10 Časovna odvisnost napetosti v vezjih s kondenzatorji in upori

Pri tej vaji se bomo seznanili z eksponentnimi odvisnostmi in določili konstante časovnih odvisnosti napetosti v dveh sistemih s kondenzatorji in upori.

10.1 Eksponentne odvisnosti

Pri matematični analizi bioloških sistemov se pogosto srečamo s količinami, ki se s časom spreminjajo tako, da je hitrost spreminjanja premo sorazmerna velikosti količine same, *

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \pm ky \, , \tag{10.1}$$

kjer je y spremenljiva količina, $\mathrm{d}y$ njena sprememba v časovnem intervalu $\mathrm{d}t$, k pa pozitivna sorazmernostna konstanta. Pri pozitivnem y v primeru, ko upoštevamo predznak $+$, količina y s časom raste, v primeru, ko upoštevamo predznak $-$, pa količina y s časom pada. Da rešimo enačbo (10.1), jo preuredimo tako, da dobimo spremenljivki y in t vsako na svoji strani enačbe, in integriramo na levi strani od neke začetne vrednosti $y(0)$ do neke končne vrednosti $y(t)$, na desni strani pa od časa $t = 0$ do nekega končnega časa t.

$$\int_{y(0)}^{y(t)} \frac{\mathrm{d}y}{y} = \pm \int_0^t k\mathrm{d}t \, . \tag{10.2}$$

Dobimo

$$\ln \frac{y(t)}{y(0)} = \pm kt \, , \tag{10.3}$$

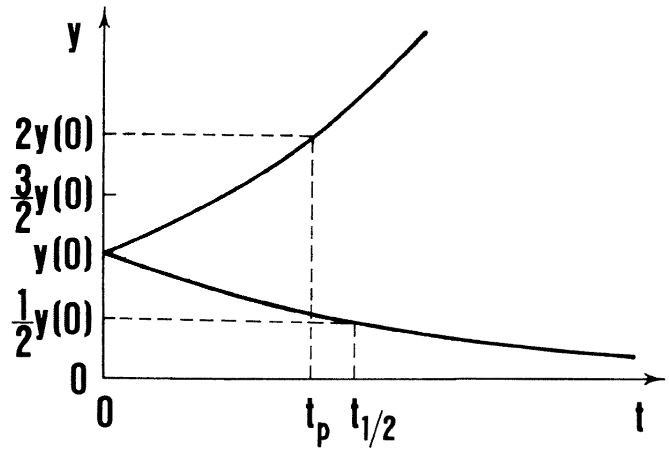
kjer smo upoštevali, da je $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln \frac{b}{a}$. Če enačbo (10.3) antilogaritmiramo, dobimo eksponentno spreminjanje y s t (slika 10.1),

$$y(t) = y(0)\mathrm{e}^{\pm kt} \, . \tag{10.4}$$

Od velikosti konstante k je odvisno, kako hitro se spreminja količina y, zato konstanto k imenujemo hitrostna konstanta. Enota za hitrostno konstanto je 1/s.

Slika 10.1 prikazuje funkcijo $y(t)$, ki je podana z enačbo (10.4). V primeru eksponentne rasti funkcija $y(t)$ s časom narašča preko vseh meja, v primeru eksponentnega padanja pa se s časom asimptotsko približuje vrednosti 0.

*Zgledi za takšno spreminjanje so časovno spreminjanje predelka (stran 14), absorpcija svetlobe (stran 16) in absorpcija žarkov γ (stran 131)



Slika 10.1: *Količina y se eksponentno spreminja s časom. Nakazana sta podvojitveni čas pri eksponentni rasti in razpolovni čas pri eksponentnem padanju. Značilno za takšne spremembe je, da se količina y v enakih časovnih intervalih spremeni za isti faktor.*

V primeru eksponentne rasti vpeljemo podvojitveni čas t_p. To je čas, pri katerem se vrednost količine y podvoji. Čas t_p lahko določimo iz pogoja, da količina y pri tem času zavzame dvakratno začetno vrednost, $y(t_\mathrm{p}) = 2y(0)$. Iz enačbe (10.3) sledi

$$\ln 2 = kt_\mathrm{p} \, . \tag{10.5}$$

Iz enačbe (10.5) izrazimo t_p,

$$t_p = \frac{\ln 2}{k} \, . \tag{10.6}$$

V primeru eksponentnega padanja vpeljemo razpolovni čas $t_{1/2}$. To je čas, pri katerem se vrednost količine y razpolovi. Čas $t_{1/2}$ lahko določimo iz pogoja, da količina y pri tem času zavzame polovico začetne vrednosti, $y(t_{1/2}) = \frac{1}{2}y(0)$. Iz enačbe (10.3) sledi

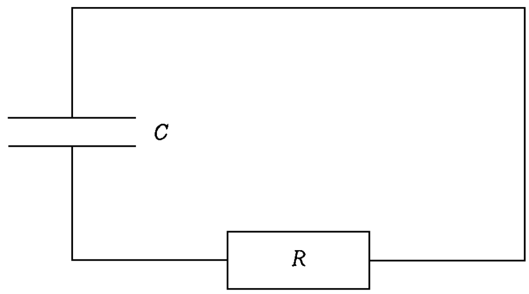
$$\ln \frac{1}{2} = -kt_{1/2} \, . \tag{10.7}$$

Iz enačbe (10.7) izrazimo $t_{1/2}$,

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k} \, . \tag{10.8}$$

Primer eksponentne rasti je spreminjanje števila celic v celični kulturi. Za ta sistem velja $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = aN$, kjer je N število celic, konstanta a pa delež celic, ki se razdele na časovno enoto. Ker je ta zveza analogna enačbi (10.1), iz enačbe (10.6) sledi, da je podvojitveni čas za število celic enak $t_\mathrm{p} = \frac{\ln 2}{a}$.

Primera eksponentnega padanja sta spreminjanje koncentracije sledila c pri odtekanju sledila iz predelka s konstantnim pretokom topila (vaja "Preučevanje predeljenih sistemov s sledilnimi metodami"), kjer velja $\mathrm{d}c/\mathrm{d}t = -\kappa c$, in spreminjanje števila radioaktivnih jeder N zaradi naključnih razpadov (vaja "Radioaktivnost"), kjer velja $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N$. Pri tem sta κ in λ pozitivni konstanti.



Slika 10.2: *Shema vezja pri praznenju kondenzatorja.*

10.2 Praznjenje kondenzatorja skozi upor

Obravnavamo sistem, v katerem sta vezana kondenzator s kapaciteto C in upor z upornostjo R (slika 10.2). Na kondenzatorju je v času $t = 0$ naboj $e(0)$. Če je sistem prepuščen sam sebi, začne naboj odtekati s kondenzatorja. Naboj na kondenzatorju je v vsakem času t sorazmeren napetosti na kondenzatorju $U(t)$

$$e(t) = CU(t) \; . \tag{10.9}$$

Kondenzator je izvor napetosti, padec napetosti pa imamo na uporu. Padec napetosti na uporu opišemo z Ohmovim zakonom, tako da za tokovni krog velja

$$U(t) - RI(t) = 0 \; . \tag{10.10}$$

Izrazimo $U(t)$ iz enačbe (10.10), jo vstavimo v enačbo (10.9), in izrazimo tok

$$I(t) = \frac{e(t)}{RC} \; . \tag{10.11}$$

Upoštevamo tudi, da je tok količina naboja, ki na časovno enoto odteče s kondenzatorja,

$$I(t) = -\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} \; , \tag{10.12}$$

kjer predznak minus označuje, da se naboj na kondenzatorju s časom zmanjšuje.

Združimo enačbi (10.11) in (10.12), dobimo

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = -\frac{e}{RC} \; , \tag{10.13}$$

kjer je $\frac{1}{RC}$ hitrostna konstanta vezja. Vpeljemo karakteristični čas praznjenja kondenzatorja τ,

$$\tau = RC \; . \tag{10.14}$$

Enačba (10.13) je analogna enačbi (10.4). Po zgoraj opisanem postopku dobimo rešitev

$$e(t) = e(0)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \; . \tag{10.15}$$

Naboj na kondenzatorju torej s časom eksponentno pada. Pravimo, da se kondenzator prazni. Če je τ majhen, se kondenzator hitreje prazni, kot če je τ velik. S primerjavo enačb (10.4) in (10.15) ter (10.8) in (10.14) pa dobimo, da je $t_{1/2} = \ln(2)RC$.

Iz enačb (10.9) in (10.10) z upoštevanjem enačbe (10.15) dobimo, da tudi napetost in tok eksponentno padata

$$U = U(0)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \;, \tag{10.16}$$

$$I = I(0)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \;, \tag{10.17}$$

kjer je $U(0) = \frac{e(0)}{C}$ in $I(0) = \frac{e(0)}{\tau}$.

Naloga: 1. Določite karakteristični čas praznjenja kondenzatorja τ.

Potrebščine: kondenzator

upor

izvor enosmerne napetosti (usmernik)

pretikalo

digitalni voltmeter

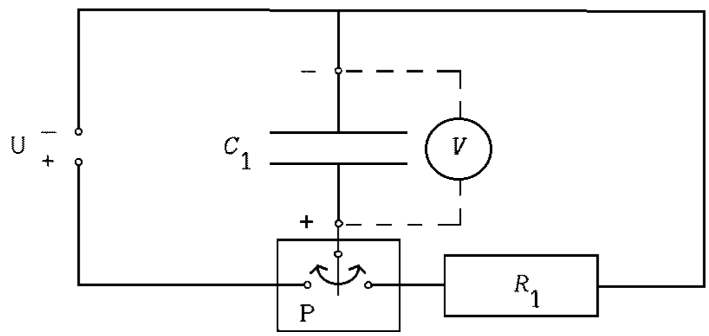
štoparica

vezne žice

Izvedba

1) Zvežite elemente po shemi 10.3. Upoštevajte, da kontakti rdeče barve ustrezajo pozitivnim polom, kontakti črne barve pa ustrezajo negativnim polom. Za lažjo vezavo vzemite tudi vezne žice rdeče oziroma črne barve. Izberite upor R_1, ki je priključen na sive kontakte. Pravilnost vezja preveri vodja vaj. Zatem priključite sistem na vir napetosti. Najprej samo opazujte, kako se napetost spreminja s časom, da dobite občutek za to, kako hitre so spremembe, Postavite pretikalo v položaj "polnjenje", da se kondenzator nabije na napetost $U(0)$, ki je približno 12 V, nato pa v položaj "praznjenje", in na voltmetru opazujte padanje napetosti s časom. Vidite lahko, da se v začetku napetost hitro spreminja s časom, kar pomeni, da boste morali v začetku meritve dobro uskladiti odčitavanje napetosti z voltmetra in časa s štoparice ter zapisovanje v protokol.

   Pripravite si tabelo za zapisovanje vrednosti napetosti in časa. V tabeli zapišite izbrane vrednosti napetosti, odčitavali pa boste čas, v katerem doseže napetost te vrednosti. Pri večjih napetostih (do približno 8 V) odčitavajte v razmiku 2 V, pri manjših napetostih pa v razmiku 1 V. Merite do približno 2 V. Ko ste pripravljeni za merjenje, pretaknite pretikalo v položaj "polnjenje", da se kondenzator spet nabije na



Slika 10.3: *Shema vezja pri merjenju (1. naloga). Simbol U označuje izvor enosmerne napetosti, simbol P označuje pretikalo, simbol V pa voltmeter.*

napetost $U(0)$, nato pa hkrati s sproženjem štoparice v položaj "praznjenje". Celotno meritev opravite trikrat.

Iz odvisnosti $U(t)$ lahko določimo hitrostno konstanto praznjenja kondenzatorja tako, da ugotovimo, pri kateri vrednosti karakterističnega časa τ eksponentna funkcija (izraz 10.16) najbolj ustreza meritvam. Čas τ najlažje določimo tako, da izraz (10.16) na obeh straneh logaritmiramo. Tako dobimo premico

$$\ln(U(t)/V) = \ln(U(0)/V) - \frac{t}{\tau} \,, \tag{10.18}$$

kjer je V referenčna napetost (npr. 1 V). Naklonski koeficient te premice je enak

$$k = -\frac{1}{\tau} \,. \tag{10.19}$$

Izdelajte diagram, v katerega na absciso nanesete izmerjene povprečne čase, na ordinato pa ustrezne vrednosti logaritma napetosti. Narišite tudi premico, ki se tem meritvam najbolj prilega in določite naklonski koeficient te premice,

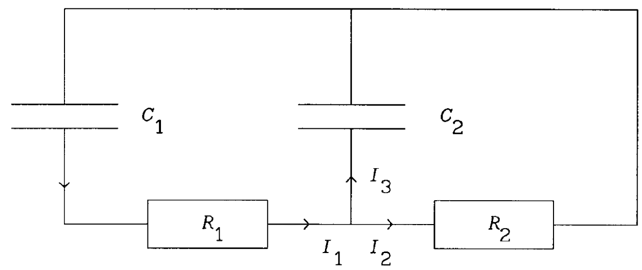
$$k = \frac{\ln(U(t_2)/V) - \ln(U(t_1)/V)}{t_2 - t_1} \,, \tag{10.20}$$

kjer sta t_2 in t_1 časa, ki ustrezata dvema izbranima točkama na premici. Iz enačbe (10.19) potem sledi

$$\tau = -\frac{1}{k} \,. \tag{10.21}$$

10.3 Časovne odvisnosti napetosti v vezju z dvema kondenzatorjema in dvema uporoma

Obravnavamo sistem, v katerem sta vezana kondenzatorja s kapacitetama C_1 in C_2 in upora z upornostma R_1 in R_2 (slika 10.4).



Slika 10.4: *Shema vezja.*

Na enem izmed kondenzatorjev (naj bo to kondenzator s kapaciteto C_1) je v času $t = 0$ napetost $U_1(0)$ in naboj $e_1(0)$, drugi kondenzator pa je takrat prazen, tako da je $e_2(0) = 0$ in $U_2(0) = 0$. Če je ta sistem prepuščen sam sebi, se začne kondenzator C_1 prazniti, kondenzator C_2 pa polniti. Po daljšem času se oba kondenzatorja praznita.

Upoštevamo, da je vsota napetosti vseh izvorov in vseh padcev napetosti v zaključenem tokovnem krogu enaka 0. V vezju (slika 10.4) izberemo dva zaključena tokovna kroga. Prvega sestavlja kondenzator C_1 in oba upora, drugega pa oba kondenzatorja in upor R_1. Za prvi krog velja

$$U_1 - I_1R_1 - I_2R_2 = 0 \ , \tag{10.22}$$

za drugi krog pa velja

$$U_1 - I_1R_1 - U_2 = 0 \ . \tag{10.23}$$

Upoštevamo tudi, da je vsota vseh tokov, ki pritekajo v neko razvejišče enaka vsoti vseh tokov, ki odtekajo iz tega razvejišča. V našem primeru velja

$$I_1 = I_2 + I_3 \ . \tag{10.24}$$

Za kondenzator C_1 velja

$$e_1(t) = C_1U_1(t) \ , \tag{10.25}$$

kjer sta e_1 in U_1 ustrezna naboj in napetost na kondenzatorju C_1. Če izraz (10.25) odvajamo in upoštevamo zvezo med nabojem in tokom, ki ustreza enačbi (10.12), dobimo

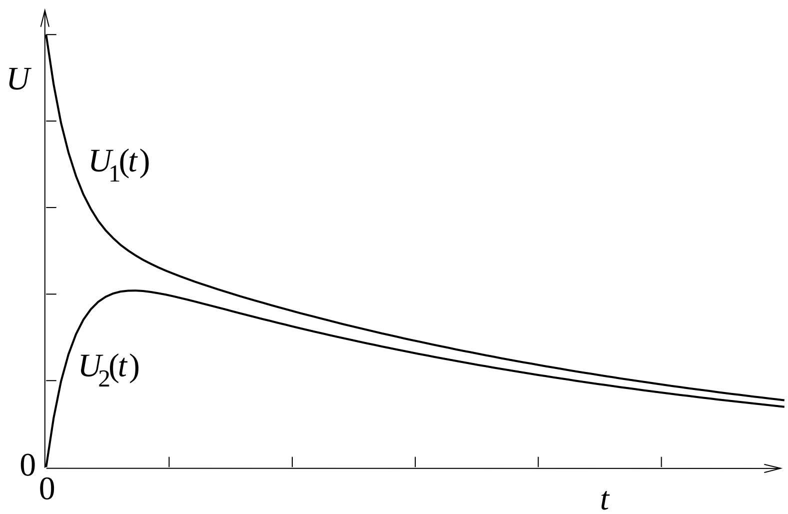
$$I_1(t) = -C_1\frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}t} \ . \tag{10.26}$$

Tok I_1 teče v tistem delu tokovnega kroga, ki vsebuje samo kondenzator C_1 (slika 10.4). Podobno velja za kondenzator C_2

$$e_2(t) = C_2U_2(t) \ , \tag{10.27}$$

in

$$I_3(t) = C_2\frac{\mathrm{d}U_2}{\mathrm{d}t} \ . \tag{10.28}$$



Slika 10.5: *Spreminjanje napetosti s časom na obeh kondenzatorjih. Kapaciteti obeh kondenzatorjev sta enaki.*

Tok I_3 teče v tistem delu tokovnega kroga, ki vsebuje samo kondenzator C_2 (slika 10.4).

Iz enačb (10.22–10.28) po daljšem postopku, ki je prikazan v Dodatku na strani 98, izpeljemo diferencialno enačbo za U_1 in njeno rešitev, ki da časovni odvisnosti napetosti na obeh kondenzatorjih. Pri tem upoštevamo, da sta v našem primeru kapaciteti obeh kondenzatorjev enaki, $C_1 = C_2 = C$. Na kondenzatorju C_1 je

$$U_1(t) = A_1 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1}} + B_1 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_2}} \ , \tag{10.29}$$

na kondenzatorju C_2 pa je

$$U_2(t) = -A_2 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1}} + B_2 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_2}} \ , \tag{10.30}$$

kjer so A_1, B_1, A_2, B_2, τ_1 in τ_2 konstante. Medtem, ko sta τ_1 in τ_2 lastnost vezja, so A_1, A_2, B_1 in B_2 odvisne tudi od začetnih pogojev.

Odvisnost, ki jo lahko opišemo z dvema časovnima konstantama, imenujemo dvoeksponentna funkcija. V našem sistemu je pri $t = 0$ na kondenzatorju C_1 napetost $U_1(0)$, na kondenzatorju C_2 pa je takrat napetost 0. Iz enačb (10.29) in (10.30) sledi, da je

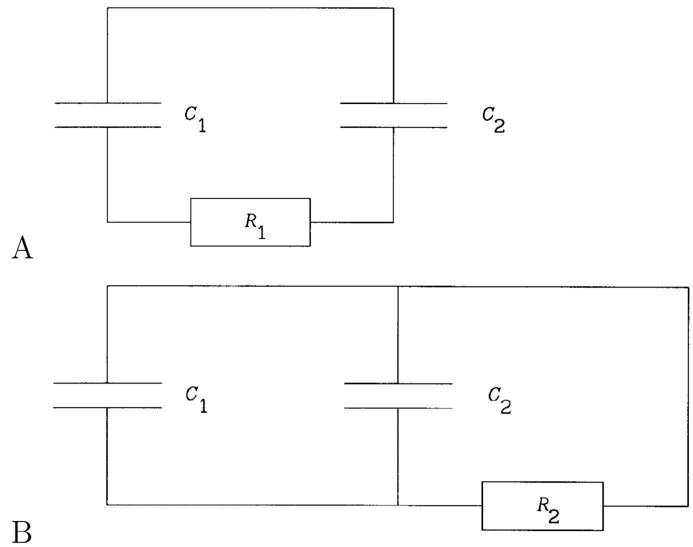
$$A_1 + B_1 = U_1(0) \ , \tag{10.31}$$

in

$$A_2 = B_2 \ . \tag{10.32}$$

Slika 10.5 prikazuje napetost na obeh kondenzatorjih U_1 in U_2 v odvisnosti od časa.

Ker sta upora R_1 in R_2 izbrana tako, da je R_1 veliko manjši kot R_2, in je zato τ_1 veliko manjši kot τ_2, lahko posebno preprosto opišemo sistem pri zelo kratkih in zelo dolgih časih. Pri zelo kratkih časih pride do znatnih časovnih sprememb v krogu, ki ga sestavljata oba



Slika 10.6: *Slika prikazuje efektivni vezji v limiti zelo kratkih časov (A) in v limiti zelo dolgih časov (B), $R_1 \ll R_2$.*

kondenzatorja in upor R_1 (slika 10.6 A). Ker sta v tem primeru kondenzatorja vezana zaporedno, je njuna skupna kapaciteta enaka $C/2$, konstanta τ_1 (enačba 10.14) pa je enaka $\tau_1 = R_1 C/2$. Pri zelo dolgih časih so časovne spremembe znatne le še v krogu, ki ga sestavljata oba kondenzatorja in upor R_2 (slika 10.6 B), padec napetosti na uporu R_1 pa je veliko manjši kot na uporu R_2. Ker sta v tem primeru kondenzatorja vezana vzporedno, je njuna skupna kapaciteta enaka $2C$, konstanta τ_2 (enačba 10.14) pa je enaka $\tau_2 = 2R_2C$. Pravilnost izrazov za τ_1 in τ_2 lahko preverimo tudi z upoštevanjem enačb (10.46) in (10.47), če predpostavimo, da je R_1 veliko manjši od R_2.

Naloga: 1. Določite konstante dvoeksponentne funkcije, ki opisuje spreminjanje napetosti na kondenzatorju C_1 s časom (A_1, B_1, τ_1 in τ_2) v sistemu dveh kondenzatorjev in dveh uporov.

Potrebščine: dva kondenzatorja

dva upora

izvor enosmerne napetosti (usmernik)

pretikalo

digitalni voltmeter

štoparica

vezne žice

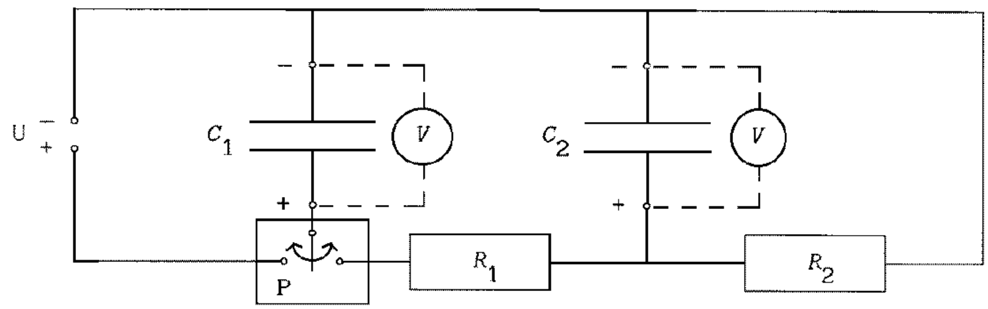
Izvedba

1) Zvežite elemente po shemi 10.7. V okviru te naloge boste merili spreminjanje napetosti s časom na obeh kondenzatorjih (na vsakem posebej), zato je voltmeter na shemi prikazan s črtkanimi črtami (za vsakega od obeh primerov). Najprej priključite voltmeter tako, da boste merili napetost na kondenzatorju C_1. Pazite, da je pred začetkom merjenja kondenzator C_2 prazen. To dosežete tako, da kondenzator C_2 kratko sklenete z eno izmed veznih žic, pri čemer mora biti pretikalo v srednjem položaju, ne pa v položajih "polnjenje" ali "praznjenje". Potem, ko je pravilnost vezja preveril vodja vaj, priključite sistem na vir napetosti. Podobno kot pri prvi nalogi, najprej samo opazujte spreminjanje napetosti s časom: postavite pretikalo v položaj "polnjenje", tako da se kondenzator nabije na napetost $U_1(0)$, ki je približno 12 V. Nato preklopite stikalo na položaj "praznjenje", in na voltmetru opazujte padanje napetosti s časom. Vidite, da v začetku (do približno 5 V) napetost zelo hitro pada, potem pa se padanje napetosti upočasni. To upoštevate, ko si pripravite tabelo za zapisovanje vrednosti napetosti in časa. V začetku (do približno 5 V), odčitavajte v razmiku 1 V, ko pa napetost pade pod približno 5 V, odčitavajte v razmiku 0,5 V. Merite do približno 2 V. Pred meritvijo izpraznite kondenzator C_2, postavite pretikalo v položaj "polnjenje", nato pa v položaj "praznjenje" in odčitavajte čase, ki ustrezajo izbranim vrednostim napetosti v tabeli. Meritev opravite enkrat.

   Potem prestavite voltmeter tako, da boste z njim merili napetost na kondenzatorju C_2. Izpraznite kondenzator C_2. Ponovno boste merili spreminjanje napetosti s časom. Postavite pretikalo v položaj "polnjenje", da se kondenzator C_1 nabije na napetost $U_1(0)$. Na voltmetru ne zaznate spremembe, ker je kondenzator C_2 prazen. Nato postavite pretikalo v položaj "praznjenje", in na voltmetru opazujte spreminjanje napetosti s časom. Vidite, da v začetku napetost hitro raste s časom. Potem ko napetost doseže približno 5 V se rast napetosti upočasni, ustavi in začne počasi padati. To upoštevate, ko si pripravite tabelo za zapisovanje vrednosti napetosti in časa. V začetku, ko bo napetost naraščala do približno 5 V, boste odčitavali v razmiku 1 V, ko pa bo napetost padala, pa boste odčitavali v razmiku 0,2 V. Zapišite si tudi največjo napetost. Merite do približno 2 V. Postavite pretikalo v srednji položaj in izpraznite kondenzator C_2. Postavite pretikalo v položaj "polnjenje", nato pa hkrati s sproženjem štoparice v položaj "praznjenje". Odčitavajte čase, ki ustrezajo izbranim vrednostim napetosti v tabeli. Meritev opravite le enkrat.

   Narišite diagram, kjer na absciso nanašate čas, na ordinato pa napetosti na kondenzatorjih C_1 in C_2.

   Karakteristična časa τ_1 in τ_2 določimo z analizo padanja napetosti na kondenzatorju C_1. Narišite diagram, kjer na absciso nanašate čas, na ordinato pa logaritem napetosti na kondenzatorju C_1, $\ln(U_1(t)/V)$. Rezultate lahko ponazorimo s primerom, ki je prikazan na sliki 10.8. Karakteristični čas počasnega dela padanja napetosti τ_2



Slika 10.7: *Shema vezja pri merjenju (2. naloga).*

določite iz naklona premice, ki jo dobite pri velikih časih (slika 10.8),

$$k = \frac{\ln(U_1(t_2)/V) - \ln(U_1(t_1)/V)}{t_2 - t_1} , \qquad (10.33)$$

kjer sta t_1 in t_2 izbrana časa (slika 10.8), B_1 pa iz odseka podaljška te premice na ordinati (slika 10.8).

Nato analizirajte še del, kjer napetost hitro pada. Hitro padajoči prispevek k celotni napetosti pri izmerjenih časih ($U_h(t)$) dobite, če odštejete od celotne napetosti ($U_1(t)$) počasno padajoči prispevek

$$U_h(t) = U_1(t) - B_1 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_2}} . \qquad (10.34)$$

Pri tem uporabite že določeni vrednosti B_1 in τ_2. Iz enačbe (10.29) sledi potem

$$U_h(t) = A_1 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1}} . \qquad (10.35)$$

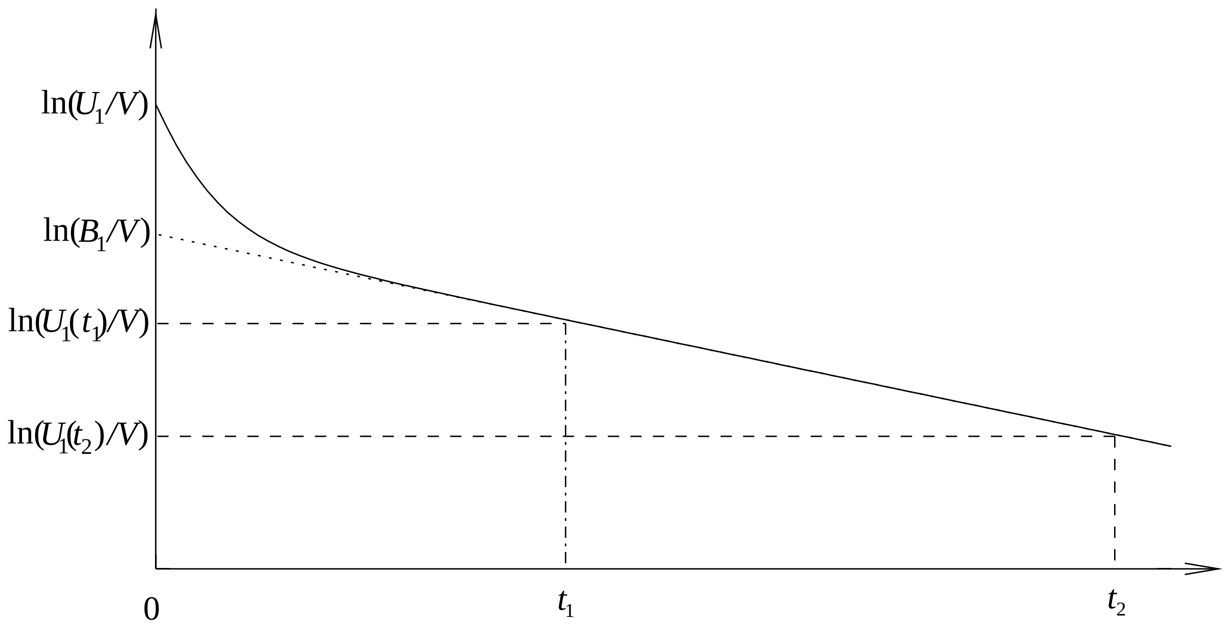
Če enačbo (10.35) logaritmiramo na obeh straneh, dobimo premico

$$\ln(U_h(t)/V) = \ln(A_1/V) - \frac{t}{\tau_1} . \qquad (10.36)$$

Narišite diagram logaritma hitro padajočega prispevka $\ln(U_h(t)/V) = \ln((U_1(t) - B_1 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_2}})/V)$ v odvisnosti od časa t: vrednosti napetosti $U_1(t)$ in ustreznih časov preberite s tabele meritev. Upoštevajte samo točke za dovolj majhne čase, pri katerih je argument logaritma pozitiven ($U_h(t)/V > 0$). Iz naklona premice, ki se najbolje prilega meritvam, določite konstanto τ_1, iz odseka premice na ordinati pa konstanto A_1.

10.4 Dodatek

V tem dodatku prikažemo reševanje sistema enačb (10.22)–(10.28). Postopek je na meji zahtev pri predmetu Biofizika, navajamo pa ga za tiste, ki jih zanima, kako iz sistema enačb (10.22)–(10.28) dobimo dvoeksponentno odvistnost napetosti na obeh kondenzatorjih.



Slika 10.8: *K določanju konstant dvoeksponentne funkcije.*

V enačbo (10.22) vstavimo za I_1 izraz (10.26), za I_2 pa izraz dobljen iz enačb (10.24) in (10.28), $I_2 = I_1 - C_2 \mathrm{d}U_2/\mathrm{d}t$,

$$U_1 + R_1 C_1 \frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}t} - R_2 (I_1 - C_2 \frac{\mathrm{d}U_2}{\mathrm{d}t}) = 0 \; . \tag{10.37}$$

Iz enačbe (10.23) izrazimo U_2 in upoštevamo za I_1 izraz (10.26),

$$U_2 = U_1 + R_1 C_1 \frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}t} \; . \tag{10.38}$$

Da dobimo odvod $\mathrm{d}U_2/\mathrm{d}t$, ki nastopa v enačbi (10.37), odvajamo izraz (10.38) po času,

$$\frac{\mathrm{d}U_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}t} + R_1 C_1 \frac{\mathrm{d}^2 U_1}{\mathrm{d}t^2} \; . \tag{10.39}$$

Dobljeni izraz vstavimo v enačbo (10.37) in enačbo uredimo,

$$R_1 C_1 R_2 C_2 \frac{\mathrm{d}^2 U_1}{\mathrm{d}t^2} + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1) \frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}t} + U_1 = 0 \; . \tag{10.40}$$

V našem primeru sta kapaciteti obeh kondenzatorjev med seboj enaki, $C_1 = C_2 = C$. Če to upoštevamo, enačba (10.40) preide v

$$R_1 R_2 C^2 \frac{\mathrm{d}^2 U_1}{\mathrm{d}t^2} + (R_1 + 2R_2) C \frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}t} + U_1 = 0 \; . \tag{10.41}$$

Dobimo diferencialno enačbo 2. reda za U_1. Podobno diferencialno enačbo dobimo tudi pri dušenem nihanju. Diferencialno enačbo (10.41) rešimo z nastavkom

$$U_1(t) = A_1 \mathrm{e}^{-t/\tau_1} + B_1 \mathrm{e}^{-t/\tau_2} \; , \tag{10.42}$$

kjer sta A_1 in B_1 konstanti. Izračunamo odvoda

$$\frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{A_1}{\tau_1}\mathrm{e}^{-t/\tau_1} - \frac{B_1}{\tau_2}\mathrm{e}^{-t/\tau_2} \tag{10.43}$$

in

$$\frac{\mathrm{d}^2U_1}{\mathrm{d}t^2} = \frac{A_1}{\tau_1^2}\mathrm{e}^{-t/\tau_1} + \frac{B_1}{\tau_2^2}\mathrm{e}^{-t/\tau_2} \ , \tag{10.44}$$

ter vstavimo nastavek (10.42) in odvoda (10.43)–(10.44) v enačbo (10.41). Da bi veljala enačba (10.41), morata biti izraz pred e^{-t/τ_1} in izraz pred e^{-t/τ_2} enaka 0. Iz teh dveh pogojev sledi, da je

$$R_1R_2C^2\frac{1}{\tau_{1,2}^2} - (R_1 + 2R_2)C\frac{1}{\tau_{1,2}} + 1 = 0 \ . \tag{10.45}$$

Dobimo dve realni rešitvi kvadratne enačbe (10.45). Eno pripišemo $1/\tau_1$, drugo pa $1/\tau_2$,

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{R_1 + 2R_2 + \sqrt{(R_1 + 2R_2)^2 - 4R_1R_2}}{2R_1R_2C} \ , \tag{10.46}$$

$$\frac{1}{\tau_2} = \frac{R_1 + 2R_2 - \sqrt{(R_1 + 2R_2)^2 - 4R_1R_2}}{2R_1R_2C} \ . \tag{10.47}$$

Odvisnost napetosti od časa na kondenzatorju C_2 dobimo, če izrazimo U_2 iz enačbe (10.38), in upoštevamo enačbi (10.42)–(10.43),

$$U_2(t) = A_1\mathrm{e}^{-t/\tau_1} + B_1\mathrm{e}^{-t/\tau_2} + R_1C\left(-\frac{A_1}{\tau_1}\mathrm{e}^{-t/\tau_1} - \frac{B_1}{\tau_2}\mathrm{e}^{-t/\tau_2}\right) \ . \tag{10.48}$$

Izraz (10.48) lahko zapišemo tudi kot

$$U_2(t) = B_2\mathrm{e}^{-t/\tau_2} - A_2\mathrm{e}^{-t/\tau_1} \ , \tag{10.49}$$

kjer je

$$A_2 = -A_1\left(1 - \frac{R_1C}{\tau_1}\right) \ , \tag{10.50}$$

in

$$B_2 = B_1\left(1 - \frac{R_1C}{\tau_2}\right) \ . \tag{10.51}$$

V našem sistemu je pri $t = 0$ na kondenzatorju C_1 napetost $U_1(0)$, na kondenzatorju C_2 pa je takrat napetost 0. Iz enačb (10.29) in (10.30) sledi, da veljata enačbi (10.31) in (10.32)

$$A_1 + B_1 = U_1(0) \ , \tag{10.52}$$

in

$$A_2 = B_2 \ . \tag{10.53}$$

Če vstavimo izraza (10.50)–(10.51) v pogoj (10.53), dobimo iz sistema (10.52)–(10.53)

$$A_1 = U_1(0)\frac{\dfrac{\tau_2}{R_1C} - 1}{\dfrac{\tau_2}{\tau_1} - 1} \ , \tag{10.54}$$

in

$$B_1 = U_1(0)\frac{\dfrac{\tau_1}{R_1C} - 1}{\dfrac{\tau_1}{\tau_2} - 1} \; . \tag{10.55}$$

Konstante sistema dveh kondenzatorjev in dveh uporov lahko torej določimo tudi, če poznamo vrednosti upora R_1, kapaciteto obeh kondenzatorjev C in začetno vrednost napetosti $U_1(0)$. Potem iz enačb (10.46)–(10.47) določimo τ_1 in τ_2, iz enačb (10.54)–(10.55) A_1 in B_1, iz enačb (10.50)–(10.51) pa A_2 in B_2.

Če je R_1 veliko manjši od R_2, sledi iz enačbe (10.46), da je $\tau_1 = R_1C/2$, iz enačbe (10.47), da je $\tau_2 = 2R_2C$, ter iz enačb (10.50)–(10.55), da je $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = U_1(0)/2$.