$$

Gibanja točke v ravnini ne bomo podrobneje študirali, ker predstavlja poseben primer gibanja v prostoru z omejitvijo na ravnino $x-y$, v kateri je stalno $z = 0$. Torej potrebujemo za popis lege točke le dve koordinati x in y in je to gibanje z dvema prostostnima stopnjama. V vektorski notaciji lahko tako gibanje popišemo z dvokomponentnimi vektorji položaja \vec{r} , hitrosti \vec{v} in pospeška \vec{a} .

Sestavljeno gibanje

Iz izrazov 2.25 in 2.26 vidimo, da veljajo med posameznimi komponentami vektorja \vec{r} , hitrosti in pospeška iste zveze kot za premočrtno gibanje. Zato si lahko poljubno gibanje točke v prostoru mislimo razstavljeno na troje premočrtnih gibanj v smereh x , y in z , ki so med seboj neodvisna in za vsako posebej veljajo znane zveze med koordinato, hitrostjo in pospeškom (en. 2.2, 2.3, 2.5, in 2.6). Ne smemo pa pozabiti, da tako dobljene posamezne komponente v vsakem trenutku tvorijo vektor, ki popisuje celotno gibanje. Tako sestavljeno gibanje si bomo podrobneje ogledali na primeru v naslednjem poglavju.

Zgledi za sestavljeno gibanje

Dvoje enakomernih gibanj: Kot prvi primer sestavljenega gibanja si oglejmo gibanje čolna, ki se s stalno hitrostjo v_0 glede na reko giblje pravokotno nanjo. Ker se reka giblje glede na obalo s hitrostjo v_1 , je hitrost

čolna glede na obalo vektorska vsota hitrosti čolna glede na reko in hitrosti reke glede na obalo (sl. 2.14a). V koordinatnem sistemu, prikazanem na sliki 2.14a, lahko obe hitrosti izrazimo kot dvokomponentna vektorja

$$\begin{aligned}\vec{v}_0 &= (0, v_0) \\ \vec{v}_1 &= (v_1, 0)\end{aligned}\quad (2.27)$$

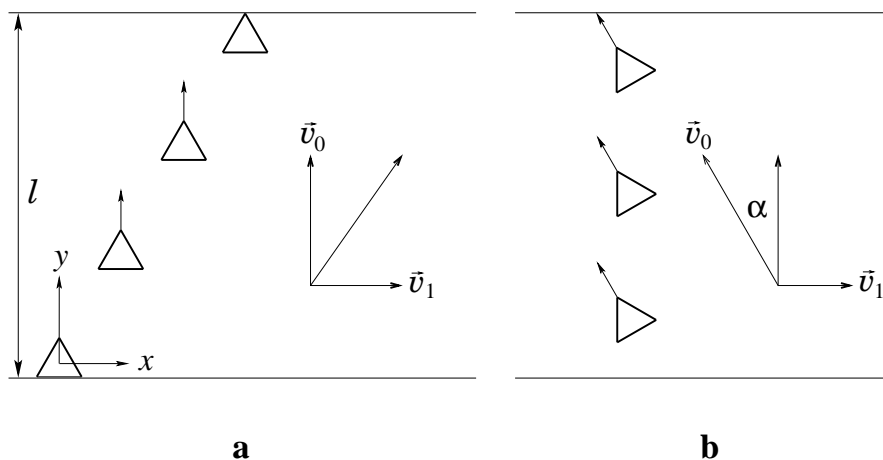
tako, da je celotna hitrost, ki je vsota obeh, enaka

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 = (v_1, v_0). \quad (2.28)$$

Položaj čolna izračunamo z integracijo hitrosti

$$\vec{r} = (x, y) = (v_1 t, v_0 t). \quad (2.29)$$

Čoln se giblje po premici $y = (v_0/v_1)x$. Reko prepluje tedaj, ko je y enak širini reke (l). Za to potrebuje čas $T = l/v_0$, v tem času pa se premakne vzdolž reke v smeri toka za lv_1/v_0 .



Slika 2.14: (a) Gibanje čolna, ki pluje s stalno hitrostjo (\vec{v}_0) pravokotno glede na reko. (b) Čoln pluje pod določenim kotom (α) glede na reko, da se giblje pravokotno glede na breg.

V kakšno smer bi moral čoln pluti glede na reko, da bi jo preplul pravokotno glede na breg? Tako, da je komponenta celotne hitrosti v smeri toka reke enaka nič. Če kot α (sl. 2.14b) poda odmik od smeri pravokotno na reko, je

$$\vec{v}_0 = (-v_0 \sin \alpha, v_0 \cos \alpha). \quad (2.30)$$

Komponenta vsote $\vec{v}_1 + \vec{v}_0$ smeri x mora biti enaka nič. Torej

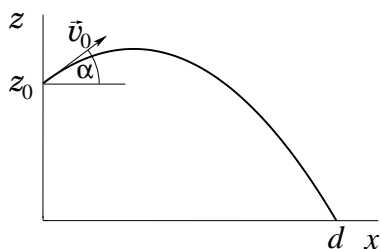
$$v_1 - v_0 \sin \alpha = 0 \quad (2.31)$$

in kot α , ki določa smer, je podan z

$$\sin \alpha = \frac{v_1}{v_0}. \quad (2.32)$$

Ta enačba ima rešitev le za $v_0 \geq v_1$, če pa je hitrost reke večja od hitrosti čolna, enačba 2.32 nima rešitev in ne moremo pluti pravokotno na breg.

Poševni met: Predmet vržemo ali izstrelimo z višine z_0 pod kotom α (sl. 2.15). Kako bo letel? Gibanje razstavimo na vodoravno komponento (smer x) in navpično komponento (smer z). V smeri x se giblje predmet enakomerno, v smeri z pa enakomerno pospešeno s težnostnim pospeškom g .



Slika 2.15: Pri poševnem metu opisuje gibanje predmeta v koordinatnem sistemu parabola.

Če je velikost začetne hitrosti v_0 , sta njeni komponenti v smereh x in z

$$v_{0,x} = v_0 \cos \alpha, \quad v_{0,z} = v_0 \sin \alpha. \quad (2.33)$$

Gibanje v smeri x je enakomerno, zato se hitrost ne spreminja, $v_x = v_{0,x}$ in koordinata x narašča enakomerno s časom

$$x = v_{0,x} t. \quad (2.34)$$

Gibanje v navpični smeri smo že obravnavali na strani 22, kjer smo ugotovili, da se višina predmeta nad zemljo spreminja po enačbi 2.11, ki jo tu le prepisemo s spremenjenimi oznakami; začetna hitrost navzgor je sedaj $v_{0,z}$. Zato

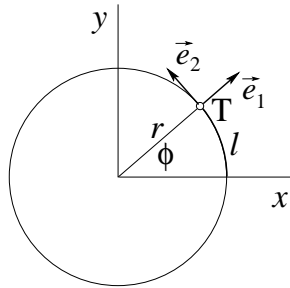
$$z = z_0 + \frac{1}{2} \frac{v_{0,z}^2}{g} - \frac{1}{2} g \left(t - \frac{v_{0,z}}{g} \right)^2. \quad (2.35)$$

Z eliminacijo časa (t) iz enačb 2.34 in 2.35 dobimo krivuljo, po kateri predmet leti

$$z = z_0 + \frac{1}{2} \frac{v_{0,z}^2}{g} - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0,x}^2} \left(x - \frac{v_{0,x} v_{0,z}}{g} \right)^2. \quad (2.36)$$

Predmet se giblje po paraboli (sl. 2.15). Predmet doseže najvišjo točko z višino $z_0 + v_{0,z}^2/(2g)$ pri $x = v_{0,x} v_{0,z}/g$. Razdaljo, do katere predmet prileti v smeri x ob padu na tla (d), dobimo iz enačbe 2.36 z zahtevo $z = 0$.

Kroženje



Slika 2.16: Kroženje masne točke v ravnini $x - y$.

Enakomerno kroženje je posebna oblika gibanja, kjer se masna točka giblje po krogu z radijem r v ravnini $x - y$ s stalno hitrostjo (sl. 2.16). Ravnina, v kateri poteka kroženje, je pravokotna na **os**. Kjub tem, da je hitrost stalna, pa na krožečo masno točko vendarle deluje pospešek in vsled tega tudi sila*. Ta pospešek imenujemo *centrifugalni pospešek* in ustrezno silo *centrifugalna sila*. Poglejmo si, kako ga lahko izračunamo.

Čeprav je kroženje gibanje v ravnini, pa ima zgolj eno samo prostostno stopnjo. To je posledica tega, da je lega masne točke popolnoma določena zgolj z vrednostjo kota ϕ . Koordinati masne točke T lahko namreč izrazimo kot

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi. \quad (2.37)$$

Kroženje je torej popolnoma podano, če vemo, kako se kot ϕ spreminja s časom. Hitrost spreminjanja kota je potem podana s *kotno hitrostjo* ω

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}, \quad (2.38)$$

hitrost spreminjanja kotne hitrosti pa s *kotnim pospeškom* α

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\phi}{dt^2}. \quad (2.39)$$

Zveze med kotom (ϕ), kotno hitrostjo (ω) in kotnim pospeškom (α) so enake kot pri premočrtnem gibanju med koordinato x , hitrostjo v in pospeškom a , zato tudi za enakomerno kroženje

*Zveza med silo in pospeškom je opisana v poglavju 2.1.2.

in enakomerno pospešeno kroženje veljajo analogne zveze kot pri premočrtnem gibanju. Za enakomerno kroženje, na primer, je kotna hitrost ω stalna, zato je kotni pospešek enak nič, kot pa se spreminja linearno s časom, $\phi = \omega t$. Frekvenca kroženja (ν) pove število vrtljajev na časovno enoto. Njena enota je Hertz ($1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$). Če merimo kot v radianih, je en vrtljaj enak kotu 2π in se kotna hitrost izraža s frekvenco kot:

$$\omega = 2\pi\nu . \quad (2.40)$$

Pot, ki jo prepotuje točka pri zavrtitvi za kot ϕ , je enaka loku krožnega izseka (l) s kotom ϕ . Če merimo kot v radianih, velja

$$l = r\phi . \quad (2.41)$$

Veljavnost te zveze je evidentna. Lok je vsekakor sorazmeren kotu ϕ in radiju kroga, sorazmernostni faktor pa mora biti tak, da da za cel obrat ($\phi = 2\pi$) obseg kroga ($2\pi r$).

Hitrost je po definiciji podana s spreminjanjem poti po času, torej

$$v = \frac{dl}{dt} = r \frac{d\phi}{dt} = r\omega , \quad (2.42)$$

pospešek pa s spreminjanjem hitrosti

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\alpha . \quad (2.43)$$

Vendar moramo biti pri tem pazljivi, ker sta hitrost in pospešek vektorja, tukaj pa smo gledali spremembe velikosti. Uporabimo naše znanje o vektorjih. Krajevni vektor \vec{r} , ki določa lego točke, lahko glede na en. 2.37 napišemo

$$\vec{r} = (r \cos \phi, r \sin \phi) = r\vec{e}_1 , \quad (2.44)$$

kjer smo uvedli enotski vektor $\vec{e}_1 = (\cos \phi, \sin \phi)$. Vektor \vec{e}_1 je enotski vektor, ker je njegova velikost (po en. 2.24) enaka ena. Izraz 2.44 pomeni, da krajevni vektor \vec{r} kaže v radialni smeri \vec{e}_1 , njegova velikost pa je stalna $|\vec{r}| = r$.

Vektor hitrosti dobimo z odvodom vektorja

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r \frac{d\phi}{dt} (-\sin \phi, \cos \phi) = r\omega\vec{e}_2 , \quad (2.45)$$

kjer smo uvedli enotski vektor \vec{e}_2 , ki kaže v smeri tangente. Ugotovili smo, da je hitrost po velikosti enaka $r\omega$, kar se ujema z izrazom 2.42, njena smer pa se spreminja in je vedno tangencialna, ker se točka giblje v vsaki točki v smeri krožnice.

Vektor pospeška dobimo z odvodom vektorja hitrosti

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = r \frac{d^2\phi}{dt^2} (-\sin \phi, \cos \phi) + r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 (-\cos \phi, -\sin \phi) = r\alpha\vec{e}_2 - r\omega^2\vec{e}_1 . \quad (2.46)$$

Pri tem smo najprej odvajali po času velikost vektorja hitrosti, nato pa še njegovo smer. Pospešek, ki obstaja zaradi spreminjanja velikosti hitrosti, ima tangencialno smer in je po velikosti enak izrazu 2.43, kjer smo pospešek že označili z indeksom t: *tangencialni pospešek*. Za enakomerno kroženje sta kotni pospešek in zato tangencialni pospešek enaka nič. Drugi del pospeška: $-r\omega^2\vec{e}_1$ ima smer proti središču kroga in ga zato imenujemo *radialni pospešek*. Po velikosti je enak

$$a_r = r\omega^2 = \frac{v^2}{r} . \quad (2.47)$$

Radialni oziroma centrifugalni pospešek je različen od nič tudi za enakomerno kroženje, torej za kroženje s stalno kotno hitrostjo. Takrat je hitrost sicer po velikosti stalna, se pa ves čas spreminja njena smer. Posledica spreminjanja smeri po velikosti sicer stalne hitrosti vodi do centrifugalnega pospeška.

Za zgled izračunajmo radialni pospešek pri centrifugi, ki se vrti s frekvenco 35 Hz. Na mestu, ki je za 10 cm oddaljeno od osi, je radialni pospešek približno enak $500g$ ($g = 9,81 \text{ m/s}^{-2}$),* kjer smo za radialni pospešek upoštevali enačbo 2.47, za kotno hitrost (ω) pa enačbo 2.40.

*Posešek prostega pada je vpeljan z enačbo 2.51.

2.1.2 Dinamika

V prejšnjem poglavju smo se naučili, kako popišemo gibanje teles, v tem pa bomo spoznali, kaj povzroča gibanje oziroma spremembe gibanja. Gibanje povzročajo **sile**. Medtem ko gibanje opišemo s različnimi količinami, kot so lega, hitrost in pospešek, dinamika povezuje trenutne vrednosti teh količin s silami.

Newtonov zakon

Newtonov zakon pove, na kakšen način sile določajo gibanje. Newtonov zakon ima sledečo obliko

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (2.48)$$

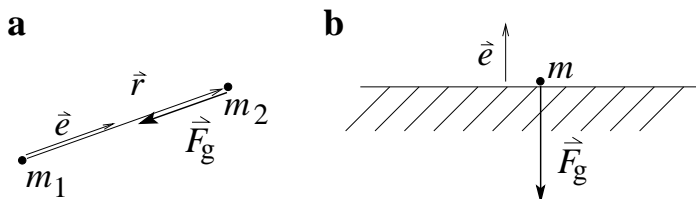
kjer je \vec{a} vektor pospeška, m masa telesa in \vec{F} sila, ki deluje na telo. Če deluje na telo več sil, je \vec{F} vektorska rezultanta vseh sil. Glede na to, da je sila vzrok za pospešek, bi bilo najbrž primerneje Newtonov zakon napisati v obliki

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (2.49)$$

Če je sila poznana, je gibanje popolnoma podano, če poznamo začetno lego točke in njeno začetno hitrost. Če je sila enaka nič, se telo giblje enakomerno oziroma miruje, če je v začetku mirovalo. V primeru torej, da na telo ne delujejo nobene sile, to bodisi miruje ali pa se giblje s konstantno hitrostjo. To je eden od osnovnih zakonov dinamike.

Vrste sil

Glede na izvor, doseg in velikost ločimo med seboj različne vrste sil. Glede na velikost teles med katerimi delujejo jih razvrstimo na **sile kratkega dosega** in **sile dolgega dosega**. Sili dolgega dosega sta gravitacijska sila in elektromagnetna sila. Sile, kot so n. pr. šibka jedrska in močna jedrska sila, so kratkega dosega (pogl. 7.2.2).



Slika 2.17: Skici za prikaz delovanja gravitacijske sile.

Navedimo nekaj sil, s katerimi se lahko srečamo v vsakdanjem življenju.

- **Gravitacijska sila med točkastimi masami:** Med telesoma z masama m_1 in m_2 deluje tako imenovana *gravitacijska sila*. Sila, s katero deluje telo z maso m_1 na telo z maso m_2 , zapišemo v vektorski obliki kot

$$\vec{F}_g = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}. \quad (2.50)$$

r je razdalja med masama, κ pa gravitacijska konstanta. Sila deluje v smeri premice, ki povezuje obe masi, kar ponazorimo z enotskim vektorjem $\vec{e} = \vec{r}/r$ (sl. 2.17a). Znak minus v izrazu 2.50 pomeni, da je sila privlačna.

- **Sila teže:** Ker je velikost zemlje veliko večja od velikosti teles na njeni površini lahko gravitacijsko silo med zemljo in telesom mase m na površini zemlje izrazimo kot (sl. 2.17b)

$$\vec{F}_g = -gm\vec{e}, \quad (2.51)$$

pri čemer so v faktorju g , tako imenovanem pospešku prostega pada, zajeti prispevki vseh delov zemlje Δm_i ($g = \kappa \sum_i \Delta m_i \cos \vartheta_i / r_i^2$, pri tem je \vec{r}_i vektor od dela zemlje Δm_i do telesa na površini zemlje in ϑ_i kot med vektorjema \vec{r}_i ter \vec{e}).

- **Elektrostatska sila med točkastimi naboji:** Med točkastima električnima nabojema e_1 in e_2 v vakuumu deluje *Coulombska sila*. Sila naboja e_1 na naboj e_2 je enaka (prim. sl. 4.3 na str. 117)

$$\vec{F}_C = \frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}. \quad (2.52)$$

r je razdalja med nabojema, ϵ_0 pa je influenčna konstanta. S Coulombovo silo se bomo ukvarjali v poglavju "Električni in magnetni pojavi" na strani 117.

- **Medmolekularne sile:** Silo med molekulami in atomi lahko napišemo približno v obliki Lennard-Jonesove sile, ki ima obliko

$$\vec{F}_{LJ} = \left(\frac{12a}{r^{13}} - \frac{6b}{r^7} \right) \vec{e}. \quad (2.53)$$

kjer sta a in b pozitivni konstanti. Prvi člen v zgornji enačbi je posledica odboja med molekulama zaradi kvantno mehanskih pojavov, drugi pa je posledica privlaka med njima zaradi fluktuirajočih električnih dipolov molekul. O tem več kasneje (pogl. 5.3).

- **Sila trenja:** Sila trenja (F_t) je sorazmerna sili, s katero deluje telo pravokotno na podlago (N):

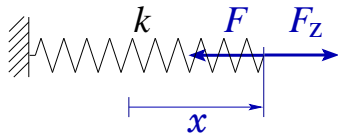
$$F_t = \mu N. \quad (2.54)$$

μ je *koeficient trenja*.

- **Sila vzmeti:** Sila vzmeti je enaka

$$F = -kx. \quad (2.55)$$

x je odmik vzmeti od mirovne lege, k pa je *konstanta vzmeti*. Znak minus pomeni, da je smer sile vzmeti nasprotna smeri odmika (sl. 2.18). Zaradi linearne zveze med silo in odmikom se lahko vzmeti uporabljajo za merjenje sil.



Slika 2.18: Zaradi zunanje sile (F_z) se vzmet raztegne. x je odmik desnega konca vzmeti od lege, ko je sila enaka nič. Sila vzmeti (F) je nasprotno enaka zunanji sili.

Posledice Newtonovega zakona

Newtonov zakon ima vrsto zanimivih posledic, ki so v njem sicer implicitno vsebovane, a ne na očiten način. Poglejmo si jih nekaj.

Zakon o ohranjanju gibalne količine: Iz Newtonovega zakona lahko za začetek izpeljemo dvoje koristnih in uporabnih zvez. Prvo dobimo tako, da enačbo 2.48 pomnožimo z infinitezimalno časovno spremembo dt

$$\vec{F} dt = m \frac{d\vec{v}}{dt} dt = m d\vec{v}. \quad (2.56)$$

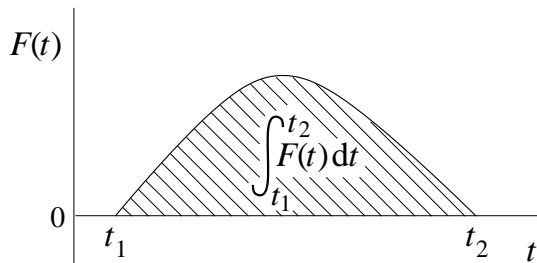
Ko seštejemo prispevke sile od začetnega časa (t_1) do končnega časa (t_2), dobimo

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} m d\vec{v} = \vec{G}_2 - \vec{G}_1 = \Delta\vec{G}. \quad (2.57)$$

Izraz na levi, ki ga imenujemo **sunek sile**, je enak spremembi **gibalne količine**, ki je definirana kot $\vec{G} = m\vec{v}$. Če je sunek sile enak nič, za kar ni nujno potrebno, da je sila enaka nič, se gibalna količina v tem časovnem intervalu ne spremeni, potemtakem se **gibalna količina ohranja**, oziroma

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt = 0 \quad \text{sledi} \quad \vec{G} = \text{konstanta}. \quad (2.58)$$

Omenimo le še to, da lahko sunek sile v primeru, da imamo opravka s konstantno silo, izrazimo kot $\vec{F}(t_2 - t_1)$. V splošnem pa je enak ploščini pod krivuljo, ki opisuje odvisnost sile od časa (sl. 2.19).



Slika 2.19: Ploščina pod krivuljo, ki opisuje spreminjanje sile od časa ($F(t)$), je enaka sunku sile.

Delo, moč in zakon o ohranitvi kinetične energije: Naslednjo posledico Newtonovega zakona dobimo tako, da pomnožimo enačbo 2.48 skalarno z infinitezimalnim elementom poti $d\vec{r}$. Na levi strani enačbe torej dobimo $\vec{F} \cdot d\vec{r}$. Sedaj definiramo novo fizikalno količino, ki jo imenujemo **delo sile** in jo označimo s črko A

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (2.59)$$

Delo sile je eden od osnovnih fizikalnih konceptov. Če je sila konstantna in se telo giblje v smeri sile, je delo, ki ga opravi sila na dani poti, enako kar produktu sile in poti, na kateri deluje. Če ne kažeta v istih smereh, potem je delo sile enako skalarnemu produktu med silo in potjo. V primeru, da sta si sila in pot, po kateri se telo giblje, kot je primer pri enakomernem kroženju, pravokotni, sila ne opravi nobenega dela.

Moč je količina, ki pove, v kolikšnem času opravimo delo. Definiramo jo z izrazom

$$P = \frac{dA}{dt}. \quad (2.60)$$

Če enačbo 2.59 odvajamo po času, dobimo

$$P = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (2.61)$$

Če sila ni pravokotna na smer gibajočega se telesa, opravljamo delo, ker skalarni produkt med silo in hitrostjo ni enak nič.

Poglejmo še, kaj dobimo, ko pomnožimo z diferencialom poti $d\vec{r} = \vec{v}dt$, desno stran enačbe 2.48. Dobimo

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}dt = m\vec{v} \cdot d\vec{v}. \quad (2.62)$$

Ko sedaj to enačbo integriramo po $d\vec{v}$ ter upoštevamo, da je

$$\int \vec{v} \cdot d\vec{v} = \int (v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z) = \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{v^2}{2},$$

dobimo

$$\int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2. \quad (2.63)$$

Sedaj definirajmo še novo količino in sicer **kinetično energijo** masnega delca z maso m

$$W_k = \frac{1}{2}mv^2. \quad (2.64)$$

Tako lahko spravimo obe enačbi, 2.59 in 2.63, skupaj v tole pomembno posledico Newtonovega zakona

$$A = W_{k,2} - W_{k,1}. \quad (2.65)$$

Delo sil pri gibanju je torej enako spremembi kinetične energije. V kolikor sila pri gibanju ne opravi nobenega dela, če je recimo pravokotna na pot delca kot pri kroženju, potem je kinetična energija konstanta gibanja in se torej med gibanjem ne spreminja. Tej posledici Newtonovega zakona pravimo tudi **zakon o ohranjanju kinetične energije**.

Konzervativne sile in potencialna energija

Če izračunano delo sile pri premiku telesa iz točke 1 v točko 2 ni odvisno od poti, po kateri smo telo premikali, pravimo, da so sile, ki to gibanje povzročajo, **konzervativne**. Gravitacijska sila je konzervativna sila. Poleg gravitacijske sile so to še n. pr. Coulombska sila, Lennard-Jonesova sila in sila vzmeti. Delo sile trenja (en. 2.54) pa je od poti, po kateri premikamo telo, odvisno. Sile, katerih delo pri gibanju je odvisno od poti delca, ki se giblje, imenujemo **disipativne sile**.

Delovanje konzervativnih sil lahko vedno opišemo s **potencialno energijo**. Za premočrtno gibanje je potencialna energija $W_p(x)$, pri čemer velja naslednja zveza med silo in potencialno energijo

$$F(x) = -\frac{dW_p(x)}{dx}, \quad (2.66)$$

če ima sila smer koordinate x .

Za konzervativno silo v poljubni smeri v prostoru zapišemo enačbo 2.66 v posplošeni obliki z vpeljavo gradienta potencialne energije

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla W_p(\vec{r}). \quad (2.67)$$

Gradient potencialne energije (∇W_p) je vektor s komponentami $\frac{dW_p}{dx}$, $\frac{dW_p}{dy}$ in $\frac{dW_p}{dz}$, ki ga lahko v simbolični obliki zapišemo tudi kot $dW_p/d\vec{r}$ (dodatek str. 260).

Potencialne energije, ki ustrezajo prej naštetim konservativnim silam (en. 2.50, 2.51, 2.52, 2.53 in 2.55), se da dobiti v obliki

- za gravitacijsko silo $W_p(\vec{r}) = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r}$
- za silo teže $W_p(\vec{r}) = mgz$
- za Coulombsko silo $W_p(\vec{r}) = \frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0 r}$
- za medmolekulska silo $W_p(\vec{r}) = \frac{a}{r^{12}} - \frac{b}{r^6}$
- za silo vzmeti $W_p(\vec{r}) = \frac{1}{2} kx^2$

V naslednjem koraku si odgovorimo še na vprašanje, zakaj lahko trdimo, da je $W_p(\vec{r})$ potencialna energija masnega delca.

Zakon o ohranjanju energije

Pri zakonu o ohranjanju kinetične energije smo ugotovili, da je celotno delo, ki ga pri gibanju opravi zunanja sila, enako spremembi kinetične energije. Za konzervativne sile dobi ta trditev posebno elegantno obliko. Namreč, če se vrnemo k definiciji opravljenega dela sile (en. 2.59), potem jo lahko za konzervativne sile zapišemo v obliki

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{dW_p(\vec{r})}{d\vec{r}} \cdot d\vec{r}. \quad (2.68)$$

Ker je iskanje gradienta nasprotna operacija, kot je integriranje po \vec{r} , integral na desni strani ni odvisen od poti med \vec{r}_2 in \vec{r}_1 , pač pa je enak zgolj razliki potencialnih energij

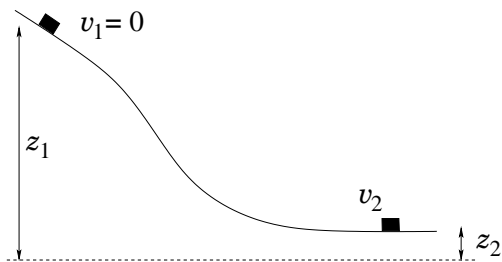
$$A = W_p(\vec{r}_1) - W_p(\vec{r}_2), \quad (2.69)$$

torej je odvisen le od razlike potencialnih energij na začetku in na koncu gibanja. Združimo sedaj skupaj enačbo 2.69 in zakon o ohranjevanju kinetične energije (en. 2.65), pa dobimo **zakon o ohranjevanju energije**

$$W_{k,2} + W_p(\vec{r}_2) = W_{k,1} + W_p(\vec{r}_1). \quad (2.70)$$

Vsota kinetične in potencialne energije na začetku gibanja mora biti enaka vsoti kinetične in potencialne energije na koncu gibanja. Vsota potencialne in kinetične energije se torej med gibanjem ne spreminja s časom. Končno tudi lahko vidimo, zakaj je termin potencialna energija za $W_p(\vec{r})$ smiselen, saj nastopa popolnoma enakovredno s kinetično energijo v zakonu o ohranjevanju energije.

Kot zgled za ohranjevanje energije lahko obravnavamo spust točkastega telesa, ki brez trenja drsi po klancu (sl. 2.20). Vsota kinetične in potencialne energije se v vsakem trenutku ohranja. Ker telo v začetku miruje, je njegova kinetična energija enaka spremembi potencialne energije.



Slika 2.20: Ko spustimo telo z maso m , ki v začetku miruje, po klancu, se njegova potencialna energija pretvori v kinetično. V prikazanem primeru velja $mv_2^2/2 = mgz_1 - mgz_2$.

Čeprav pojem energije neposredno izhaja iz Newtonovega zakona in torej vsebuje identično informacijo, dodatno pripomore k razumevanju fizikalnih pojavov. Zveze med različnimi vrstami energije lahko namreč koristno uporabimo tudi kadar sil samih ne poznamo ali pa so obravnavani sistemi tako komplicirani, da bi bila direktna uporaba drugega Newtonovega zakona iz praktičnih razlogov nemogoča.

Vsoto kinetične in potencialne energije v zgornji formulaciji zakona o ohranjevanju energije včasih poimenujemo tudi **mehanska energija**. Mehanska energija se ne spreminja, če v mehanskem sistemu ne delujejo disipativne sile. Če v sistemu delujejo disipativne sile, se del mehanske energije pretvori v toploto, kot bomo ugotovili pri termodinamiki. Takrat se vsota kinetične in potencialne energije s časom zmanjšuje, pravimo tudi, da se **disipira**. Pri termodinamiki bomo uvideli (pogl. 3.3.1), da je tudi toplota vrsta energije in da izrek o ohranjevanju energije velja še vedno, če pri seštevanju energij upoštevamo tudi toplotno energijo. Videli bomo tudi, da poznamo še več drugih vrst energije kot so električna energija, energija kemijskih vezi, energija sevanja, jedrska energija, itd.

Večino procesov, ki jih preučujemo v neživem in tudi živih sistemih, lahko opredelimo kot procese, pri katerih se pretvarja energija iz ene od svojih oblik v drugo, kar seveda je ravno vsebina zakona o ohranjevanju energije. Primer iz živega sveta. Pri fotosintezi se energija sevanja pretvarja v energijo kemijskih vezi. Pri delovanju mišic se energija kemijskih vezi pretvarja v kinetično energijo. Oko pretvarja energijo sevanja najprej v energijo kemijskih vezi in nato v električno energijo (pogl. 6.5.5).

Zakon o ohranjevanju energije predstavlja enega od najpomembnejših temeljev naravoslovnih znanosti. Brez njega sveta preprosto ne moremo razumeti.

Dinamika kroženja masne točke

Enačba gibanja pri kroženju: Kot smo spoznali v poglavju 2.1.1, je kroženje okrog stalne osi posebna vrsta gibanja, ki ga na najbolj primeren način opisujemo s kinematičnimi parametri kotom (ϕ), kotno hitrostjo (ω) in kotnim pospeškom (α). Temu opisu ustrezno je potrebno prirediti tudi Newtonov zakon (en. 2.48). Masna točka, ki kroži na razdalji r od osi, se giblje pospešeno le, če ima sila, ki nanjo deluje, komponento v smeri tangente na krožnico (sl. 2.21). Tangencialni pospešek je glede na Newtonov zakon enak $a_t = F_t/m$, ustrezen kotni pospešek pa je potem (en. 2.43) $\alpha = F_t/rm$. Količina, ki najbolj ustrezno opredeljuje vzrok za pospešeno vrtenje, pa ni na

primer tangencialna sila ali razmerje med njo in razdajo r , ampak **navor** (M), ki je definiran kot produkt razdalje r in tangencialne sile:

$$M = rF_t. \quad (2.71)$$

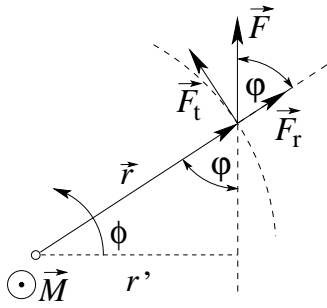
Enačba gibanja se torej glasi

$$M = J\alpha, \quad (2.72)$$

pri čemer smo definirali **vztrajnostni moment masne točke** J kot

$$J = mr^2. \quad (2.73)$$

Vrtenje masne točke torej opisujemo z enačbo gibanja, ki je analogna enačbi za premočrtno gibanja masne točke, le da v slednji nadomestimo pospešek s kotnim pospeškom, silo z navorom, maso pa z vztrajnostnim momentom.

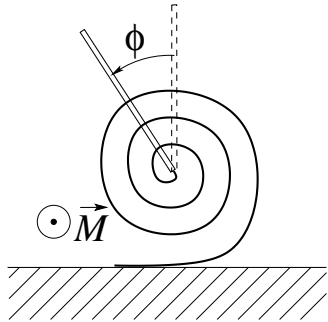


Slika 2.21: Na točkasto telo z maso m , ki se giblje po krožnici z radijem r , deluje sila \vec{F} . \vec{F}_t je njena tangencialna komponenta, \vec{F}_r pa njena radialna komponenta. φ je kot med smerjo vektorja \vec{r} , ki določa lego masne točke, in smerjo sile. Učinek sile na masno točko, ki lahko kroži v ravnini, je večji pri večjem kotu φ in s tem pri večji ročici (r').

Dodajmo še nekaj podrobnosti o navoru. Analogno kot merimo sile z raztegnitvijo prožne vzmeti (en 2.55), lahko navoro merimo s polžastimi vzmetmi (sl. 2.22). Kot zasuka polžaste vzmeti (ϕ) je namreč sorazmeren navoru

$$\phi = \frac{M}{D}, \quad (2.74)$$

kjer je D , tako imenovana direkcijska konstanta, značilna konstanta za vsako polžasto vzmet.



Slika 2.22: Polžasta vzmet.

Pri definiciji navora (en. 2.71) smo upoštevali, da vrtečo se masno točko pospešuje samo tangencialna komponenta sile. Izraz za navor pa lahko napišemo tudi v bolj splošni obliki, tako da v njem nastopa poljubna sila, ki deluje na masno točko (sl. 2.21). V tem primeru moramo napisati navor kot vektorski produkt vektorja, ki kaže od osišča do mesta prijema sile, in sile, torej

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (2.75)$$

Velikost tega vektorskega produkta je $rF \sin \varphi = Fr'$, kjer je φ kot med vektorjem \vec{r} ter \vec{F} in $r' = r \sin \varphi$ ročica, to je pravokotna razdalja od središča kroženja do premice, na kateri leži vektor sile. Na sliki 2.21 vidimo, da je produkt $F \sin \varphi$ ravno enak tangencialni komponenti sile (F_t), zato se enačba 2.75 ujema z enačbo 2.71. Vidimo pa iz enačbe 2.75, da je navor vektor, katerega smer je pravokotna na ravnino, v kateri ležita vektorja \vec{r} in \vec{F} , in se ujema s smerjo osi vrtenja. Navor je pozitiven, če deluje tako, da se masna točka vrti v nasprotni smeri od gibanja urinega kazalca, negativen pa, če povzroča pospeševanje vrtenja v smeri urinega kazalca.

Isto smer, kot jo ima navor, lahko pripišemo tudi kotnemu pospešku, ki ga sedaj označimo z vektorjem ($\vec{\alpha}$). V splošnem torej velja

$$\vec{M} = J\vec{\alpha}. \quad (2.76)$$

Enakomerno kroženje: Zanima nas, kakšna sila in navor delujeta na masno točko, ki kroži enakomerno. V tem primeru je kotni pospešek enak nič (pogl. 2.1.1). Iz Newtonovega zakona za kroženje (en. 2.72) razberemo, da je tudi navor na masno točko enak nič. Toda to še ne pomeni, da na masno točko ne deluje nobena sila. Kot smo ugotovili v poglavju 2.1.1, se pri enakomernem kroženju masna točka giblje pospešeno proti osi, pri čemer je velikost pospeška enaka $\omega^2 r$. Zato je po Newtonovem zakonu (en. 2.48) sila enaka

$$\vec{F} = -m\omega^2 \vec{r}. \quad (2.77)$$

Predznak minus kaže, da je sila vedno usmerjena proti osi. Navor te sile je enak nič, ker je ročica v tem primeru enaka nič.

Zakon o ohranjanju vrtilne količine: Iz Newtonovega zakona za kroženje lahko prav tako izpeljemo koristne zveze. Prvo, analogno enačbi 2.57, dobimo tako, da enačbo 2.72 pomnožimo z diferencialom časa dt

$$Mdt = J \frac{d\omega}{dt} dt = J d\omega. \quad (2.78)$$

Pri kroženju kotna hitrost (ω) nadomešča običajno hitrost. Ko integriramo (seštejemo prispevke) navora od začetnega časa (t_1) do končnega časa (t_2), dobimo

$$\int_{t_1}^{t_2} Mdt = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J d\omega = \Gamma_2 - \Gamma_1 = \Delta\Gamma. \quad (2.79)$$

Izraz na levi je **sunek navora**, ki je enak spremembi **vrtilne količine**, definirane kot $\Gamma = J\omega$. Če je sunek navora enak nič, za kar ni nujno potrebno, da je navor v intervalu med t_1 in t_2 ves čas enak nič, se vrtilna količina ohranja. Zakon o ohranjanju vrtilne količine je analogen ustreznemu zakonu za ohranjanje gibalne količine (en. 2.57).

Delo in zakon o ohranitvi kinetične energije: Analogno kot pri premočrtnem gibanju lahko tudi pri kroženju masne točke definiramo delo. V ta namen pomnožimo Newtonov zakon za kroženje (en. 2.72) z diferencialom kota zasuka okrog osi ($d\phi$). Na levi strani enačbe torej dobimo $Md\phi$. Ker se v splošnem navor, ki deluje na masno točko, spreminja s kotom zavrtitve (ϕ), je delo enako integralu navora po ϕ

$$A = \int_{\phi_1}^{\phi_2} M d\phi, \quad (2.80)$$

kjer sta ϕ_1 in ϕ_2 začetni in končni kot. Če je navor stalen, je delo enako kar produktu navora in spremembi kota.

Ko pa desno stran enačbe 2.72 pomnožimo z diferencialom kota ($d\phi = \omega dt$) in upoštevamo zvezo med kotnim pospeškom ter kotno hitrostjo ($\alpha = d\omega/dt$), dobimo

$$J \frac{d\omega}{dt} \omega dt = J\omega d\omega. \quad (2.81)$$

Ko nato ta izraz integriramo po ω od začetne kotne hitrosti (ω_1) do končne kotne hitrosti (ω_2), dobimo

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega d\omega = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2. \quad (2.82)$$

Sedaj vpeljemo še izraz za kinetično energijo pri kroženju masnega delca

$$W_k = \frac{1}{2}J\omega^2, \quad (2.83)$$

da dobimo stavek o delu in kinetični energiji

$$A = W_{k,2} - W_{k,1}, \quad (2.84)$$

ki smo ga zapisali podobno kot pri translaciji (en. 2.65). Delo navora pri kroženju je torej enako spremembi kinetične energije. Če ni navora na masno točko, tudi opravljenega dela ni in kinetična energija se med kroženjem ne spreminja.

2.2 Mehanika togega telesa

2.2.1 Opis gibanja togega telesa

Do sedaj smo obravnavali le točkasta telesa, ki nimajo razsežnosti. Realna telesa imajo končno razsežnost. Kadar se medsebojne razdalje posameznih sestavnih delov telesa ne spreminjajo, imenujemo tako telo togo telo. Lego togega telesa določa šest parametrov - togo telo ima šest prostostnih stopenj. Lego telesa na primer lahko popišemo s tremi koordinatami izbrane točke na telesu in s tremi koti, ki določajo orientacijo telesa.

Če si predstavljamo na predmetu neko izbrano smer, potrebujemo namreč dva kota za določitev orientacije te smeri v prostoru, tretji kot pa ustreza zavrtitvi okoli te smeri. Določitev lege in orientacije telesa v prostoru je lahko pomembna pri nekaterih postopkih v medicini (sl. 2.23). Primer je obsevanje z ionizirajočimi delci. Pacienta moramo s pomočjo premične in zavrtljive obsevalne mize orientirati tako, da ionizirajoče sevanje učinkuje na določenem mestu v organizmu in da pri tem naredi čim manj škode drugim delom organizma.



Slika 2.23: Postavitev in orientacija obsevalne mize določa orientacijo pacienta v prostoru.

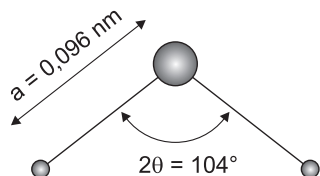
Ker lego togega telesa popišemo s koordinatami izbrane točke na telesu in s koti, ki določajo orientacijo, tudi gibanje telesa popišemo z gibanjem izbrane točke ter s spreminjanjem treh kotov, ki popisujejo orientacijo. Gibanje točke popišemo tako, kot smo se naučili v prvem delu tega poglavja, spreminjanje kotov pa predstavlja vrtenje, ki ga popišemo tako kot kroženje. V splošnem lahko popišemo spreminjanje treh kotov kot vrtenje okoli treh med seboj pravokotnih osi.

2.2.2 Dinamika togega telesa

Dinamika togega telesa, sestavljenega iz masnih točk

Pri opisu gibanja teles končnih razsežnosti moramo upoštevati, da se telesa, poleg tega da se premikajo po prostoru, lahko tudi vrtijo oziroma rotirajo. Telesa se lahko tudi samo vrtijo. Tako se na primer vrtili vetrnica pri vetrni elektrarni. Ko sedé spremljamo teniško tekmo, naše telo miruje, gibanje žogice pa spremljamo z obračanjem – vrtenjem glave. Vsakdanji primer gibanja, pri katerem

se telo vrta in hkrati spreminja svojo lego v prostoru, je gibanje Zemlje okoli Sonca. Morda se tudi spomnite, kako se giblje frisbi. V splošnem moramo pri spreminjanju lege togega telesa upoštevati poleg treh stopenj prostosti, ki določajo njegovo lego v prostoru, tudi njegove stopnje prostosti zaradi vrtenja okrog treh neodvisnih osi (pogl. 2.2.1). Gibanje togega telesa zato obravnavamo kot gibanje, sestavljeno iz **translacije** in **rotacije**. Translacijo bomo obravnavali kot gibanje masne točke, katere masa je enaka masi obravnavanega togega telesa, nahaja pa se v **masnem središču telesa**, ki ga bomo definirali v nadaljevanju. Rotacijo v splošnem obravnavamo z vrtenjem okrog treh osi, ki potekajo skozi masno središče telesa. Vendar se bomo tukaj v glavnem omejili na obravnavo vrtenja okrog le ene osi. Da bi lahko čim bolj uporabili znanje, ki smo ga pridobili pri opisu gibanja masne točke, se bomo najprej ukvarjali z gibanjem teles, ki so sestavljena iz masnih točk. Dobljene rezultate bomo za toga telesa z zvezno porazdeljeno maso posplošili v naslednjem poglavju.



Slika 2.24: Primer molekule: molekula H₂O.

Primeri togih teles, ki so sestavljena iz masnih točk, so molekule (sl. 2.24). Masa molekule je namreč praktično vsa zbrana v jedrih atomov, ki jo sestavljajo in katerih velikost je za štiri do pet redov velikosti manjša od velikosti atomov samih. Jedra atomov, ki sestavljajo določeno molekulo, se v prvem približku nahajajo na točno določenih medsebojnih legah. Na sliki 2.25a je prikazana molekule vode tako, da so podane koordinate jeder kisika in obeh vodikov glede na izbrani koordinatni sistem. Lega masnega središča molekule je podana z

$$\vec{r}_t = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i, \quad (2.85)$$

pri čemer sta $m = \sum_{i=1}^N m_i$ masa molekule in N število atomov v molekuli, ki je v primeru molekule vode enako 3. Lego masnega središča molekule vode lahko hitro izračunamo s pomočjo bolj spretno izbranega koordinatnega sistema (sl. 2.25b). Masno središče togega telesa včasih poimenujemo kot **težišče** telesa, kajti izkaže se, da ima rezultanta sil, ki delujejo na togo telo zaradi sile teže, svoje prijemališče ravno v njegovem masnem središču.

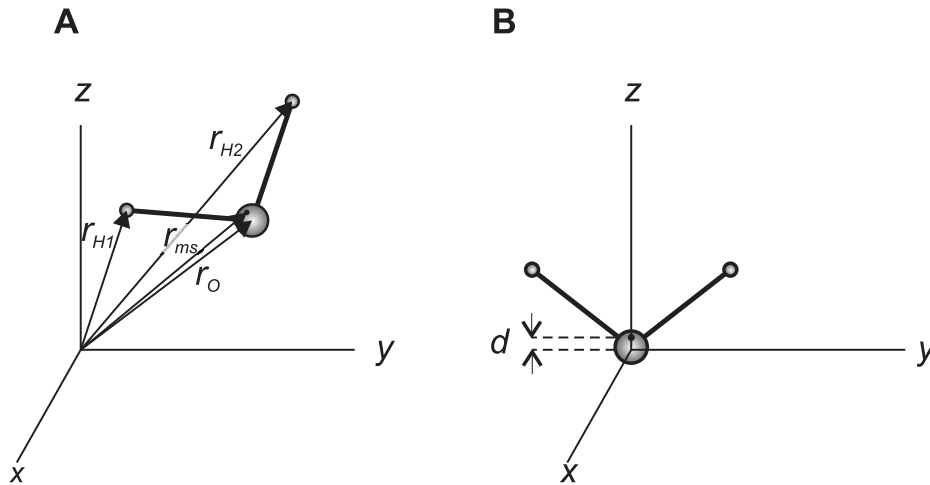
Sedaj bomo pokazali, da lahko glede na gornjo definicijo masnega središča (en. 2.85) napišemo Newtonov zakon v obliki enačbe 2.48 tudi za translacijsko gibanje togega telesa. Newtonov zakon (en. 2.48) velja za vsako masno točko, ki sestavlja naše togo telo, posebej

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{i,j}. \quad (2.86)$$

V enačbi 2.86 smo upoštevali, da poleg **zunanje sile** \vec{F}_i , ki deluje na i -ti atom molekule, lahko s silami delujejo nanj tudi drugi atomi s silami $\vec{F}_{i,j}$, ki jih imenujemo **notranje sile**. Če sedaj seštejemo leve strani enačbe 2.86 za vse atome, ki sestavljajo molekulo, in izenačimo dobljeno vsoto z vsoto vseh desnih strani enačbe 2.86, dobimo

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{F}, \quad (2.87)$$

pri čemer smo upoštevali, da se zaradi nasprotnega medsebojnega delovanja vseh parov atomov notranje sile med seboj izničijo. \vec{F} je rezultanta vseh zunanjih sil, ki delujejo na molekulo. Levo stran enačbe 2.87 lahko preuredimo s tem, da zamenjamo vrstni red seštevanja in odvajanja, $\sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} (\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i)$. Z upoštevanjem enačbe 2.85 lahko izrazimo vsoto $\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$ kot



Slika 2.25: Molekula vode v različnih koordinatnih sistemih. d je razdalja med masnim središčem molekule in masnim središčem atoma kisika.

produkt mase telesa in pospeška masnega središča. Vidimo, da za translacijsko gibanje togega telesa, sestavljenega iz masnih točk, velja Newtonov zakon kot je podan z enačbo 2.48, s tem da se pospešek nanaša na pospešek masnega središča

$$\vec{F} = m\vec{a}_t . \quad (2.88)$$

Da opišemo vrtenje togega telesa, sestavljenega iz masnih točk, okoli stalne osi, najprej napišemo enačbo gibanja za vsako točko posebej

$$M_i = J_i\alpha_i , \quad (2.89)$$

kjer je $J_i = m_i r_i^2$, z r_i oddaljenostjo i -tega atoma od osi, M_i pa je vsota vseh navorov, ki delujejo na i -ti atom. Oznako, da sta kotni pospešek in navor vektorja, smo izpustili, ker obravnavamo vrtenje okoli ene osi. Zopet seštejemo posebej leve in desne strani enačbe 2.89 za vse masne točke togega telesa. Upoštevamo, da imajo vse masne točke telesa isto kotno hitrost in isti tangencialni pospešek, ne glede na to, kako oddaljene so od osi. Izkáže se, da je enačba gibanja za vrtenje togega telesa okrog stalne osi, ki jo tako dobimo, enaka enačbi 2.72, pri čemer pa je vztrajnostni moment sedaj enak

$$J = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 , \quad (2.90)$$

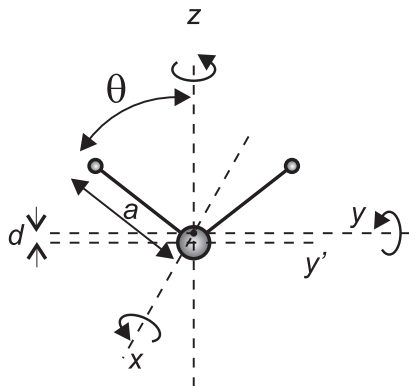
navor pa je enak vsoti vseh navorov, ki delujejo na togo telo, $M = \sum_{i=1}^N M_i$.

Ker lahko opišemo gibanje togega telesa, sestavljenega iz masnih točk, z enačbo 2.72, veljata za to telo tudi enačbi 2.79 in 2.84, ki smo ju iz nje izvedli. Še enkrat pa naj poudarimo, da gre v primeru togega telesa za posplošitev definicije vztrajnostnega momenta, ki upošteva, da so lahko masne točke, ki sestavljajo togo telo, različno oddaljene od osi.

Vztrajnostni moment togega telesa je odvisen od poteka osi skozi to telo. Kot primer si oglejmo vztrajnostne momente molekule vode za vrtenje okrog različnih osi. Na sliki 2.26 je narisana molekula vode v ravnini $z - y$, tako da se nahaja njeno masno središče v izhodišču koordinatnega sistema. Vztrajnostni moment za vrtenje okrog osi z je enak $J_z = 2m_H (a \sin\theta)^2$, za vrtenje okrog osi y $J_y = m_O d^2 + 2m_H (a \cos\theta - d)^2$, za vrtenje okrog osi x pa $J_x = m_O d^2 + 2m_H d^{*2}$, kjer je d^* razdalja med masnim središčem molekule in masnim središčem atoma vodika.

V splošnem lahko toga telesa vrtimo tudi okrog osi, ki ne prebadajo njihovega masnega središča. Če je os vrtenja vzporedna z eno od osi vrtenja, ki prebada masno središče in za katero poznamo vztrajnostni moment, lahko ustrezen vztrajnostni moment izračunamo po **Steinerjevem izreku**, ki se glasi

$$J' = J + m r_t^2 . \quad (2.91)$$



Slika 2.26: Izbrane osi za vrtenje molekule vode.

Vidimo, da je vztrajnostni moment za poljubno os vedno večji od vztrajnostnega momenta za os, ki poteka skozi masno središče telesa. Za molekulo vode, ki bi se vrtela okrog osi, ki gre skozi jedro kisika in je vzporedna osi y , bi bil vztrajnostni moment enak $J'_y = J_y + m_{\text{H}_2\text{O}}d^2$.

Dinamika togega telesa z zvezno porazdeljeno maso

Za toga telesa, katerih velikost je bistveno večja od velikosti molekul, si lahko predstavljamo, da je njihova masa po prostoru, ki ga zavzemajo, porazdeljena zvezno. Če temu ustrezno definiramo vztrajnostni moment, veljajo tudi za opis dinamike togih teles z zvezno porazdeljeno maso enačbe 2.72, 2.79 in 2.84. Vztrajnostni moment takega togega telesa z zvezno porazdeljeno maso izračunamo tako, da vsoto v enačbi 2.90 zamenjamo z ustreznim integralom. Imamo

$$J = \int r^2 dm . \quad (2.92)$$

kjer je r oddaljenost dela mase telesa (dm) od osi. Integrirati moramo po celotnem volumnu telesa, zato je bolj praktično, da zamenjamo integracijo po masi z integracijo po volumnu. V ta namen vpeljemo **gostoto** telesa na mestu \vec{r} kot

$$\rho(\vec{r}) = \frac{dm}{dV} . \quad (2.93)$$

Gostota pove, koliko mase se nahaja v določenem volumnu telesa. Enačbo 2.92 lahko potem napišemo kot

$$J = \int \rho(\vec{r}) r^2(\vec{r}) dV \quad (2.94)$$

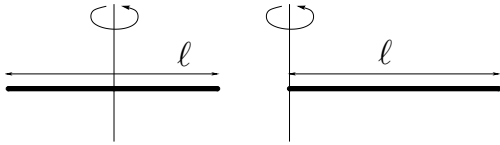
Za boljšo predstavo si kot primer izračunajmo vztrajnostni moment palice z dolžino ℓ in s presekom S , ki je narejena iz snovi, katere gostota (ρ) je povsod enaka. Ker je masno središče palice na njeni sredini, bomo izračunali vztrajnostni moment za os, ki gre skozi sredino palice in je na njo pravokotna (sl. 2.27). Razdaljo od osi označimo z x . Diferencial volumna je enak Sdx . Ker sta gostota in presek konstanta, lahko napišemo

$$J = 2 \cdot S\rho \int_0^{\ell/2} x^2 dx = 2 \cdot \frac{\rho S x^3}{3} \Big|_0^{\ell/2} = \frac{m\ell^2}{12} , \quad (2.95)$$

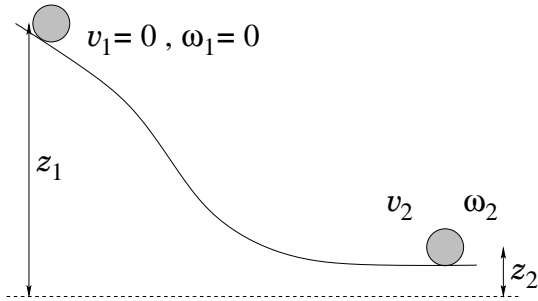
kjer smo upoštevali, da je $m = \rho S\ell$

Vztrajnostni moment iste palice izračunamo za os, ki je postavljena pravokotno na smer palice na njenem začetku, po Steinerjevem izreku in dobimo $J' = J + m(\ell/2)^2 = m\ell^2/3$.

Kot zgled za ohranjanje energije lahko obravnavamo spust valja, ki se kotali po klancu (sl. 2.28). Ker telo v začetku (v točki 1) miruje, je njegova kinetična energija v točki 2 enaka spremembi potencialne energije. Kinetična energija je enaka vsoti prispevkov zaradi translacije ($mv_2^2/2$) in rotacije ($J\omega_2^2/2$), pri čemer je m masa valja, J njegov vztrajnostni moment, v_2 njegova končna hitrost in ω_2 njegova končna kotna hitrost.



Slika 2.27: Izbrane osi za vrtenje palice. Vztrajnostni moment palice je večji okrog osi, ki gre skozi začetek palice (slika desno).



Slika 2.28: Ko spustimo valj, ki v začetku miruje, po klancu, se njegova potencialna energija pretvori v kinetično, tako da velja $mv_2^2/2 + J\omega_2^2/2 = mg(z_1 - z_2)$.

2.3 Mehanika zveznih snovi

2.3.1 Zvezne snovi

Pod **zveznimi snovmi** razumemo razsežna telesa, ki se lahko gibljejo tako, da razdalje med posameznimi deli teles ne ostajajo več konstantne. Bistvena razlika med točkasto maso in zveznimi snovmi je v tem, da so zvezne snovi vedno končnih dimenzij in imajo ponavadi končen volumen in končno površino. Primer gibanja zvezne snovi sta hidrodinamski tok in elastično valovanje. Za prvega lahko navedemo običajen tok vode, pri katerem se začetne razdalje med posameznimi deli tekočine lahko poljubno spremenijo. Za drugega pa širjenje ultrazvočnega valovanja v vodi, pri katerem so relativne spremembe v razdaljah med posameznimi deli tekočine sicer majhne, vendar pa pride do usklajenega gibanja množice delov tekočine.

Čeprav imajo vse snovi atomsko oziroma molekularno strukturo, jih v mehaniki zveznih snovi, ki velja za makroskopska telesa, lahko popolnoma ustrezno opišemo z **gostoto snovi** (ρ). Gostota snovi je povezana s celotno maso snovi z enačbo

$$m = \int \rho(\vec{r}, t) dV, \quad (2.96)$$

kjer integriramo po celotnem volumnu snovi.

Zvezne snovi ločimo na **pline**, **kapljevine** in **trdne snovi**. Plinom in kapljevinam včasih rečemo tudi **tekočine**. Trdne snovi se od tekočin razlikujejo v tem, da v statičnem primeru dopuščajo obstoj **strižne obremenitve** (pogl. 2.3.2). Obstoj strižnih napetosti v trdni snovi se kaže tudi v tem, da moramo žebelj v trdno snov potisniti s precej veliko silo, medtem ko je ta sila za tekočine za nekaj velikostnih redov manjša.

Razlika med plini in kapljevinami pa je predvsem ta, da plini nimajo dobro definirane površine in da vedno privzamejo obliko posode, v kateri se nahajajo, medtem ko kapljevine vedno tvorijo dobro definirano površino ter zavzamejo obliko, pri kateri je ob danih zunanjih pogojih njihova površina najmanjša. Za prvi primer lahko vzamemo zemeljsko atmosfero, ki nima dobro definirane meje in njena gostota z višino od zemeljskega površja zvezno pojema. Za drugi primer pa bo seveda še najbolj ustrezna prav vodna kapljica, ki ima vedno dobro definirano površino.

Kar se tiče gostote, so ponavadi plini najbolj redki, sledijo jim kapljevine in na koncu, kot najbolj goste, trdne snovi. Gostota zraka ob oceanski površini je približno tisočkrat manjša od gostote vode. Gostota ledu pa ni večja od vode, kar je običajno res pri primerjavi drugih tekočin in trdnih snovi, pač pa je manjša. To je le ena od številnih anomalij vode. Od plinov, preko kapljevin in na koncu do trdnih snovi se spreminja tudi **stopnja nereda** v snovi. Medtem ko so plini zelo razurejeni in je gibanje njihovih molekul povsem **kaotično**, molekule tekočine kažejo **red kratkega dosega**, medtem ko trdne snovi kažejo urejenost molekul **dolgega dosega** kot recimo v kristalih.

2.3.2 Zvezne snovi v mirovanju

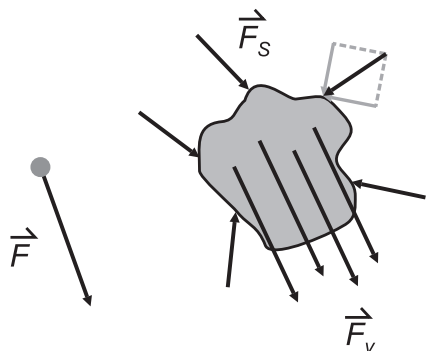
Točkasto telo miruje, če je vsota vseh sil nanj enaka nič. Takrat pravimo tudi, da je v **statičnem ravnovesju**. Za toga telesa mora biti v statičnem ravnovesju poleg vsote vseh sil tudi vsota vseh navorov enaka nič. Za zvezna telesa pa je pogoj za statično ravnovesje še bolj zahteven, saj imamo v tem primeru zvezno porazdeljene sile, ki delujejo tudi na površino zveznega telesa. Poglejmo si pogoje in nekaj primerov statičnega ravnovesja zveznih teles. Da bi razumeli statično ravnovesje zveznih teles, pa moramo najprej analizirati sile, ki lahko na takšna telesa delujejo.

Volumske in površinske sile na zvezno telo

Kako se na silah odraža dejstvo, da ima zvezno telo končen volumen in zato tudi končno površino? Sile na zvezno telo so lahko v splošnem dveh vrst. Eno so **volumske sile**, ki so porazdeljene po celotnem volumnu zveznega telesa (sl. 2.29). Njihov prispevek k celotni sili \vec{F} zapišemo kot

$$\vec{F}_V \longrightarrow \int_V d\vec{F}_V, \quad (2.97)$$

kjer je $d\vec{F}_V$ volumska sila na majhen del telesa. Sila \vec{F}_V je lahko zgolj funkcija časa.



Slika 2.29: Delovanje sil na telesa. Levo: Primer delovanja sile na masno točko. Desno: Na zvezno telo lahko delujejo sile, ki so porazdeljene po prostornini telesa (\vec{F}_V), in sile, ki delujejo po površini (\vec{F}_S). \vec{F}_S lahko na vsakem majhnem delu površine razstavimo na normalno in tangencialno komponento, kot je prikazano s sivima puščicama.

Vendar to še niso vse sile, ki lahko delujejo na zvezno telo. Sile lahko delujejo tudi na njegovo površino (sl. 2.29). Obstoj končne površine je tudi tista lastnost zveznih teles, ki jih bistveno loči od točkastih teles. Od togih teles, ki imajo sicer tudi površino, pa jih loči to, da je mejna površina za zvezna telesa lahko spremenljiva. Prispevek površinskih sil k celotni sili lahko zapišemo kot

$$\vec{F}_S \longrightarrow \int_S d\vec{F}_S. \quad (2.98)$$

V enačbi 2.98 sedaj namesto po celotnem volumnu integriramo po celotni površini telesa S ali pa po površini njegovega dela. Ni nujno, da površinske sile delujejo pravokotno na neko površino telesa. Na sliki 2.29 je shematsko prikazano, kako lahko površinsko silo na ploskev razstavimo na normalno in tangencialno komponento.

Pascalov zakon

Za idealne tekočine velja, da površinske sile delujejo pravokotno na površino telesa. V tem primeru lahko enačbo 2.98 prepišemo v obliko

$$\vec{F}_S = - \int \vec{n} p(\vec{r}, t) dS, \quad (2.99)$$

pri čemer je $p(\vec{r}, t)$ **tlak**, \vec{n} pa je enotski vektor normale na površino telesa, ki po definiciji gleda vedno v smeri ven iz telesa, ki na drugo telo deluje s silo F_S . Iz zgornje definicije sledi, da je tlak enak kar sili na površinsko enoto telesa, torej $p = F_S/S$. Tlak predstavlja posplošitev pojma sile na zvezna telesa s končno razsežnostjo in zato tudi s končno površino. Tlak merimo v enoti pascal ($1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$).

Tlak smo sicer vpeljali kot skalar, a v splošnem je pri zveznih telesih tlak bolj zapletena matematična količina, ki jo poimenujemo **tenzor**. Medtem ko ima skalar eno samo komponento, vektor ima tri, pa ima tenzor lahko v splošnem devet komponent. Nekatere komponente tega tenzorja bomo potrebovali kasneje pri obravnavi strižnih sil.

Tako kot volumske sile ima tudi tlak v zveznih telesih lahko različne vzroke. Kot primere si bomo natančneje pogledali tri vrste tlaka v **mirujočih tekočinah**: hidrostatični tlak, zračni tlak in površinsko napetost. V prvem in tretjem primeru se omejimo na kapljevine, ki so več ali manj nestisljive in je zato njihova gostota stalna. V drugem primeru pa se posvetimo plinom, ki so stisljivi in je zato potrebno to končno stisljivost tudi upoštevati.

Stisljivost

Spremembe gostote so pri gibanju plinov veliko večje kot pri gibanju kapljev in trdnih snovi. Če vzamemo posodo, v kateri imamo plin ali pa tekočino, z osnovno površino S , ali pa kvader trdne snovi z osnovno ploskvijo S , ter nanjo pritisnemo s silo dF , potem se gostota snovi spremeni za $d\rho$. To spremembo gostote lahko opišemo s stisljivostjo, ki je definirana z enačbo

$$\frac{d\rho}{\rho} = \chi \frac{dF}{S}. \quad (2.100)$$

χ je koeficient stisljivosti, ki ga merimo v m^2/N . Stisljivost je za različne snovi različna. Nekaj primerov stisljivosti tekočin je navedenih v tabeli 2.1. Stisljivosti trdnih snovi so ponavadi manjše od stisljivosti kapljev, stisljivosti plinov pa so za nekaj velikostnih redov večje od stisljivosti kapljev.

Tabela 2.1: Izotermna stisljivost (pogl. 3.3.6) nekaterih tekočin.

snov	voda	etilni alkohol	kloroform	Hg	zrak
izotermna stisljivost (χ_T) (20°C, $1,0 \cdot 10^5$ Pa) [$10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$]	4,6	11,2	10,0	0,40	10^5

Glede na to, da smo definirali tlak kot silo na površinsko enoto, lahko enačbo 2.100 zapišemo tudi nekoliko drugače:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \chi dp, \quad (2.101)$$

kjer je dp sprememba tlaka, ki povzroči spremembo gostote ($d\rho$). Za tekočino v mirovanju je tlak skalar in ima torej eno samo komponento.

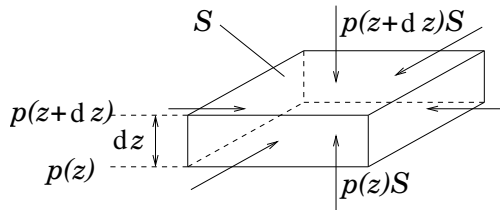
Hidrostatični tlak

Primer volumsko porazdeljene zunanje sile je **sila teže**. Izberimo si nek del tekočine, na neki globini pod njeno površino. Zaradi sile teže ostala tekočina s silami deluje na izbrani del tekočine. Ker delujejo sile okoliške tekočine na ta del preko njegove površine, lahko govorimo o **hidrostatičnem tlaku**, kot sili teže okoliške tekočine na enoto površine izbranega dela.

Kot bolj konkreten primer si oglejmo, za koliko se v tekočini hidrostatični tlak na višini $z + dz$ razlikuje od hidrostatičnega tlaka na višini z .

Hidrostatični tlak za nestisljive tekočine: Omejimo se na primer, ki ustreza nestisljivi tekočini. Na plast z debelino dz deluje na zgornjo ploskev površine S sila $(p + dp)S$ – pač glede na splošno definicijo tlaka – navzdol, na spodnjo ploskev pa sila pS navzgor (sl. 2.30). Na plast deluje tudi sila njene lastne teže $mg = Sdz\rho g$ in sicer navzdol. Vsota vseh treh sil mora biti v ravnovesju enaka nič, zato dobimo

$$dp = -g\rho dz. \quad (2.102)$$



Slika 2.30: Sile na plast v tekočini (prikazano s puščicami) površine S in debeline dz . Sile, ki so pravokotne na os z , se izničijo.

Pri dvigu za dz se tlak zmanjša, za koliko, pa je odvisno od gostote tekočine. Za majhne spremembe globine lahko zgornjo enačbo zapišemo v obliki diferencialne enačbe

$$\frac{dp(z)}{dz} = -g\rho. \quad (2.103)$$

Če je gostota stalna in torej ni odvisna od globine z , kar prav gotovo dobro velja za vodo, ki je precej slabo stisljiva, zgornjo diferencialno enačbo lahko rešimo v obliki

$$p(z) = p(0) - g\rho z. \quad (2.104)$$

$p(0)$ je tlak na površini vode. Koordinata z ima v globinah negativne vrednosti, hidrostatični tlak se zato z globino večja!

Razliko med silama, ki delujeta med spodnjo in zgornjo ploskvijo (dpS), imenujemo *sila vzgona*. Sila vzgona je po velikosti enaka teži izpodrinjene tekočine ($g\rho dzS$) in deluje navzgor, ker je spodaj večji tlak. Sila vzgona na telo s prostornino V je torej enaka $F_v = g\rho V$, kjer je seveda ρ gostota tekočine.

Hidrostatični tlak za stisljive tekočine: Zračni tlak ob morski gladini je $1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ in je posledica teže zraka. Pri višjih višinah je tlak manjši, ker prispevajo k teži zraka samo zračne plasti nad to višino. Odvisnost zračnega tlaka od višine nam približno opiše tako imenovana barometrska formula.

Pri izpeljavi barometrske formule bomo upoštevali, da se gostota zraka z višino spreminja in da je sorazmerna tlaku zraka na dani višini. Zato je zrak pri večjih nadmorskih višinah redkejši. Pri tem predpostavimo, da je temperatura konstantna. To sicer ni čisto res, toda nas ne moti, ker želimo opisati pojav le v grobem. Sorazmernost med tlakom in gostoto, kot jo bomo kasneje izpeljali za idealni plin, lahko zapišemo kot

$$\frac{p(z)}{\rho(z)} = \frac{p_0}{\rho_0}, \quad (2.105)$$

kjer sta p_0 in ρ_0 vrednosti tlaka in gostote zraka ob morski gladini. Vidimo, da se mora v tem primeru hkrati s tlakom spreminjati tudi gostota tekočine: opravka imamo torej s stisljivo tekočino.

Enačbo 2.103, ki pove, kako se zaradi sile teže spremeni tlak pri spremembi višine, zapišemo sedaj tako, da gostoto zraka izrazimo s pomočjo enačbe 2.105. Namesto enačbe 2.103 sedaj dobimo

$$\frac{dp(z)}{dz} = -\frac{g\rho_0}{p_0} p(z). \quad (2.106)$$

Rešitev te diferencialne enačbe, ki podaja odvisnost tlaka od višine, $p(z)$, je eksponentna funkcija

$$p(z) = p_0 e^{-g\rho_0 z/p_0}. \quad (2.107)$$

Vrednost konstantnega faktorja $g\rho_0/p_0$, ki nastopa v eksponentu v enačbi 2.107, je $10 \text{ ms}^{-2} \cdot 1,3 \text{ kg m}^{-3} / 10^5 \text{ Nm}^{-2} = 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$. Po barometrski enačbi (en. 2.107) torej pade tlak na polovično vrednost na višini $\ln 2 \cdot p_0 / g\rho_0 = 5 \cdot 10^3 \text{ m}$.

Površinska napetost

Omenili smo že, da se med tekočinami kapljevine ločijo od plinov po tem, da imajo dobro definirano površino oziroma gladino. Na tej gladini pa površinske sile ne delujejo le pravokotno na površino, ampak lahko delujejo tudi tangентno na površino. V tem primeru ima tlak poleg normalne komponente tudi tangencialno komponento.

Namesto da bi govorili o tangentialni komponenti tlaka, lahko popolnoma enakovredno govorimo tudi o **površinski energiji**. Ker imajo molekule ob površini manj sosednjih molekul kot molekule v notranjosti tekočine, je zato njihova povprečna vezavna energija manjša. Če namreč površino povečamo, moramo nekaterim molekulam, ki se pred tem nahajajo v notranjosti tekočine, dodati nekaj energije, da dobijo energijo površinskih molekul. Delo pri nastanku površine dS je tako enako

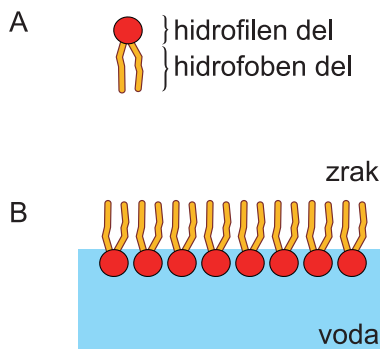
$$dA = \sigma dS, \quad \text{oziroma} \quad A = \sigma S. \quad (2.108)$$

Vrednost sorazmernostnega koeficienta σ , **površinske napetosti**, je odvisna od lastnosti obeh snovi, ki sta v stiku in tvorita površino. Da dobimo celotno delo (A) pri nastanku površine (S), moramo površinsko napetost pomnožiti z velikostjo površine. Le če je ena od teh snovi plin, prispevajo k površinski napetosti skoraj izključno lastnosti kapljevine. Vrednosti površinske napetosti vode v kontaktu z različnimi tekočinami so navedene v tabeli 2.2.

Tabela 2.2: Površinska napetost vode (σ) v kontaktu z različnimi snovmi.

snov	zrak	benzen	Hg	etilni eter	n-heksan
σ (20°C) [mN/m]	72,8	35	375	10,7	51

Površinska napetost vode se lahko spremeni zaradi vpliva površinsko aktivnih snovi, ki jih imenujemo *surfaktanti*. Lega surfaktantov, ki so v stiku z zrakom, je prikazana na sliki 2.31. Tako je n. pr. površinska napetost vode s surfaktanti v pljučnih mešičkih (*alveolah*) približno 12 krat manjša od površinske napetosti vode brez surfaktantov. To nam omogoča, da lahko dihamo kljub temu, da pri tem spreminjamo površino pljuč in neprestano opravljamo delo, ki ga opisuje enačba 2.108. Če surfaktanti ne bi drastično zmanjšali površinske napetosti pljučnih alveol, bi nas to delo popolnoma izčrpalo.



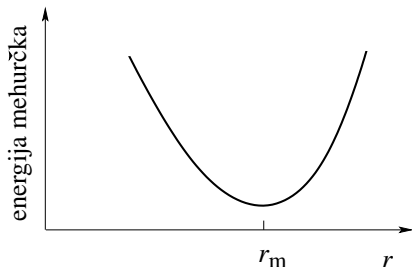
Slika 2.31: Shematski prikaz lege surfaktantov.

Ker je površinska napetost povezana s tangentialno komponento tlaka oziroma sile ob površini, vodi h gibanju delov tekočine v tangentialni smeri tekočine. Takšno gibanje je lahko zelo zapleteno in sodi že v naslednje poglavju. Tu si bomo raje ogledali tri statične primere posledic površinske napetosti: Laplaceov zakon, Young - Dupréjev zakon in kapilarni dvig.

Laplaceov zakon

Pri mehurčku sta s plastjo kapljevine ločeni dve plinski fazi. Tipičen primer mehurčka je milni mehurček, ki ločuje zrak v notranjosti mehurčka od zunanjega zraka. Plast tekočine je v tem primeru kar voda, ujeta med dva tanka sloja molekul detergenta.

Ugotoviti želimo, za koliko je tlak v notranjosti mehurčka (p_n) večji od tlaka zunaj mehurčka (p_z), da je sistem stabilen, to je, da se radij mehurčka (r) s časom ne spreminja. Težnja zaradi površinske napetosti je, da se mehurček zmanjša, ker bi se s tem zmanjšala celotna površina tekočine. V mehurčku je ujeta določena količina zraka. Zaradi zmanjšanja prostornine mehurčka pa v notranjosti narašča tlak. Mehurček je stabilen pri najmanjši vrednosti energije sistema (sl. 2.32). Če hočemo mehurček, ki je stabilen, povečati ali zmanjšati, moramo v vsakem primeru opraviti delo.



Slika 2.32: Energija mehurčka v odvisnosti od radija. r_m je radij mehurčka v stabilnem stanju.

Izračunajmo sedaj delo, ki ga opravimo, če povečamo radij kroglastega mehurčka za dr . Če s p_n in p_z označimo tlak v mehurčku in v njegovi zunanosti, je razlika sil med notranjo in zunanjo površino po Pascalovem zakonu enaka $(p_n - p_z) \cdot 4\pi r^2$, delo zaradi razlike sil med notranjo in zunanjo površino pri spremembi radija za dr pa je enako (en. 2.59)

$$(p_n - p_z) \cdot 4\pi r^2 dr . \quad (2.109)$$

Če z dV označimo spremembo prostornine mehurčka, je delo pri tem povečanju prostornine enako

$$(p_n - p_z) dV . \quad (2.110)$$

Delo, ki ga opravimo, da povečamo površino mehurčka, je po definiciji (en. 2.108) enako σdS , kjer je dS celotna sprememba površine milnice. Za kroglast mehurček je torej delo zaradi povečanja površine milnice enako

$$\sigma \cdot 2 \cdot d(4\pi r^2) = \sigma \cdot 16\pi r dr . \quad (2.111)$$

Pri tem smo upoštevali, da imamo dve površini, zunanjo in notranjo, in zato tudi faktor 2. Če upoštevamo, da je delo zaradi razlike tlaka pri spremembi prostornine mehurčka za dV ravno enako spremembi površinske energije pri spremembi površine milnice za dS , dobimo

$$p_n - p_z = \frac{4\sigma}{r_m} . \quad (2.112)$$

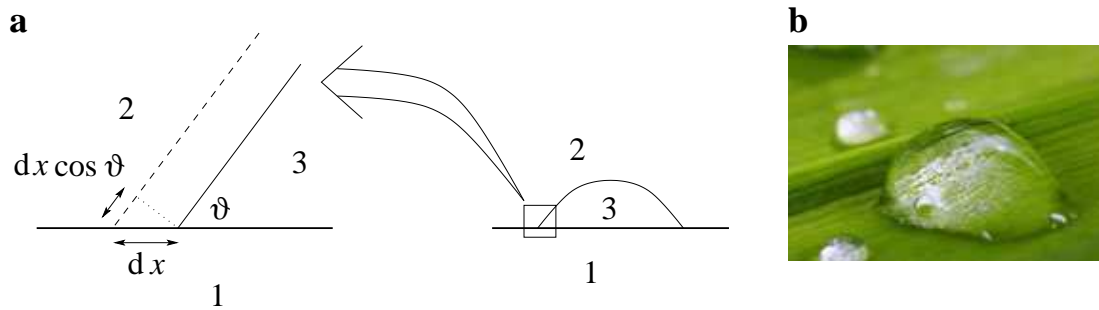
Tlak v notranjosti mehurčka je glede na zunanji tlak tem večji, čim manjši je njegov radij. Zgornjo enačbo imenujemo tudi **Laplaceov zakon**. Da je tlak znotraj milnega mehurčka zares večji kot zunaj, kar opisuje ravno Laplaceov zakon, se lahko prepričamo vsak dan, če milni mehurček počimo.

Young - Dupréjev zakon

Obravnavamo stičišče treh snovi (sl. 2.33). Snov 1 je trdna snov, snov 2 plin, snov 3 pa kapljevina. Površinske napetosti različnih stikov so $\sigma_{1,2}$, $\sigma_{2,3}$ in $\sigma_{3,1}$, kot sledi iz slike. Meja med snovema 2 in 3 je v stičišču nagnjena glede na površino snovi 1 za kot ϑ . Poiskali bomo vrednost **kota močenja** ϑ , pri kateri je sistem v ravnovesju. Po analogiji s prejšnjim primerom bomo zopet izračunali silo, ki nasprotuje premiku meje med 1 in 2, ter dobili Newtonov ravnovesni pogoj takrat, ko je ta sila enaka nič.

Če mejo med 1 in 3 premaknemo za razdaljo dx proti levi strani, povečamo površini med snovema 2 in 3 ter med snovema 1 in 3, zmanjšamo pa površino med 1 in 2. Delo, ki smo ga pri tem opravili, je enako

$$dA = \sigma_{1,3}\ell dx + \sigma_{2,3}\ell dx \cos \vartheta - \sigma_{1,2}\ell dx = 0 , \quad (2.113)$$



Slika 2.33: (a) Skica k razlagi pogoja za kot močenja. Na levi je povečan del, kjer pride do stika treh snovi. S črtkano črto je narisana meja po premiku. (b) Vodne kapljice na listu.

kjer je ℓ dolžina meje. Zopet se spomnimo definicije dela, ki je sila krat razdalja, na kateri sila deluje (dx), pa dobimo za celotno silo (F_S), ki nasprotuje spremembi površine pri premiku meje med 1 in 2 za dx

$$F_S = \ell(\sigma_{1,3} + \sigma_{2,3} \cos \vartheta - \sigma_{1,2}). \quad (2.114)$$

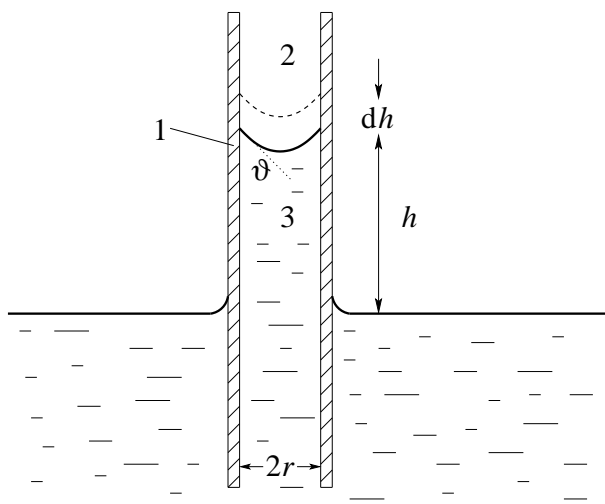
V ravnovesju mora biti celotna sila, ki deluje na mejo med 1 in 2 nič, od koder že sledi Young - Dupréjev zakon v obliki

$$\sigma_{1,3} + \sigma_{2,3} \cos \vartheta - \sigma_{1,2} = 0. \quad (2.115)$$

Kosinus kota ϑ je lahko pozitiven ($0 < \vartheta < \pi/2$). To pomeni, da snov 3 bolj **moči podlago** 1 kot snov 2. Če pa je negativen ($\pi/2 < \vartheta < \pi$), velja obratno. Če je snov 3 voda, v slednjem primeru imenujemo površino 1 **hidrofobno**, sicer pa pravimo, da je **hidrofilna**. **Superhidrofobne površine**, kot je površina lotosovega lista, imajo kot močenja skoraj π . Do popolnega močenja pride, ko velja $\sigma_{1,2} \geq \sigma_{1,3}$. Takrat se kapljevina razleze po podlagi in govorimo o **popolnem močenju**.

Kapilarni dvig

Voda moči steklo, torej je kot močenja med vodo in steklom manjši od $\pi/2$. Predstavljajmo si, da imamo vodo v kapilari radija r . Ob steni kapilare je rob vode zaradi močenja zavihan navzgor, kar pomeni, da je višina vode v steklenih kapilarah višja od gladine izven kapilare. Temu pojavu pravimo tudi **kapilarni dvig**.



Slika 2.34: Skica k razlagi kapilarnega dviga.

Izračunajmo višino kapilarnega dviga. Določimo najprej delo, potrebno, da višino dviga vode v kapilari spremenimo za dh . Če povišamo stolpec tekočine v kapilari za dh (sl. 2.34), povečamo

površino med snovema označenima z 1 ter 3 in zmanjšamo površino med snovema označenima z 1 ter 2. Delo pri povečanju površine med snovema 1 ter 3 je enako $\sigma_{1,3} \cdot 2\pi r dh$, pri zmanjšanju površine med snovema 1 ter 2 pa je enako $-\sigma_{1,2} \cdot 2\pi r dh$. Zaradi spremembe v površinah je opravljeno delo enako $(\sigma_{1,3} - \sigma_{1,2}) \cdot 2\pi r dh$, ustrežna sila zaradi površinske napetosti pa je enaka

$$(\sigma_{1,3} - \sigma_{1,2}) \cdot 2\pi r. \quad (2.116)$$

Delo, ki ga pri isti spremembi opravimo zaradi sile teže, je enako $g\rho\pi r^2 h dh$, ustrežna sila zaradi teže pa je enaka

$$g\rho\pi r^2 h. \quad (2.117)$$

Da smo dvignili stolpec za dh , smo namreč morali dvigniti prostornino $\pi r^2 dh$ vode od gladine do višine h . Če sedaj upoštevamo, da mora biti v ravnovesju vsota vseh sil, ki delujejo na stolpec vode, enaka nič, dobimo

$$(\sigma_{1,3} - \sigma_{1,2})2\pi r + g\rho\pi r^2 h = 0 \quad (2.118)$$

oziroma

$$h = \frac{2\sigma_{2,3} \cos \varphi}{g\rho r}, \quad (2.119)$$

kjer smo upoštevali še zvezo med površinskimi napetostmi (en. 2.115). Če bi uporabili zgornjo enačbo za kapilarni dvig pri oceni najvišje možne višine drevesa, bi naleteli na neprijetno presenečenje: namreč največji možni kapilarni dvig vode v celuloznih cevkah flema je okrog deset metrov, nekatera drevesa pa so visoka tudi preko sto metrov. Odgovor na to uganko se skriva v negativnem tlaku vode in izhlapevanju na površini listov, ki dobesedno sesa vodo v višino.

Elastična napetost

Pri površinski napetosti smo ugotovili, da je površinska energija sorazmerna z velikostjo površine, torej s kvadratom stranice površine. Sorazmernostni koeficient je bil površinska napetost površine kapljevine. Nekaj analognega imamo tudi pri trdnih telesih, ko se deformirajo. Pod **deformacijo** v splošnem razumemo spremembo oblike trdnega telesa. Ne pozabimo: trdna telesa se ločijo od tekočin po tem, da lahko v statičnem primeru prenašajo strižne napetosti, zato se v splošnem deformirajo na bolj zapleten način kot tekočine.

Zvezna telesa se deformirajo kot odgovor na zunanjo silo, ki deluje bodisi na njihovo površino ali pa po celotnem volumnu. Ko zunanja sila preneha delovati, lahko telo zavzame prvotno obliko ali pa tudi ne. V prvem primeru imenujemo tako telo **prožno telo**, v drugem pa **plastično telo**. Tipičen primer prožnega telesa je prožna vzmet, to je v navoje zvita žica, ki smo jo že omenili v poglavju o silah. Tipičen primer plastičnega telesa pa je žvečilni gumi.

Vsako deformacijo lahko v splošnem razstavimo na del, ki ustreza spremembi volumna, na strižni del brez deformacije volumna in na vrtenje. Poglejmo si nekaj posebnih primerov deformacij.

Natezna obremenitev: Pri obravnavi deformacij teles je koristno, da ločimo vpliv lastnosti snovi od vpliva njihove oblike. Kako ta vpliva ločimo, bomo najprej pokazali na primeru najbolj preproste obremenitve, ki jo imenujemo **natezna obremenitev**. Pri natezni obremenitvi gre za podaljšanje podolgovatega telesa (n. pr. palice ali ravne žice) zaradi sile, s katero ga raztegujemo vzdolž njegove dolžine. Raztezek je tem večji, čim daljše je telo, odvisen pa je tudi od mehanske napetosti, to je razmerja med silo in presekom telesa. Za večino snovi velja, da se telo z začetno dolžino ℓ_0 in presekom S zaradi delovanja sile F podaljša za $\ell - \ell_0$ tako, da je relativna sprememba dolžine $((\ell - \ell_0)/\ell_0)$ enaka

$$\frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} = \frac{1}{E} \frac{F}{S} = \frac{1}{E} p. \quad (2.120)$$

kjer je p natezni tlak, sila na enoto površine pravokotne na smer deformacije. Pri tem smo privzeli, da je pozitivna smer sile obratna natezni deformaciji. Če bi bila pozitivna smer sile definirana v smeri deformacije, bi morali zgornjo enačbo zapisati z minusom. Recipročna vrednost sorazmernostne

Tabela 2.3: Prožnostni moduli nekaterih snovi.

snov	kavčuk	les	beton	steklo	svinec	jeklo	diamant
$E[\text{GPa}]$	0,1	10	30	60	18	200	1220

konstante (E) se imenuje **prožnostni** oziroma **Youngov modul**. Prožnostni moduli nekaterih snovi so navedeni v tabeli 2.3.

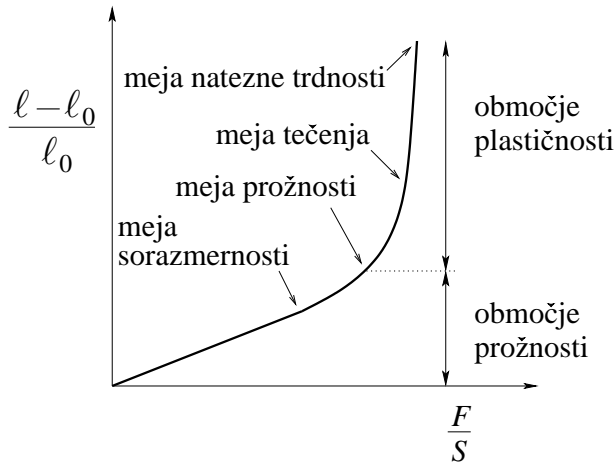
Vpeljemo lahko tudi *prožnostno energijo* te deformacije (W_{pr}) in sicer v obliki

$$W_{\text{pr}} = \frac{1}{2}ES\ell_0 \left(\frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} \right)^2. \quad (2.121)$$

Z upoštevanjem običajne zveze med gradientom energije in sile dobimo, da je

$$F = -\frac{dW_p}{d\ell} = -ES \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}. \quad (2.122)$$

Če upoštevamo še, da je v tej enačbi pozitivna smer sile definirana kot smer defomacije, smo se vrnili natanko na enačbo 2.120.



Slika 2.35: Shematična odvisnost relativne spremembe dolžine $((\ell - \ell_0)/\ell_0)$ od nateznega tlaka (F/S). Če je nateznost manjša od meje prožnosti, se telo vrne v prvotno lego. Območje veljavnosti Hookovega zakona je ožje kot območje prožnosti.

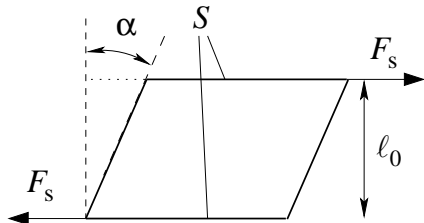
Gornja zveza, bodisi za silo (en. 2.120) ali pa za prožnostno energijo (en. 2.121) v odvisnosti od deformacije, se imenuje **Hookov zakon**. Veljavnost Hookovega zakona je omejena. Snovi namreč ostanejo prožne (elastične) samo do določene natezne obremenitve (sl. 2.35). Če je mehanska napetost večja od za neko snov značilne mejne vrednosti, postane telo plastično. Plastično telo je telo, katerega oblika se pri razbremenitvi ne povrne v prvotno lego. Mejna vrednost mehanske napetosti se imenuje meja prožnosti. Pri večjih nateznih obremenitvah postane telo plastično. Pri še večjih obremenitvah pa pride po tako imenovani **meji tečenja** do viskoelastičnega toka, kjer že zelo majhno povečanje mehanske napetosti povzroči, da se telo raztegne bistveno bolj, kot se raztegne v območju elastičnosti in plastičnosti. Pri tako imenovani **meji trdnosti snovi** pa se telo pretrga. Primer prekoračitve meje trdnosti so zlomi kosti pri smučarskih (ali drugih) padcih.

Strižna obremenitev: Večkrat smo že omenili, da se tekočine ločijo od trdnih teles po tem, da lahko dopuščajo strižno obremenitev. Poglejmo si sedaj to trditev natančneje. Do strižne obremenitve pride, če na telo deluje strižna mehanska napetost. Pri tem nastane gradient deformacije telesa v smeri, pravokotni na strižno silo (sl. 2.36). Čeprav je torej pri strižni obremenitvi deformacija v drugačni smeri kot pri natezni obremenitvi, pa za deformacijo velja isti Hookov zakon, a z drugim elastičnim modulom. Strižni kot (α) je v tem primeru sorazmeren strižni sili (F_s) in obratno sorazmeren ploščini, na kateri sila deluje

$$\alpha = \frac{1}{E_s} \frac{F_s}{S} = \frac{1}{E_s} p_s. \quad (2.123)$$

Obratna vrednost sorazmernostne konstante (E_s) se imenuje **strižni elastični modul** in ima v splošnem drugo vrednost kot Youngov elastični modul. p_s je strižna napetost oziroma tlak, ki deluje v smeri mejne površine (sl. 2.36). Končna deformacija je torej podana z

$$\alpha = \frac{1}{E_s} \frac{F_s}{S}. \quad (2.124)$$



Slika 2.36: Deformacija telesa pri strižni obremenitvi.

Tudi tu lahko izpeljemo *prožnostno energijo* strižne deformacije (W_{pr}) v obliki, ki je analogna tisti za natezno deformacijo, in sicer

$$W_{pr} = \frac{1}{2} E_s S l_0 \alpha^2. \quad (2.125)$$

Od tu naprej pa zopet z upoštevanjem običajne zveze med gradientom energije in sile dobimo, da je

$$F_s = -\frac{1}{l_0} \frac{dW_{pr}}{d\alpha} = -E_s S \alpha. \quad (2.126)$$

Tudi tu moramo upoštevati definicijo pozitivnega spreminjanja strižnega kota in smo tako nazaj na enačbo 2.124.

Strižne deformacije dobimo tako pri izotropnih trdnih telesih kot pri kristalih, le da so pri slednjih bolj izrazite. V splošnem se pri trdnih snoveh deformacija lahko spremeni v poljubni smeri in torej nima nujno smeri sile, ki jo povzroča. Obe smeri sovpadata le pri natezni deformaciji izotropnega telesa.

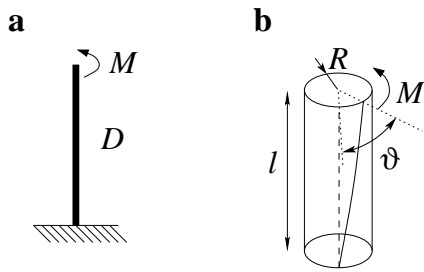
Pri deformaciji prožnega telesa opravljamo delo. Lahko rečemo, da se je zaradi opravljenega dela spremenila energija telesa. Sila, ki povzroča, da se deformirano prožno telo vrne v prvotno lego, je konservativna sila in ji zato ustreza neka potencialna energija. Ta je seveda ravno **prožnostna energija telesa**.

Konstanta vzmeti: Sila vzmeti je sorazmerna negativni vrednosti odmika od ravnovesne lege (en. 2.55), kjer je sorazmernostni koeficient **konstanta vzmeti**. Vrednost k za vijačno vzmet je odvisna tako od snovi, iz katere je vzmet narejena, kot tudi od geometrijskih parametrov vzmeti, kot sta presek žice, njena dolžina pa tudi razdalja med navoji v vijačni vzmeti. V posebnem primeru, ko je vzmet ravna žica, lahko iz primerjave s Hookovim zakonom (en. 2.120), kjer upoštevamo za natezno deformacijo zvezo $x = l - l_0$, dobimo, da je

$$k = \frac{ES}{l_0}, \quad (2.127)$$

kjer je S presek žice in l_0 njena dolžina pred deformacijo.

Direkcijska konstanta: Sorazmernostni koeficient v Hookovem zakonu za torzijsko vzmet (en. 2.74) se imenuje **direkcijska konstanta**. Definicija direkcijske konstante je analogna definiciji konstantne vzmeti k . Njena vrednost ni odvisna samo od lastnosti snovi, ampak tudi od oblike telesa. Direkcijska konstanta za žico dolžine l in polmera R (sl. 2.37) je na primer enaka $D_{\text{žica}} = \pi E_s R^4 / 2l$, kar pomeni, da je kot zasuka pri danem navoru obratnosorazmeren s četrto potenco polmera žice.



Slika 2.37: (a) Na žico z direkcijsko konstanto D delujemo z navorom M . (b) Deformacija telesa pri torzijski obremenitvi. Zaradi ilustrativnosti polmer žice ni v pravem razmerju z njeno dolžino.

2.3.3 Zvezne snovi v gibanju

Gibanje zveznih snovi lahko opišemo na različne načine. V splošnem predstavljajo **spremenljivke zveznih teles** gostota snovi, položaji posameznih delov snovi ter njihove hitrosti in pospeški. To je seveda drugače od opisa gibanja masne točke, kjer je ponavadi funkcija časa zgolj njena hitrost, masa pa je konstantna. Gibanje tekočin ponavadi opišemo z lokalno gostoto snovi ($\rho(\vec{r}, t)$) in lokalno hitrostjo ($\vec{v}(\vec{r}, t)$). Spremenljivki povesta, kakšna je gostota oziroma hitrost tekočine na mestu \vec{r} in pri času t . Gostota je ustrezna spremenljivka tudi za opis gibanja trdnih snovi, ker se ta lahko neodvisno spreminja. Za trdne snovi pa ponavadi vzamemo poleg gostote ($\rho(\vec{r}, t)$) kot osnovno spremenljivko še premik delca trdne snovi ($\vec{u}(\vec{r}, t)$), ki je odvisen od \vec{r} in t .

Medtem ko so spremembe gostote pri gibanju plinov lahko zelo velike, kot je primer pri uhanju plina iz plinske bombe, pa so ustrezne spremembe gostote pri gibanju kapljevine precej manjše in jih je potrebno upoštevati le pri gibanjih z veliko hitrostjo. Za trdne snovi je ponavadi dovolj dober približek, če predpostavimo, da se gostota s časom ne spreminja, da so torej **nestisljive** (da so toga telesa). Tudi za mnoge kapljevine je ta približek precej dober.

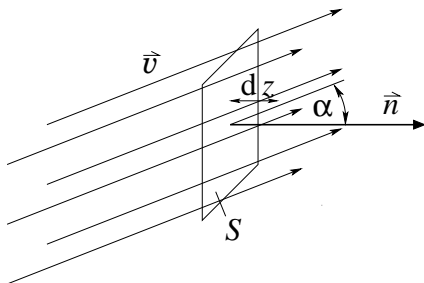
Pri gibanju tekočin dostikrat govorimo o **tokovnicah**, ki opisujejo gibanje posameznih delov tekočine. Tokovnice so krivulje, ki imajo v vsakem delu tekočine smer lokalne hitrosti. Če se tokovnice med seboj ne prepletajo, govorimo o **laminarnem gibanju** tekočine. Laminarno gibanje tekočine je potemtakem gibanje, pri katerem lahko sledimo poti, po kateri se giblje izbran del tekočine. Gibanju tekočine lahko na primer sledimo, če ji na določenem mestu dodamo barvilo. Poti posameznih delov tekočine opredeljujejo tokovnice. Poseben primer laminarnega gibanja je **stacionarno gibanje**, kjer se hitrost v vsakem delu tekočine ne spreminja s časom.

Če se tokovnice med sabo prepletajo, imamo v splošnem opravka s **turbulentnim gibanjem** tekočine. Turbulentno gibanje je takšno gibanje tekočine, pri katerem se različni deli tekočine med sabo mešajo ter delajo vrtince. Zaradi vrtinčenja tekočine ne moremo predvideti, kje se bo čez nekaj časa nahajal posamezen del tekočine. Če bi tekočini na nekem mestu dodali malo barvila, bi opazili, da se čez nekaj časa barvilo razleze na druge dele tekočine. Tekočina se je premešala.

Če nas zanima, koliko tekočine se pri gibanju premakne, potem lahko definiramo **masni tok tekočine** (Φ_m) kot

$$\Phi_m = \frac{dm}{dt}. \quad (2.128)$$

Masni tok je torej masa tekočine, ki se prestavi na časovno enoto. Enota za masni tok je 1 kg/s.



Slika 2.38: V splošnem tekočina ne teče pravokotno na ploskev S , kot kažejo tokovnice. α je kot med normalo na ploskev (\vec{n}) in hitrostjo tekočine (\vec{v}). V času dt je pretečena masa enaka $\rho S dz$.

Na masni tok pa lahko gledamo še drugače. Postavimo se v gibajočo se tekočino in merimo, koliko le-te se prestavi preko neke površine S . V času dt je volumen prestavljene tekočine $dV = S dz$,

kjer je dz razdalja, za katero se prestavi tekočina, merjena pravokotno na površino S , torej v smeri njene normale \vec{n} (sl. 2.38). Ta razdalja je ravno enaka produktu normalne komponente hitrosti ($v \cos \alpha$) in časa dt . Normalna komponenta hitrosti tekočine je enaka skalarnemu produktu med hitrostjo in normalo na površino S : ($\vec{v} \cdot \vec{n}$). Masni tok lahko zapišemo še drugače. Ker je majhna sprememba mase v primeru nestisljive tekočine enaka ravno $dm = \rho dV$, velja glede na vse povedano

$$\Phi_m = \frac{dm}{dt} = \rho \frac{S v \cos \alpha dt}{dt} = \rho v \cos \alpha S. \quad (2.129)$$

Od tod pa se že nakazuje definicija nove količine in sicer **gostote masnega toka** tekočine (\vec{j}_m) t. j. masa tekočine, ki v časovni enoti preide skozi enoto površine. Gostota masnega toka je vektor, ki ima smer hitrosti gibanja tekočine in ga iz zgornje enačbe lahko zapišemo kot

$$\vec{j}_m = \rho \vec{v}. \quad (2.130)$$

Enota za gostoto masnega toka je torej $1 \text{ kg/m}^2\text{s}$.

Če je hitrost toka neenakomerna po površini S , moramo v zgornjem rezultatu integrirati po površini, skozi katero teče tok in ne le z njo množiti. S pomočjo gostote masnega toka sam masni tok zapišemo tudi v obliki

$$\Phi_m = \int \rho v \cos \alpha dS = \int j_m \cos \alpha dS, \quad (2.131)$$

kjer integral poteka po površini, skozi katero teče tok.

Poleg masnega toka in njegove gostote definiramo še **volumski tok** (Φ_V) in **gostoto volumskega toka** (\vec{j}_V). Volumski tok tekočine opisuje, kolikšen volumen tekočine na časovno enoto se pri gibanju premakne, torej

$$\Phi_V = \frac{dV}{dt}. \quad (2.132)$$

Enota za volumski tok je $1 \text{ m}^3/\text{s}$. Gostota volumskega toka pa opisuje volumen tekočine, ki v časovni enoti preide skozi enoto površine. Če je hitrost tekočine pravokotna na ploskev, skozi katero teče tok, lahko pri konstantni gostoti tekočine na osnovi definiciji za Φ_V (en. 2.132), ρ (en. 2.93) in Φ_m (en. 2.131) zapišemo

$$j_V = \frac{\Phi_V}{S} = \frac{1}{S} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{S\rho} \frac{dm}{dt} = v. \quad (2.133)$$

Po velikost ustreza gostota volumskega toka kar hitrosti tekočine, zato je enota za gostoto volumskega toka 1 m/s . Če je gostota tekočine konstantna, sta masni in volumski tok povezana kot $\Phi_m = \rho \Phi_V$. Analogno velja tudi za ustrezni gostoti toka ($\vec{j}_m = \rho \vec{j}_V$).

Newtonov zakon za zvezna telesa

Kot že vemo iz poglavja o dinamiki točkaste mase, se pri dinamiki sprašujemo ne le po opisu gibanja ampak tudi po njegovem vzroku. Za masno točko je vzrok gibanja točkasta sila, ki na to maso deluje. Ker je pri zveznih telesih njihova razsežnost končna, je potrebno v tem primeru tudi nadgraditi koncept sile kot smo to storili v primeru zveznega telesa v mirovanju. Če se zvezno telo giblje, potem mora seveda za vsak njegov del veljati Newtonov zakon (en. 2.48).

Kako bi ta zakon lahko posplošili na primer zveznih teles? Ker je masa zveznega telesa seveda zvezno porazdeljena z gostoto ρ , potem je smiselna posplošitev desne strani Newtonovega zakona kar

$$m\vec{a} \longrightarrow \int dm \vec{a} = \int \rho(\vec{r}, t) \vec{a}(\vec{r}, t) dV. \quad (2.134)$$

Tu smo upoštevali, da je majhna sprememba oziroma diferencial mase kar $\rho(\vec{r}, t)dV$, kar sledi iz zgornje definicije gostote (en. 2.96). Integral tu je po celotnem volumnu telesa.

Newtonov zakon gibanja lahko torej za zvezno telo zapišemo v obliki

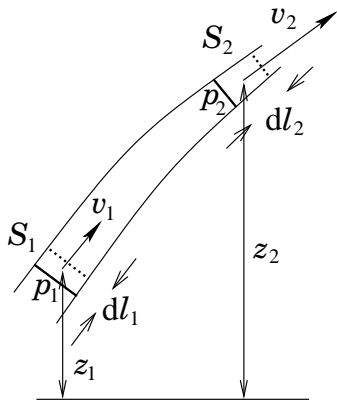
$$\vec{F}_V + \vec{F}_S = \int \rho(\vec{r}, t) \vec{a}(\vec{r}, t) dV . \quad (2.135)$$

Površinske in volumnske sile smo že definirali v primeru statike zveznega telesa. Bistveno razliko v primerjavi z Newtonovim zakonom za točkasto telo predstavlja zgolj zadnji del, ki vsebuje tlak, oziroma silo na enoto površine telesa. Zvezna telesa se torej lahko gibljejo tako zaradi delovanja volumnskih kot površinskih sil.

Za tekočine, ki ne prenašajo strižnih sil, je tangencialna komponenta sile enaka nič. Newtonov zakon za zvezna telesa smo zapisali v obliki, pri kateri na levi strani nastopajo vse sile, ki delujejo na volumen in na površino gibajočega se zveznega telesa (en. 2.135). Drugi člen na levi strani enačbe 2.135 je posledica tega, da ima vsak volumen tekočine vedno tudi mejno površino, preko katere lahko delujejo površinske sile. Le-te posebej ravno koncept tlaka. Kot bomo videli kasneje (str. 54), vse tekočine ne ubogajo enačbe 2.135. Tiste ki jo, pa imenujemo **idealne tekočine**. Idealne tekočine se razlikujejo od **realnih tekočin** po tem, da nimajo viskoznosti.

Dinamika idealnih tekočin: Bernoullijeva enačba

Pri obravnavi gibanja masne točke smo ugotovili, da je ena od posledic Newtonovega zakona energijski zakon. Energijski zakon za gibanje idealnih in nestisljivih tekočin bomo izrazili z Bernoullijevo enačbo. Spomnimo se, da za masno točko energijski zakon trdi, da se celotna energija masne točke, ki je enaka vsoti kinetične in potencialne energije, s časom ne spreminja, da se torej ohranja. Podobno velja tudi za zvezno telo.



Slika 2.39: Pri gibanju tekočine v cevi pride do spremembe mehanske energije med mestoma 1 in 2. Pretečeno prostornino v času dt na izbranih mestih izrazimo v obliki $dV = S_1 dl_1 = S_2 dl_2$, pri čemer sta S_1 in S_2 ustrezna preseka cevi ter dl_1 in dl_2 sta premika, ki sta enaka $v_1 dt$ oziroma $v_2 dt$.

Kako se spremeni zakon o ohranjanju energije, če nimamo opravka z masno točko pač pa z idealno nestisljivo tekočino z gostoto ρ ? Omejimo se na tekočino, ki enakomerno teče v cevi (sl. 2.39). Obravnavamo tekočino med presekom S_1 in S_2 . V času dt se tekočina premakne. Na sliki 2.39 je položaj tekočine po premiku označen s črtkano črto. Ker privzamemo, da teče tekočina proti desni, je na levi strani manj. Ustrezna prostornina tega dela tekočine je dV , ki ima maso $dm = \rho dV$. Na desni stran je več tekočine. Ker je tekočina nestisljiva, sta prostornina in masa tega dela tekočine enaki kot na levi strani. Vsoto ustreznih sprememb v kinetični in potencialni energiji po premiku tekočine zapišemo z izrazom

$$\frac{1}{2} dm v_2^2 - \frac{1}{2} dm v_1^2 + dm g z_2 - dm g z_1 . \quad (2.136)$$

Po zakonu o ohranitvi energije je sprememba vsote kinetične in potencialne energije (izraz 2.136) enaka delu, ki ga pri gibanju opravijo površinske sile zaradi tlaka. Na mestih 1 in 2 je v splošnem različen tlak. Na mestu 1 je delo po Pascalovem zakonu (en. 2.99) enako

$$p_1 S_1 dl_1 = p_1 dV , \quad (2.137)$$

na mestu 2 pa je delo negativno, ker tekočina opravi delo, torej

$$-p_2 S_2 dl_2 = -p_2 dV, \quad (2.138)$$

pri čemer smo z dl_1 in dl_2 označili premik tekočine pri presekih S_1 in S_2 . Če izenačimo spremembo vsote kinetične in potencialne energije (izraz 2.136) z delom površinskih sil (izraza 2.137 in 2.138) in če nato nastalo enačbo delimo z dV , dobimo po preureditvi **Bernoullijevo enačbo**

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2 + p_2. \quad (2.139)$$

Ugotovili smo, da je vsota gostote kinetične energije, gostote potencialne energije in tlaka pri gibanju idealne tekočine konstantna. Bernoullijeva enačba je posplošitev zakona o ohranjanju energije pri zveznih telesih, konkretno v zgornjem primeru pri gibanju idealne, nestisljive tekočine. V nadaljevanju bomo obravnavali dva primera, pri katerih se ustrezen pojav pojasni z uporabo Bernoullijeve enačbe.

Zastojni tlak

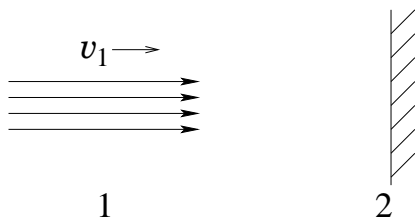
O zastojnem tlaku govorimo, če gibajoča se tekočina zadene na oviro (sl. 2.40). Tekočina se ob oviri ustavi, zato se tam poveča tlak. Predpostavimo, da se gibanje odvija na isti višini in torej spremembe potencialne energije niso pomembne. Tlak tik ob oviri v primerjavi z tlakom tekočine daleč stran od ovire lahko potem izračunamo iz poenostavljene Bernoullijeve enačbe, ki jo zapišemo v obliki

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2, \quad (2.140)$$

torej

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho v_1^2. \quad (2.141)$$

Tej razliki tlakov pravimo tudi **zastojni tlak**. Zastojni tlak dobimo tudi v primeru, če tekočina miruje, giblje pa se telo. Pojav je popolnoma analogen pojavu, ko naleti gibajoča se tekočina na oviro.



Slika 2.40: V točki 1 se tekočina giblje s hitrostjo v_1 , v točki 2 pa je hitrost tekočine enaka nič.

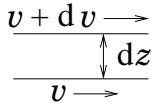
Zaradi zastojnega tlaka deluje na telo poljubne oblike sila upora, ki je sorazmerna kvadratu hitrosti gibanja telesa

$$F_{v^2} = cS \cdot \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (2.142)$$

S je presek telesa. c je konstanta, ki je odvisna od oblike telesa (aerodinamične oblike telesa). Za ploščo je $c = 1,1$, za kroglo $c = 0,4$, ribe pa imajo $c \approx 0,04$. Kot bomo videli kasneje, je opisana sila upora pomembna predvsem pri velikih hitrostih, pa še takrat so razmere pri realnem toku bistveno bolj zapletene in je dejansko področje hitrosti, kjer velja kvadraten zakon upora, precej majhno.

Dinamika viskoznih tekočin

Newtonov zakon v obliki enačbe 2.135 ne velja vedno. Ne velja predvsem za tiste tekočine, pri katerih je notranje trenju veliko. Za opis notranjega trenja nam bo služil tale miselni eksperiment. Imamo tekočino, predeljeno z ravno steno na dva dela. Spodnji, recimo, miruje, zgornji pa se giblje enakomerno s hitrostjo v v smeri, vzporedni s predelno steno. Sedaj steno nenadoma odstranimo in ugotovimo, da začne zgornja gibajoča se tekočina na stični površini vleči za sabo spodnjo mirujočo tekočino. Na meji med tekočinama torej delujejo **strižne sile**.



Slika 2.41: Med plastema, ki se gibljeta z različnima hitrostima v in $v + dv$, deluje sila. Plasti sta na oddaljenosti dz .

Če sedaj počakamo nekaj časa, dobimo zvezen profil hitrosti, daleč spodaj je hitrost nič, daleč zgoraj pa v . Pravimo, da se vzpostavil **gradient hitrosti**. Gradient hitrosti kaže od spodnjih slojev proti zgornjim slojem, v smeri osi z . Gradient hitrosti preko sloja debeline dz prikazuje slika 2.41. Ta gradient hitrosti, ki ima smer pravokotno na samo hitrost, imenujemo tudi **strižna hitrost** tekočine. Zaradi gradienta hitrosti vlečejo zgornji sloji tekočine spodnje sloje s silo, ki je pravokotna na ta gradient hitrosti in zanjo velja

$$F = \eta S \frac{dv}{dz}, \quad (2.143)$$

kjer je S ploskev plasti, dv je razlika med hitrostima plasti, katerih medsebojna razdalja je dz . η je **koeficient viskoznosti**, katerega vrednost je odvisna od tekočine. V tabeli 2.4 so podani koeficienti viskoznosti za nekatere snovi.

Tabela 2.4: Koeficient viskoznosti za različne snovi.

snov	zrak	voda	Hg	smola
$\eta(20^\circ\text{C})$ [kg/ms ²]	$1,7 \cdot 10^{-5}$	0,001	0,0017	10^7

Zgornjo zvezo lahko za zvezen gradient hitrosti zapišemo tudi kot

$$p_s = \eta \frac{dv}{dz}. \quad (2.144)$$

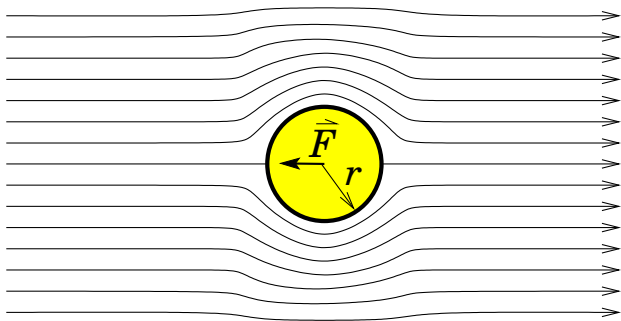
V površinski sili imamo tako poleg pravokotne komponente, ki jo opisuje Pascalov zakon (en. 2.99), tudi strižno komponento. Zgornja enačba (en. 2.144) velja veliko bolj splošno, kot predpostavlja naš miselni eksperiment, in sicer velja za strižno komponento tlaka na vsaki površini, ki obkroža poljuben del tekočine v gibanju. Ta viskozna komponenta sile na poljubno površino znotraj tekočine je drugačne vrste kot vse sile, ki smo jih spoznali doslej, saj je funkcija prostorske porazdelitve hitrosti v tekočini. To ima zelo pomembne posledice. Če namreč vstavimo ta dodaten strižni tlak odvisen od viskoznosti v Newtonovo enačbo gibanja za zvezna telesa, ugotovimo, da energijski zakon ne velja več. Nasprotno. Energija se stalno izgublja, se torej disipira, in njene izgube na enoto časo so sorazmerne z volumskim integralom kvadrata strižne hitrosti po vsej tekočini. Sorazmernostni koeficient je ravno viskoznost η .

Ta disipacija energije ima izjemno pomembne posledice, ki jih lahko vidimo vsak dan pri opazovanju toka tekočin. Od teh posledic si pogledjmo nadrobneje tri: Stokesov upor, sedimentacijsko hitrost in Hagen-Poiseuillov zakon toka po ceveh.

Stokesov upor

Kako se kaže ta neprestana disipacija energije zaradi viskoznosti? Imamo mirujočo kroglo, ki lebdi v gibajoči se viskozni tekočini. Tik ob krogli tekočina miruje, saj se ne more gibati ne pravokotno ne vzporedno s površino krogle. Daleč stran od krogle tekočina po predpostavki teče s stalno hitrostjo. Vmes pa imamo seveda zvezno porazdeljeno strižno hitrost. Tokovnice pri takšnem gibanju tekočine prikazuje slika 2.42.

Iz mehanike točkastega telesa vemo, da je za gibanje, ki ga povzroča sila, potrebna moč (en. 2.61), če hitrost gibanja ni pravokotna na silo. Sedaj obravnavamo tak primer, saj deluje sila v smeri tokovnic. Prej smo sicer brez dokaza podali trditev, da se pri viskoznem toku disipira moč, ki je sorazmerna z volumskim integralom kvadrata strižne sile. Strižna hitrost obstaja v celotnem toku tekočine, ki se giblje mimo mirujoče krogle, nastaja pa ves čas ob površini krogle. Leva stran enačbe 2.61 je torej sorazmerna s kvadratom hitrosti, saj je enaka volumskemu integralu kvadrata



Slika 2.42: Gibanje viskozne tekočine okrog kroglice polmera r . Sila kroglice na tekočino (\vec{F}) je nasprotna smeri tokovnic na veliki oddaljenosti.

strižne hitrosti in sorazmerna z viskoznostjo. Iz definicije porabljene moči, ki se kuri pri takšnem gibanju, potemtakem sledi, da na kroglo deluje **sila viskoznega upora** (\vec{F}_v), ki je sorazmerna viskoznosti in hitrosti. Natančen izračun pokaže, da je enaka

$$\vec{F}_v = 6\pi r \eta \vec{v}, \quad (2.145)$$

kjer je r radij kroglice. Zgornji ugotovitvi, ki pravi, da na mirujočo kroglico v gibajoči se tekočini deluje sila sorazmerna z radijem in hitrostjo tekočine daleč stran od kroglice, pravimo tudi **Stokesov zakon viskoznega upora**. Seveda bi dobili enako silo, tudi če bi se gibala kroglica in bi mirovala tekočina.

Pri uporabi Bernoullijeve enačbe smo odkrili, da je sila upora v tekočini sorazmerna s kvadratom hitrosti (en. 2.142). To seveda velja le za tok idealne tekočine. V viskozni tekočini je sila upora očitno linearno odvisna od hitrosti. Če oba izraza za velikost sile upora pri gibanju tekočine okrog ovire delimo (in pri tem ne upoštevamo številčnih faktorjev), dobimo **Reynoldsovo število**

$$R_e = \frac{\rho v^2 r^2}{r \eta v} = \frac{\rho v r}{\eta}. \quad (2.146)$$

Reynoldsovo število nam pove, kdaj lahko efekte viskoznosti in s tem disipacije zanemarimo in kdaj ne. Če je Reynoldsovo število veliko, potem velja kvadratni zakon upora in so efekti viskoznosti zanemarljivi. Če je majhno, velja linearni zakon upora in efekti viskozne disipacije so bistveni. Vidimo, da so za opredelitev efektov viskoznosti pomembne količine gostota tekočine, velikost telesa, hitrost toka in koeficient viskoznosti.

Sedimentacijska hitrost

Zaradi zunanje sile se delec v raztopini giblje, njegovo gibanje pa skuša ustaviti sila viskoznega upora, če je le Reynoldsovo število, ki ustreza temu gibanju, dovolj majhno. Do potovanja pride zaradi razlike v gostotah med delcem ter raztopino in zaradi gravitacije ali **centrifugalne sile*** pri vrtenju. Ker je končna hitrost tega potovanja odvisna od razlike med gostoto delca in raztopine, se različno gosti delci med seboj separirajo. To je tudi tisti efekt, ki ga pri **sedimentaciji** izkoriščamo.

Ločimo dve vrsti sedimentacijskega postopka glede na zunanjo silo. Pri sedimentaciji zaradi gravitacije je sila teže delca izravnana s silo vzgona in upora, ki delujeta v nasprotnih smereh. Pri sedimentaciji zaradi centrifugalne sile pa je le-ta izravnana s silo vzgona in upora. V prvem primeru lahko za razliko med silo teže in silo vzgona zapišemo

$$F_t = \frac{4\pi r^3}{3} \Delta \rho g, \quad (2.147)$$

kjer je r polmer delca, za katerega smo predpostavili, da ima obliko krogle, in $\Delta \rho$ je razlika med gostoto delca ter gostoto raztopine. Centrifugalno silo, zmanjšano za silo vzgona, pa lahko zapišemo kot

$$F_c = \frac{4\pi r^3}{3} \Delta \rho \omega^2 R. \quad (2.148)$$

*Centrifugalna sila je sistemska sila. Če telo kroži, deluje nanj centrifugalna sila v smeri radija. Centrifugalna sila ima nasprotno smer in enako velikost kot radialna sila.

Tu je R oddaljenost delca od osi vrtenja. Podobno kot pri hidrostatskem tlaku, kjer sila vzgona kaže v nasprotno smer povečevanja tlaka, tudi pri vrtenju tekočine kaže sila vzgona v nasprotno smer kot centrifugalna sila. V zgornji enačbi je ω kotna hitrost vrtenja centrifuge. Ker je centrifugalna sila neposredno odvisna od kotne hitrosti, ki jo v centrifugi lahko nastavimo, se jo da zlahka spreminjati in zato predstavlja primernejšo metodo za sedimentacijo delcev. V obeh primerih smo od gonilne sile, bodisi teže bodisi centrifugalne sile, odšteli del, ki gre na račun vzgona. Zato v obeh izrazih nastopa razlika gostot. Obe sili (F_t in F_c) povzročata, da se začne delec v raztopini gibati. V primeru teže navzdol in v primeru centrifugalne sile radialno navzven. Hitrosti potovanja so lahko zelo majhne, če je le razlika med silo teže in vzgona majhna.

Temu gibanju nasprotuje sila Stokesovega viskoznega upora (en. 2.145), ki je za dovolj majhne delce, ko je Reynoldsovo število majhno, sorazmerna hitrosti gibanja delca. Delec se na začetku gibanja pospešuje, nato pa se ustali pri neki stacionarni vrednosti hitrosti, torej takšni, ki se s časom ne spreminja več. V stacionarnem ravnovesju mora biti seveda vsota vseh sil, ki delujejo na telo, enaka nič.

Sedimentacijsko ravnovesje torej opisujeta enačbi

$$F_t = \frac{4\pi r^3}{3} \Delta\rho g = 6\pi r \eta v = F_v, \quad (2.149)$$

v primeru sile teže ali pa

$$F_c = \frac{4\pi r^3}{3} \Delta\rho \omega^2 R = 6\pi r \eta v = F_v, \quad (2.150)$$

v primeru centrifugalne sile. Iz obeh zgornjih enačb lahko zlahka izračunamo stacionarno oziroma ravnovesno vrednost hitrosti.

Sedimentacijski koeficient (s) definiramo kot razmerje med sorazmernostnim faktorjem med F_u ter g (oziroma F_u in $\omega^2 r$) in sorazmernostnim faktorjem med F_z ter v

$$s = \frac{F_t/g}{F_u/v} \quad \left(\text{ali } s = \frac{F_c/\omega^2 R}{F_u/v} \right). \quad (2.151)$$

Enota za sedimentacijski koeficient je svedberg ($1 \text{ S} = 10^{-13} \text{ s}$). Sedimentacijski koeficient je odvisen samo od lastnosti delca in tekočine. Uporabimo ga za določanje gostote makromolekul in s tem tudi molekularne mase. Iz zgornjih enačb lahko sedaj izluščimo vrednost sedimentacijskega koeficienta v obliki

$$s = \frac{2\Delta\rho r^2}{9\eta}, \quad (2.152)$$

in je za oba primera, za težnostno in za centrifugalno sedimentacijo, isti. Sedimentacijski koeficient lahko spreminjamo s spreminjanjem viskoznosti ali pa s spreminjanjem razlike gostot med delcem in raztopino. Če recimo dodamo raztopini visokomolekularne sladkorje, lahko gostoto spremenimo bolj kot viskoznost in dosežemo boljše sedimentacijo.

Hagen - Poiseuilleov zakon

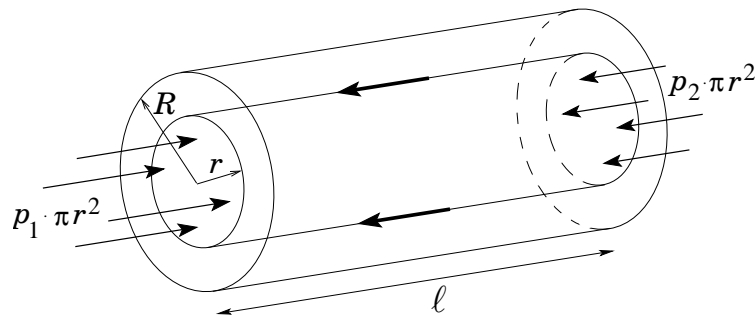
Zaradi viskoznosti teče tekočina skozi tanko cev le, če sta tlaka na obeh straneh cevi različna. V nasprotnem primeru se hitro ustavi. Volumski tok tekočine skozi cev, vzdolž katere deluje tlačna razlika, opisuje **Hagen - Poiseuilleov zakon**.

Hagen-Poiseuillov zakon bomo izpeljali v dveh korakih. Najprej bomo določili odvisnost hitrosti tekočine od razdalje r od vzdolžne osi cevi. Na tekočino valja z radijem r delujeta dve sili: sila zaradi razlike tlakov med obema stranema ($\Delta p = p_1 - p_2$)

$$F_{\Delta p} = \pi r^2 \Delta p \quad (2.153)$$

in sila zaradi viskoznosti (en. 2.143), ki deluje strižno na plašč valja (sl. 2.43)

$$F_\eta = -\eta \cdot 2\pi r \ell \frac{dv}{dr}. \quad (2.154)$$



Slika 2.43: Predstavljene so sile, ki delujejo na valj polmera r v valju polmera R in dolžine ℓ . Strižna sila zaradi viskoznosti je predstavljena z debelima puščicama, sili zaradi tlakov na konceh cevi pa s tankimi.

Vrednost te sile (F_η) je pozitivna, ker se hitrost tekočine manjša z večanjem razdalje r in je zato odvod $dv/dr < 0$. Pri pretakanju po tanki cevi se vzpostavi stacionarno stanje, ko je sila, ki tekočino poganja, po velikosti enaka sili, ki tekočino zaustavlja:

$$F_{\Delta p} = F_\eta . \quad (2.155)$$

Če vstavimo izraza za obe sili (enačbi 2.153 in 2.154) v enačbo 2.155, dobimo

$$\pi r^2 \Delta p = -\eta \cdot 2\pi r \ell \frac{dv}{dr} . \quad (2.156)$$

Enačbo 2.156 preuredimo tako, da dobimo hitrost na njeni levi strani, radij pa na njeni desni strani:

$$dv = -\frac{\Delta p}{2\eta \ell} r dr . \quad (2.157)$$

Z integracijo na obeh straneh enačbe 2.157 dobimo

$$v(r) - v(0) = -\frac{\Delta p}{4\eta \ell} r^2 . \quad (2.158)$$

$v(r)$ je hitrost tekočine v valjni plasti v oddaljenosti r od osi cevi, $v(0)$ pa je hitrost na sredini cevi pri $r = 0$. Velikost te hitrost dobimo, če upoštevamo, da je hitrost tekočine ob steni (pri $r = R$) enaka nič: $v(R) = 0$. Hitrost v cevi je torej odvisna od kvadrata oddaljenosti od osi cevi:

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta \ell} (R^2 - r^2) . \quad (2.159)$$

Hitrost ima torej v cevi kvadraten oziroma **parabolični profil**. Ob steni miruje, najhitreje pa se giblje na sredini cevi. Tam je hitrost enaka $v(0) = \frac{\Delta p}{4\eta \ell} R^2$. Vsi vključki v tekočini se bodo torej gibal predvsem po sredini cevi, saj so tam strižne sile viskoznosti, ki so sorazmerne odvodu hitrosti po radiju, najmanjše.

V drugem koraku te izpeljave bomo izračunali volumski tok nestisljive tekočine skozi cev v odvisnosti od Δp . Če se spomnimo definicije gostote volumskega pretoka (en. 2.133), lahko zapišemo izraz za volumski tok skozi cev

$$\Phi_V = \int v dS, \quad (2.160)$$

pri čemer moramo integrirati po vsem krožnem preseku cevi, ki je pravokoten na hitrost tekočine. Torej dobimo

$$\Phi_V = 2\pi \int_0^R v(r) r dr = \frac{\pi \Delta p}{2\eta \ell} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr . \quad (2.161)$$

Pri integraciji moramo izračunati naslednja dva določena integrala (tabela D.1 na str. 261)

$$\int_0^R r dr = \frac{r^2}{2} \Big|_0^R = \frac{R^2}{2} \quad \text{in} \quad \int_0^R r^3 dr = \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{R^4}{4}.$$

Celoten volumski tok skozi cev je torej na koncu enak

$$\Phi_V = \frac{\pi \Delta p}{2\eta \ell} \left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4} \right] = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\eta \ell}. \quad (2.162)$$

Volumski tok skozi cev je torej sorazmeren tlačni razliki med začetkom in koncem cevi, koeficient pa je odvisen od radija cevi, njene dolžine in viskoznosti. To je končna oblika Hagen-Poiseuilleovega zakona. Zapišemo jo lahko tudi na nekoliko drugačen način. In sicer vpeljemo hidrodinamski upor cevi, ki naj bo enak

$$R_\eta = \frac{8\eta \ell}{\pi R^4}. \quad (2.163)$$

S to definicijo se potem Hagen-Poiseuilleov zakon glasi

$$\Phi_V = \frac{\Delta p}{R_\eta}. \quad (2.164)$$

Hagen-Poiseuilleov zakon, zapisan z enačbo 2.164, je podobne oblike kot **Ohmov zakon** za električni tok (en. 4.65 na str. 131). Pri Ohmovem zakonu je električni tok sorazmeren z električno napetostjo med začetkom in koncem žice in obratno sorazmeren z uporom žice, tako da je volumski tok analogen električnemu toku, razlika tlakov je analogna električni napetosti, hidrodinamski upor pa je analogen uporom žice. Za upor žice izpeljemo (pogl. 4.1.12), da je enak

$$R_I = \frac{\ell}{\pi \sigma R^2}. \quad (2.165)$$

kjer je σ električna prevodnost. Tu je vidna tudi razlika med hidrodinamskim in električnim uporom. Medtem ko je hidrodinamski upor obratno sorazmeren z radijem cevi na četrto potenco, je električni upor obratno sorazmeren z radijem žice na drugo potenco. Tu se torej analogija med električnim in hidrodinamskim uporom konča. Iz nje pa lahko na koncu zlahka dobimo tudi skupen hidrodinamski upor sistema, sestavljenega iz več vzporedno ali zaporedno ali poljubno zvezanih cevi in sicer natanko po pravilih, ki jih poznamo iz elektrike (pogl. 4.4.4), če le vlogo napetostne razlike prevzame razlika tlakov in vlogo električnega toka masni tok tekočine.

2.4 Mehansko ravnovesje in nihanje

2.4.1 Mehansko ravnovesje

Telesa lahko mirujejo, če nanje ne deluje nobena sila. Običajno pa telesa niso izolirana in nanje torej delujejo sile. Iz Newtonovih zakonov sledi, da lahko telo vendarle miruje tudi v tem primeru, če sta le vsoti vseh sil in navorov, ki delujejo nanj, enaki nič:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad (2.166)$$

$$\sum_j \vec{M}_j = 0 \quad (2.167)$$

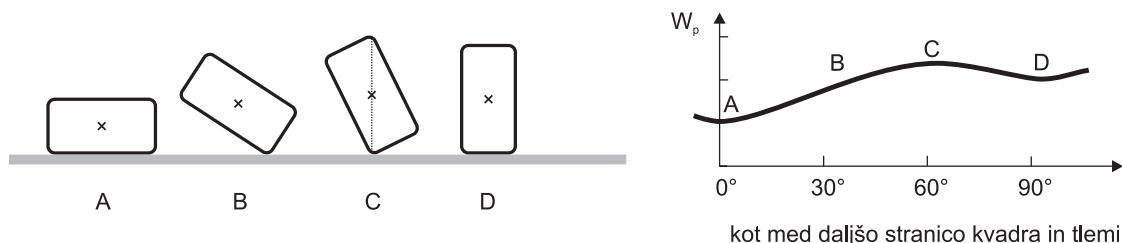
V takem primeru pravimo, da je telo v **mehanskem ravnovesju**.

V ravnovesju sta torej vsoti vseh zunanjih sil in navorov na telo enaki nič. Mehanika mehanskega ravnovesja (statika) je zelo pomembna tudi v medicini (n. pr. v ortopediji, športni medicini, dentalni medicini ipd.), kjer lahko z njeno pomočjo analiziramo obremenitve mišic in kosti v telesu. Če nas na

primer zanima razporeditev sil na določen del telesa, najprej določimo vse zunanje sile, ki delujejo na ta del telesa, ter nato z uporabo zgornjih dveh enačb določimo tudi velikost teh sil.

Ravnovesna stanja telesa se lahko med seboj razlikujejo glede na to, kaj se zgodi s telesom, če ga malo izmaknemo iz ravnovesja. O tem se lahko prepričamo ob pogledu na sliko 2.44, ki prikazuje različne lege kvadra na ravnih tleh. Legi kvadra A in D sta očitno ravnovesni, saj je kvader v teh legah v mirovanju. Prav tako je ravnovesna lega C, kjer z malo spretnosti težišče kvadra postavimo ravno nad točko stika s podlago (navor sile teže, ki bi kvader lahko zavrtel okoli te točke, je torej nič). Lega B je neravnovesna, saj se kvader v njej spontano prekucne na tla. Če kvader izmaknemo iz ravnovesja, se bo v prikazanih treh ravnovesnih legah obnašal drugače:

- Če kvader malo premaknemo iz ravnovesne lege A, bodo na kvader začele delovati sile (navori), ki ga bodo vrnil nazaj v isto ravnovesje. Lega A je torej **stabilno ravnovesje**.
- Če kvader malo premaknemo iz ravnovesne lege C, bodo na kvader začele delovati sile (navori), ki ga bodo prekucnili stran od lege C. Lega C je torej **nestabilno ravnovesje (labilna lega)**.
- Če kvader malo premaknemo iz ravnovesne lege D, se bo vrnil nazaj v isto ravnovesje D. Če pa kvader močno premaknemo iz ravnovesne lege D, se bo prekucnil v lego A. Lega D je torej **lokalno stabilno ravnovesje** (v tem kontekstu legi A včasih pravimo *globalno* ravnovesje).



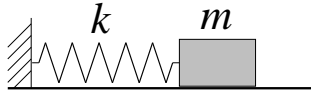
Slika 2.44: Različne lege kvadra na tleh (levo) ter shematični prikaz ustrezne potencialne energije (desno). Lega A, C in D so ravnovesne, lega B pa je neravnovesna. Lega A je globalno stabilna ravnovesna lega (pri globalnem minimumu potencialne energije), lega D je lokalno stabilna ravnovesna lega (pri lokalnem minimumu potencialne energije), lega C pa je nestabilna ravnovesna lega (pri maksimumu potencialne energije)

Ravnovesna stanja si lahko lepo predstavljamo, če analiziramo potencialno energijo telesa (sl. 2.44 desno). Vidimo, da globalno stabilno ravnovesje ustreza globalnemu minimumu potencialne energije, lokalno stabilno ravnovesje ustreza lokalnemu minimumu potencialne energije, nestabilno ravnovesje pa ustreza maksimumu potencialne energije. V splošnem ravnovesna stanja ustrezajo ekstremom potencialne energije (t.j. točkam, kjer je odvod potencialne energije po spremembi lege enak nič), neravnovesna stanja pa klancem. V kasnejših poglavjih bomo videli, da so opisani pojmi zelo pomembni in uporabni tudi pri drugih (tudi ne-mehanskih) sistemih. Tako jih bomo spet srečali n. pr. pri termodinamiki, kjer ravnovesje sistema sicer ne bo pogojeno z mehanskimi silami in bo vloga mehanske potencialne energije prevzel termodinamski potencial.

2.4.2 Nihanje

V prejšnjem poglavju smo videli, da se sistem, ki ga izmaknemo iz stabilne ravnovesne in spustimo, vrne nazaj v ravnovesje. Pogosto pa se sistem zaradi svoje vztrajnosti ne ustavi v ravnovesju, temveč okoli ravnovesja zaniha. **Nihanje** je torej spontano periodično gibanje sistema okoli ravnovesja. Osnovne lastnosti nihanja si lahko nazorno predstavimo na preprostem sistemu, n. pr. pri **vzmetnem nihalu** na gladki podlagi (sl. 2.45).

Utež z maso m na gladki podlagi brez trenja je v ravnovesju, ko vzmet ni niti skrčena niti raztegnjena. Če utež odmaknemo iz ravnovesne lege, nanjo začne delovati sila vzmeti, ki kaže nazaj



Slika 2.45: Vzmetno nihalo je telo mase m , ki je pritrjeno z vzmetjo na steno, pri čemer brez stržnih sil drsi po podlagi. Lastnosti vzmeti podaja konstanta k .

proti ravnovesju. Ob tem bo vzmet dobila določeno hitrost, zato se v ravnovesju ne bo ustavila, temveč bo zaradi svoje vztrajnosti nadaljevala pot na drugo stran. Na drugi strani sila vzmeti spet kaže nazaj proti ravnovesju in celotna zgodba se ponovi. Dobimo nihanje uteži okoli ravnovesja, ki je torej **periodično gibanje**.

Največji odmik pri nihanju imenujemo **amplituda** nihanja. Čas, ki ga potrebuje telo, da se vrne v začetno lego, je **perioda** oziroma **nihajni čas**. Recipročna vrednost periode je **frekvenca** nihanja (ponavadi jo označimo z ν), ki pove, kolikokrat na enoto časa nihalo zaniha. Frekvenca nihanja je pogosto odvisna le od fizikalnih lastnosti nihajočega sistema, zato jo v takih primerih imenujemo tudi **lastna frekvenca nihanja** (ν_0).

Nihanje vzmetnega nihala si pogledjmo še bolj natančno. Sila vzmeti, ki vleče nihalo nazaj v ravnovesje je sorazmerna negativni vrednosti odmika od ravnovesja (en. 2.55, sl. 2.18), $F = -kx$. Ker je pospešek (a) drugi odvod odmika po času, se Newtonov zakon za gibanje prožne vzmeti glasi:

$$m\ddot{x} = -kx, \quad (2.168)$$

kjer je

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{dx}{dt}. \quad (2.169)$$

Drugi odvod odmika x po času je torej sorazmeren negativni vrednosti odmika. Iz matematike vemo, da ima to lastnost za odvisnost odmika od časa ($x(t)$) sinusna funkcija. Rešitev enačbe za Newtonov zakon za naš primer, ki pove, kako se odmik nihala spreminja s časom, je torej **sinusno nihanje**:

$$x(t) = x_m \sin(\omega_0 t - \delta), \quad (2.170)$$

pri čemer je x_m amplituda nihanja. Argument v sinusni funkciji ($\omega_0 t - \delta$) se imenuje **faza**. Konstanta δ se imenuje **fazni premik** (ali **zamik**) in je odvisna od lege nihala ob času $t = 0$. Če se n. pr. ob času $t = 0$ telo nahaja v mirovni legi ($x = 0$), je $\delta = 0$, če pa je v tem trenutku telo najbolj odmaknjeno od mirovne lege ($x = x_m$), je $\delta = \pi/2$. Konstanta ω_0 je **lastna krožna frekvenca** nihanja in je povezana z lastno frekvenco ν_0 kot

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0. \quad (2.171)$$

O tem, da sinusno nihanje zares ustreza Newtonovem zakonu (en. 2.168), se prepričamo tako, da izračunamo drugi odvod odmika po času ($x(t)$) (en. 2.170). Izraza pa sta enaka le, če je krožna frekvenca ω_0 enaka

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2.172)$$

Vidimo, da je v našem primeru krožna frekvenca ω_0 zares odvisna le od fizikalnih lastnosti obravnavanega nihala, ne pa n. pr. od začetnega odmika od ravnovesja.

V splošnem za nihanje velja, da se med nihanjem energija pretvarja iz ene vrste v drugo in nazaj. Pri preprostem vzmetnem nihalu se tako kinetična energija uteži pretvarja v prožnostno energijo vzmeti in nazaj. V okviru Hookovega zakona, kjer so raztezki sorazmerni sili, je prožnostna energija vedno sorazmerna kvadratu raztezka.

Če v sistemu ni trenja in torej velja zakon o ohranitvi energije, se vsota kinetične in prožnostne energije sistema ne spreminja. Celotna energija nihanja je enaka delu, ki smo ga vložili v sistem, ko smo ga na začetku spravili iz ravnovesja. Pri odmiku od ravnovesne lege vzmetnega nihala x je vsota kinetične (en. 2.83) in prožnostne (str. 33) energije enaka

$$W = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2. \quad (2.173)$$

Največjo vrednost prožnostne energije ima nihalo pri največjem odmiku, $x = x_m$. Takrat je $W = kx_m^2/2$, kar pomeni, da je amplituda sorazmerna kvadratnemu korenu celotne energije nihala. Največjo vrednost kinetične energije pa ima nihalo takrat, ko se nahaja pri $x = 0$. Ker sta si največja vrednost prožnostne energije in največja vrednost kinetične energije enaki, velja, da sta si amplituda nihanja in največja hitrosti nihala v_m sorazmerna, sorazmernostni faktor pa je enak krožni frekvenci

$$v_m = \omega_0 x_m . \quad (2.174)$$

Sinusnem nihanju pravimo tudi **harmonično** nihanje. Za harmonično nihanje je torej značilno, da je sila, ki vleče sistem nazaj v ravnovesje, sorazmerna odkliku iz ravnovesja. Vsa nihanja pa niso harmonična — če sila ni sorazmerna odkliku od ravnovesja (in je n. pr. odvisna od kvadrata odklika), sistem ne niha sinusno temveč precej bolj zapleteno. Tako je pri neharmoničnem nihanju lahko frekvenca nihanja odvisna tudi n. pr. od amplitude in ni nujno le lastnost nihala. Pogosto pride do neharmoničnega nihanja, če so odkliki od ravnovesja zelo veliki. Po drugi strani pa velja, da je pri majhnih odklikih od ravnovesja večino nihanj harmoničnih (kmalu bomo spoznali matematično nihalo, ki je en tak primer).

2.4.3 Nekaj primerov različnih nihalo

Pri **nitnem** ali **matematičnem nihalu** niha telo z maso m , pritrjeno na breztežni vrvi dolžine ℓ (sl. 2.46). Gibanje lahko obravnavamo kot vrtenje okrog osi skozi pritrdišče vrvice. Odmik od mirovne lege merimo s kotom ϕ . Pri odkliku ϕ deluje na telo navor $M = -\ell mg \sin \phi$. Enačba gibanja* se glasi

$$J\alpha = -\ell mg \sin \phi \quad (2.175)$$

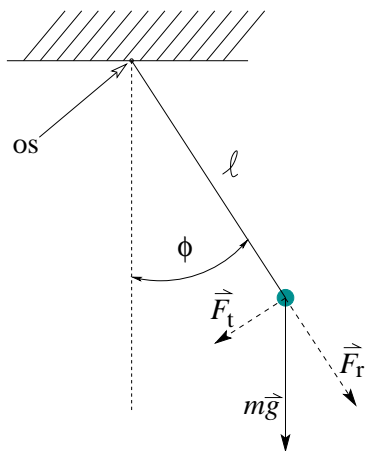
oziroma, ker je za točkasto telo $J = m\ell^2$ (en. 2.73), zapišemo lahko tudi

$$\alpha = -\frac{g}{\ell} \sin \phi , \quad (2.176)$$

kjer je

$$\alpha \equiv \ddot{\phi} \equiv \frac{d^2\phi}{dt^2} . \quad (2.177)$$

Nihanje matematičnega nihala ni harmonično, ker $\ddot{\phi}$ ni sorazmeren odkliku ϕ ampak sinusnemu ustreznemu kotu ($\sin \phi$). Pri majhnih odklikih velja $\sin \phi \approx \phi$ in imamo zato takrat opravka s harmoničnim nihanjem s krožno frekvenco $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$.



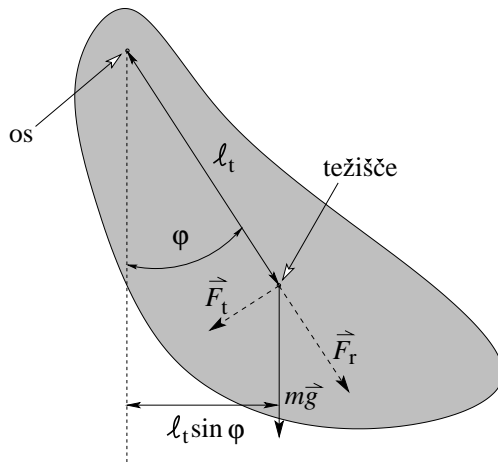
Slika 2.46: Matematično nihalo. Silo teže ($m\vec{g}$) lahko razstavimo na dve komponenti - na tangencialno komponento ($F_t = mg \sin \phi$) in na komponento v smeri radija ($F_r = mg \cos \phi$). K navoru prispeva le tangencialna komponenta.

Težno nihalo se razlikuje od nitnega nihala v tem, da telo ni točkasto, ampak togo. Odmik od mirovne lege merimo s kotom ϕ , ki ga oklepata navpičnica in premica, ki teče od osi skozi težišče telesa. Enačba gibanja se glasi:

$$J\ddot{\phi} = -\ell_t mg \sin \phi , \quad (2.178)$$

*Tako pogosto imenujemo Newtonov zakon, ki je za kroženje izražen z enačbo 2.72.

kjer so J vztrajnostni moment telesa glede na os vrtenja, m masa telesa, ℓ_t pa razdalja od osi do težišča telesa. Pri majhnih odklkih od mirovne lege velja $\sin\phi \approx \phi$. Tudi to nihanje je v tem primeru harmonično s krožno frekvenco $\omega_0 = \sqrt{\ell_t mg/J}$. Matematično nihalo je seveda poseben primer težnega nihala, pri katerem je vsa masa zbrana v težišču in je vztrajnostni moment nihala preprosto $J = m\ell_t^2$.

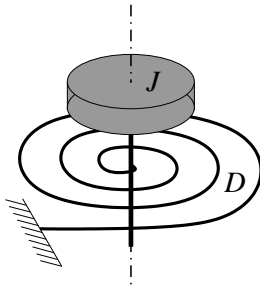


Slika 2.47: Težno nihalo. Podobno je matematičnemu, le da pri njem ne niha masna točka temveč togo telo.

Pri **sučnem** oziroma **torzijskem nihalu** imamo opravka s strižno deformacijo torzijske vzmeti. Pri torzijskem nihalu se lahko predmet z vztrajnostnim momentom J vrti na osi, pri čemer je odklik od ravnovesja (kot ϑ) sorazmeren z navorom vzmeti, ki je pritrjena na os (sl. 2.48). Navor torzijske vzmeti je sorazmeren s kotom torzijske deformacije (en. 2.74), po smeri pa deformaciji nasprotuje ($M = -D\vartheta$), kar seveda vemo iz vsakdanjega življenja. Potem Newtonovo enačbo gibanja za kot deformacije (ϑ) zapišemo v obliki

$$J\ddot{\vartheta} = -D\vartheta. \quad (2.179)$$

Tudi rešitev zgornje enačbe predstavlja harmonično nihanje za kot ϑ s krožno frekvenco $\omega_0 = \sqrt{D/J}$.



Slika 2.48: Torzijsko nihalo: togo telo z vztrajnostnim momentom J niha v vodoravni legi, ker je njegova navpična os pritrjena na torzijsko vzmet. D je direkcijska konstanta vzmeti.

Sedaj si oglejmo gibanje gladine **vodnega stolpca** v polkrožni cevi (sl. 2.49). Če vodni stolpce izmaknemo iz njegove ravnovesne lege, tako da recimo pihnemo v en del cevi, potem začne nihati. Sila, ki vleče stolpec nazaj v ravnovesje, ko sta gladini v krakih cevi na višinah $-x$ in x , je v tem primeru težnost. Če se ena gladina dvigne za x , torej se druga za enako dolžino spusti, saj je tekočina nestisljiva, potem je težnostna sila enaka

$$F = -S\rho g \cdot 2x. \quad (2.180)$$

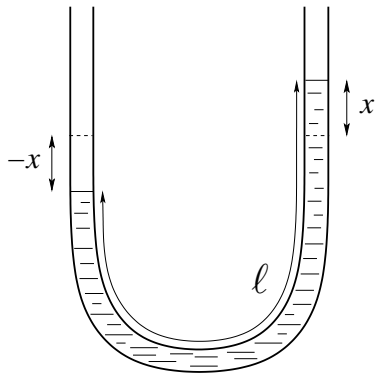
Newtonove enačba gibanja v tem primer je

$$ma = -S\rho g \cdot 2x, \quad (2.181)$$

kjer so m masa kapljevine v nihalu, S presek vodnega stolpca, ρ gostota kapljevine in x odklik od ravnovesne. Ker je masa enaka ρSl (l je dolžina vode v polkrožni cevi) sledi diferencialna enačba za lego x

$$\ddot{x} = -\frac{2g}{\ell}x, \quad (2.182)$$

ki ima rešitev v obliki harmoničnega nihanja s krožno frekvenco $\omega_0 = \sqrt{2g/\ell}$.



Slika 2.49: Nihanje vodnega stolpca. Ravnovesna lega stolpca je označena s črtkano črto.

2.4.4 Dušeno nihanje

Zaradi trenja med nihalom in njegovo okolico so nihanja v splošnem dušena, kar pomeni, da amplituda nihanja s časom pada toliko časa, dokler gibanje ne usahne. Zaradi trenja se seveda zmanjšuje tudi celotna energija nihanja. Kot primer dušenega gibanja bomo obravnavali dušeno harmonično nihanje, pri katerem je sila trenja sorazmerna hitrosti gibanja (vsa dušena nihanja niso te vrste - pri vzmetnem nihalu na hrapavi podlagi n. pr. je sila trenja konstantna ne glede na hitrost). Primer sile trenja, ki je sorazmerna hitrosti, je sila zaradi viskoznosti (str. 56, en. 2.145). Enačba gibanja se v tem primeru glasi:

$$ma = -kx - bv, \quad (2.183)$$

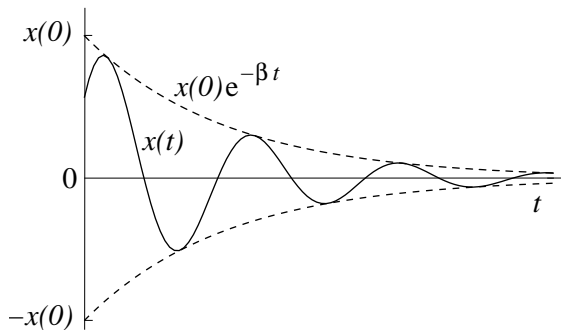
kjer je b konstanta. Tudi v tem primeru se da rešitev izraziti z elementarnimi funkcijami

$$x(t) = x(0)e^{-\beta t} \sin(\omega_d t - \delta), \quad (2.184)$$

pri čemer je $\beta = b/(2m)$, krožna frekvenca pa

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (2.185)$$

Amplituda dušenega nihanja torej eksponentno pada (sl. 2.50).



Slika 2.50: Spreminjanje amplitude ($x(0)e^{-\beta t}$) in odmika ($x(t)$) v odvisnosti od časa (t) pri dušnem nihanju.

Dušenje je lahko tako močno, da je

$$\beta > \omega_0. \quad (2.186)$$

V tem primeru telo ne zaniha, ampak se, če ga odmaknemo od ravnovesne lege in spustimo, eksponentno približuje ravnovesni legi.

2.4.5 Vsiljeno nihanje, resonanca

Obravnavamo gibanje dušenega nihala, na katerega deluje periodična sila $F(t) = F_0 \sin \omega t$. Enačba gibanja se glasi

$$ma = -kx - bv + F_0 \sin \omega t . \quad (2.187)$$

Nihalo niha s frekvenco sile. Rešitev gornje enačbe je

$$x(t) = x_m(\omega) \sin(\omega t - \delta(\omega)) . \quad (2.188)$$

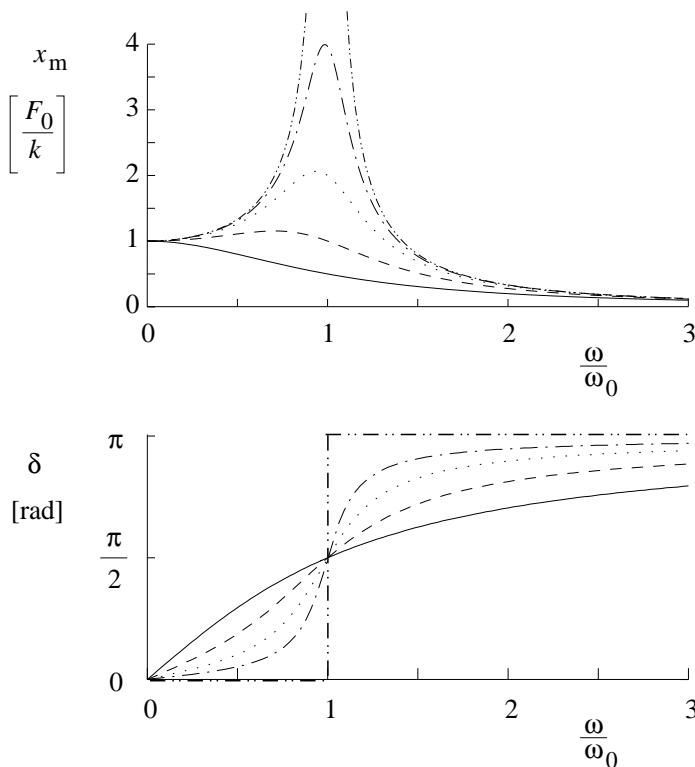
Amplituda nihanja kot tudi razlika v fazi med nihanjem zunanje sile in nihala sta odvisni od frekvence in sicer je amplituda enaka

$$x_m(\omega) = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4\beta^2\omega^2}{\omega_0^4}}} , \quad (2.189)$$

fazna razlika pa se izrazi kot

$$\tan \delta = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} . \quad (2.190)$$

Odvisnost amplitude in faze od frekvence nihanja sile prikazuje slika 2.51.



Slika 2.51: Resonančne krivulje. Odvisnost amplitude (x_m) (zgoraj) in faznega premika (δ) (spodaj) od razmerja med krožno frekvenco vsiljenega nihanja in lastno krožno frekvenco (ω/ω_0) za razmerje β/ω_0 je 1, 0,5, 0,25, 0,125 in 0.

Pri frekvencah oscilacije sile, ki so veliko manjše od lastne frekvence nihala, je amplituda nihanja nihala enaka $F_0/m\omega_0^2$, nihanje nihala pa poteka sočasno s časovnim spreminjanjem sile. Amplituda nihanja se zelo poveča, ko je frekvenca oscilacije sile približno enaka lastni frekvenci nihala. Sila in nihalo sta takrat v resonanci in nihalo niha s faznim zaostankom $\pi/2$. Pri frekvencah oscilacije sile, ki so veliko večje od lastne frekvence nihala, se amplituda približuje vrednosti nič, fazna razlika pa vrednosti π (sl. 2.51).

2.4.6 Meritev sunka sile, balistično nihalo, balistokardiografija

Z nihalom lahko določimo sunek sile. Če sila deluje na mirujoče nihalo v časovnem intervalu, ki je kratek v primerjavi s trajanjem ene periode nihanja, je namreč amplituda nastalega nihanja

sorazmerna sunku sile. Zaradi sunka sile se je spremenila gibalna količina nihala mv_m (v_m je največja hitrost nihala). Ker je $v_m = \omega_0 x_m$, dobimo, da je $\int F dt = m\omega_0 x_m$, oziroma

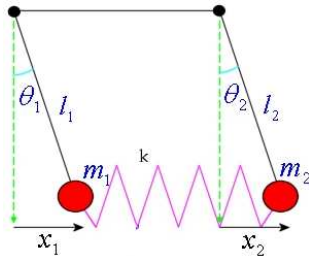
$$x_m = \frac{1}{m\omega_0} \int F dt . \quad (2.191)$$

Nihala, prirejena za merjenje sunka sile, oziroma gibalne količine, imenujemo balistična nihala.

V medicini se opisana metoda uporablja pri balistokardiografiji, s katero lahko izmerimo sunek sile srčne mišice. Pacienta uležemo na mizo, ki lahko niha. Ko srčna mišica potisne kri iz levega prekata v smeri glave, dobi zaradi zahteve po ohranitvi gibalne količine telo na mizi hitrost v nasprotni smeri, zato malo zaniha. Sunek sile srčne mišice lahko izmerimo iz odmika nihanja mize.

2.4.7 Sestavljeno nihanje

Do sedaj smo obravnavali le nihanje preprostih sistemov, ki so imeli le eno stopnjo prostosti. V praksi pa pogosto srečamo tudi bolj komplicirana nihala, ki imajo več stopenj prostosti. Primer sta n. pr. dve matematični nihali, ki sta povezani z vzmetjo (sl. 2.52). Sestavljeno nihanje je tudi nihanje atomov v molekulah, ki si jih lahko v prvem približku predstavljamo kot sestavljena vzmetna nihala (jedra atomov predstavljajo mase, interakcije med atomi pa vzmeti).



Slika 2.52: Primer nihala, ko sta matematični nihali povezani z vzmetjo.

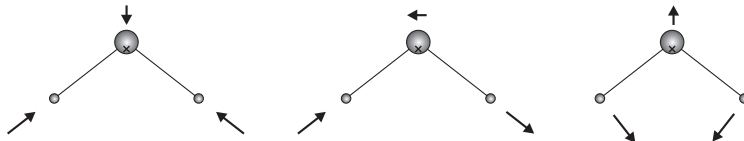
Čeprav je nihanje sestavljenih nihala lahko zelo zapleteno, pa se izkaže, da lahko vsako sestavljeno nihanje opišemo kot vsoto **lastnih nihanj** sistema, od katerih ima vsako svojo lastno frekvenco. Število lastnih nihanj sistema je enako številu prostostnih stopenj nihanja sistema. Pri dveh povezanih matematičnih ali vzmetnih nihalih je število prostostnih stopenj nihanja enako 2 in je tudi število lastnih nihanj enako 2. Sistem ima torej dve lastni krožni frekvenci, $\omega_{0,1}$ in $\omega_{0,2}$. Poljubno gibanje takega sistema se napiše lahko kot vsota nihanj z lastnimi frekvencami.

$$x_2 = x_{m,1} \sin(\omega_{0,1}t - \delta_1) + x_{m,2} \sin(\omega_{0,2}t - \delta_2) . \quad (2.192)$$

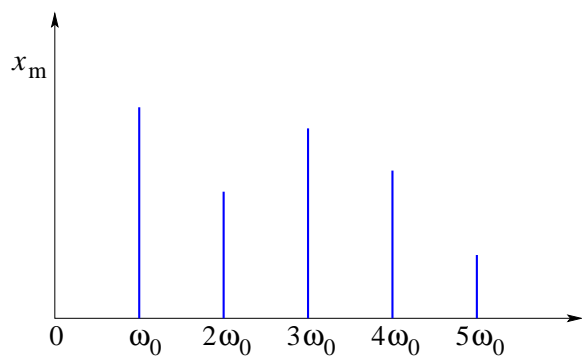
Pri molekulah z N atomi je število prostostnih stopenj enako $3N$, vendar je nekaj teh prostostnih stopenj povezanih z gibanjem celotne molekule in ne z nihanjem. Linearne molekule imajo tako $3N - 5$ lastnih nihanj (pri linearnih molekulah tri prostostne stopnje odpadejo na translacijo težišča molekule, dve pa na rotacijo celotne molekule), prostorske pa $3N - 6$ (ploskovne oziroma prostorske molekule imajo tri translacijske in tri rotacijske prostostne stopnje). Molekula O_2 ima tako eno lastno nihanje z eno lastno frekvenco, molekula H_2O pa ima tri lastna nihanja in tri ustrezne lastne frekvence nihanja (sl. 2.53). Ni naključje, da so mnoge makroskopske lastnosti snovi tesno povezane z lastnimi nihanji molekul, ki snov sestavljajo. Molekula vode n. pr. dobro absorbira infrardečo svetlobo, saj so vse tri njene lastne frekvence v področju frekvenc infrardeče svetlobe.

Pri opisu sestavljenega nihanja nas velikokrat zanima, s kolikšnim deležem so pri nihanju udeležena posamezna lastna nihanja. Podatek o tem nam da spekter nihanja, diagram, v katerem narišemo velikost amplitud pri posameznih lastnih krožnih frekvencah nihala. Tako imenovani energijski spekter pa nam podaja energijo, ki jo pri nihanju nihala prispeva posamezno lastno nihanje. Celotna energija nihanja je namreč enaka vsoti energij, ki jih pripišemo posameznim lastnim nihanjem.

Nihalo ima lahko tudi neskončno stopenj prostosti. Primer takega nihala je struna. Vsak del strune predstavlja neodvisno stopnjo prostosti. Zato je tudi število lastnih frekvenc strune neskončno. Lastne frekvence nihanja strune so mnogokratniki najnižje, t.j. osnovne frekvence strune. (Več o tem bomo izvedeli v poglavju Valovanje.) Primer spektra strune je prikazan na sliki 2.54.



Slika 2.53: Molekula vode ima tri lastna nihanja. Lastni frekvenci prvega in drugega lastnega nihanja sta približno 110 THz, lastna frekvenca zadnjega pa je približno pol manjša. Poljubno gibanje molekule vode je mogoče sestaviti kot translacijo težišča molekule, rotacijo molekule ter vsoto treh lastnih nihanj molekule.



Slika 2.54: Spekter strune. V spektru nihanja strune je neskončno število lastnih frekvenc, ki pa so vse mnogokratnih osnovne lastne frekvence strune ω_0 .