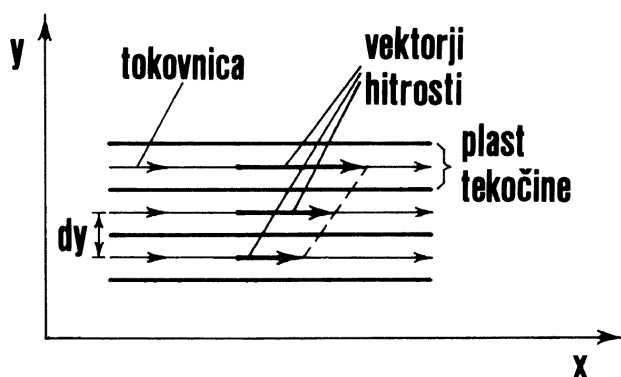


3 Notranje trenje tekočin

Pri tej vaji se seznanimo z nekaterimi pojavi v tekočinah, na katere vpliva njihova viskoznost.

Iz vsakdanjega življenja vemo, da nekatere tekočine tečejo “lažje” kot druge - tako npr. med teče težje kot olje, ta pa težje kot voda. Lastnost tekočine, ki določa, kako “lahko” oz. “težko” teče tekočina, je *viskoznost*. Bolj kot je tekočina viskozna, težje teče. V splošnem je opis toka tekočine zapleten, zato tudi stroga fizikalna definicija viskoznosti ni preprosta. V mislih razdelimo tekočino na plasti (slika 3.1). Če tekočina teče tako, da se plasti urejeno gibljejo druga ob drugi, takemu toku pravimo *laminarni tok* (v nasprotju s turbulentnim tokom, v katerem se ustvarjajo vrtinci).



Slika 3.1: Prerez toka tekočine. V prikazanem primeru tekočino razdelimo na posamezne plasti, ki se vse gibljejo v smeri osi x , velikost hitrosti pa se od plasti do plasti spreminja v smeri osi y .

Gibanje tekočine opišemo, če podamo velikost in smer hitrosti za vsako plast tekočine. Hitrost včasih ponazorimo s tokovnicami. Tokovnica je črta, ki je tangenta na vektor hitrosti vzdolž plasti. Če se hitrost ne spreminja s časom, pravimo, da je tok stacionaren.

V primeru, ko so velikosti hitrosti sosednjih plasti različne, zaradi trenja počasnejše plasti zadržujejo hitrejša, te pa vlečejo počasnejša. Pravimo, da delujejo med plastmi strižne sile. S poskusi so ugotovili, da je velikost strižne sile sorazmerna površini stične ploskve med plastmi S in količini dv/dy , ki opisuje, kako se spreminja hitrost od plasti do plasti pravokotno na tokovnice,

$$F = \eta S \frac{dv}{dy} . \quad (3.1)$$

Sorazmernostnemu koeficientu η pravimo *viskoznost tekočine*. Enota viskoznosti je $\text{kg m}^{-1}\text{s}^{-1}$ oziroma $\text{Pa}\cdot\text{s}$. Še opozorilo: **pojma viskoznost ne smemo zamenjevati s pojmom gostota**, saj slednji pove le maso določenega volumna tekočine in nima neposredne povezave z gibanjem tekočine.

Tabela 3.1: *Približne viskoznosti nekaterih tekočin pri sobni temperaturi.*

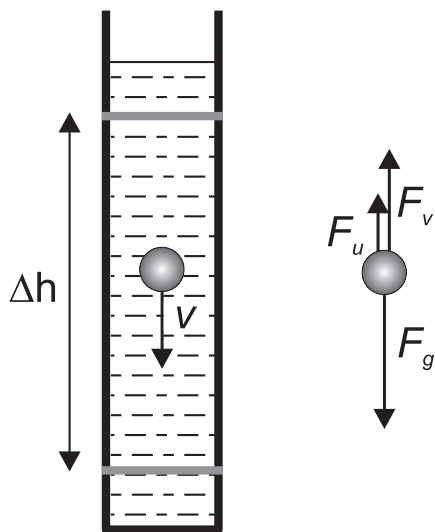
tekočina	zrak	voda	kri	oljčno olje	med
η [10^{-3} Pa·s]	0,02	1	4	100	20000

3.1 Sedimentacija

Ena od osnovnih krvnih preiskav je test sedimentacije eritrocitov. Pri njem merijo, kako hitro se v mm/h posedajo eritrociti v krvni plazmi. Hitrost sedimentacije je pri mnogih bolezenskih stanjih povečana, zato lahko s testom sedimentacije nespecifično ugotovljamo prisotnost bolezni. Za lažje razumevanje sedimentacije, si oglejmo, kaj se dogaja s kroglico, ki pada v viskozni tekočini (slika 3.2). Ko kroglico spustimo v tekočino, nanjo delujeta sila teže F_g navzdol in sila vzgona F_v navzgor. Če je kroglica gostejša od tekočine, kaže rezultanta sil na kroglico navzdol in kroglica pada pospešeno. Nanjo tako začne delovati tudi sila upora F_u , ki nasprotuje gibanju in torej deluje navzgor. Če je hitrost kroglice dovolj majhna, da se v tekočini ne tvorijo vrtinci, je relativno gibanje tekočine glede na kroglico laminarno. V takem primeru velja *linearni zakon*, po katerem je sila upora sorazmerna hitrosti gibanja. Za kroglico se linearni zakon upora zapiše v obliki Stokesove enačbe:

$$F_u = 6\pi r\eta v, \quad (3.2)$$

kjer je r polmer kroglice, η viskoznost tekočine in v velikost hitrosti kroglice.



Slika 3.2: *Shematski prikaz padanja kroglice v viskozni tekočini. Tekočina je v merilnem valju, na katerem sta oznaki, med katerima izmerimo čas padanja kroglice. Kroglica med oznakama pada z enakomerno hitrostjo v . Ravnovesje sil določajo sila teže F_g , sila vzgona F_v ter sila upora F_u .*

Sili teže in vzgona se ne spreminjata, sila upora pa narašča z naraščanjem hitrosti gibanja kroglice, zato se rezultanta sil na kroglico manjša. Pri določeni hitrosti padanja kroglice bo tako rezultanta sil enaka nič in hitrost se kroglici ne bo več spreminjala. Po

začetku gibanja se kroglici torej hitrost nekaj časa povečuje vse dokler ne doseže končne hitrosti padanja. Ravnovesje sil pri enakomernem gibanju kroglice izrazimo z enačbo

$$F_g - F_v - F_u = 0 . \quad (3.3)$$

Upoštevamo, da je teža kroglice

$$F_g = mg = \rho_k \frac{4\pi r^3}{3} g , \quad (3.4)$$

kjer je ρ_k gostota kroglice in g težni pospešek, in da je vzgon

$$F_v = \rho_0 \cdot \frac{4\pi r^3}{3} g , \quad (3.5)$$

kjer je ρ_0 gostota tekočine.

Končno hitrost, ki jo pri padanju doseže kroglica, lahko tako izrazimo iz enačbe za ravnovesje sil (3.3), pri čemer vanjo vstavimo izraze za sile (3.2), (3.4) ter (3.5):

$$v = \frac{2g(\rho_k - \rho_0)r^2}{9\eta} . \quad (3.6)$$

Po pričakovanju je končna hitrost obratno sorazmerna viskoznosti (večja kot je viskoznost, večje bo trenje), zanimivo pa je, da je končna hitrost sorazmerna kvadratu polmera kroglice! Ravno ta pojav se uporablja pri testu sedimentacije eritrocitov v krvni plazmi. Pri nekaterih bolezenskih stanjih se eritrociti namreč sprijemajo v skupke. Gostota takega skupka je seveda enaka gostoti posameznih eritrocitov, efektivni polmer skupka pa je večji kot efektivni polmer posameznega eritrocita. Skupki eritrocitov zato tonejo hitreje kot prosti eritrociti, kar se pozna kot povečana sedimentacija.

V razmislek: kako pa je hitrost padanja kroglice odvisna od njenega radija, če kroglica pada z veliko hitrostjo in v tekočini za njo nastajajo vrtinci? V takem primeru ne velja več linearni zakon upora (enačba 3.2) pač pa kvadratni zakon upora, po katerem je sila upora $F_u = \frac{1}{2}C\rho_0v^2\pi r^2$.

- Naloga:**
1. Izmerite hitrost padanja kroglic različnih velikosti v tekočini.
 2. Preverite odvisnost hitrosti padanja od polmera kroglice.
 3. Določite viskoznost tekočine, v kateri padajo kroglice.

Potrebščine: kljunasto merilo
 z viskozno tekočino napolnjen valj
 steklene kroglice različnih polmerov
 pinceta
 štoparica

Izvedba

- 1) V merilnem valju je tekočina z veliko viskoznostjo, zraven pa so kroglice različnih velikosti. S pinceto vzemite po eno kroglico vsake velikosti in ji s kljunastim merilom izmerite premer $2r$. Premer manjših kroglic je najlažje izmeriti, če jih položite na priložen pladenj.

Vsako kroglico posebej spustite v tekočino in izmerite čas Δt , v katerem pade kroglica od zgornje do spodnje oznake na merilnem valju. Izmerite tudi razdaljo med oznakama (Δh). Opozorilo: kroglico spustite tako, da bo potovala čim bolj po sredini merilnega valja. Če kroglica zaradi površinske napetosti ostane na gladini tekočine in ne potone, jo potopite s priloženo paličico. Ko določate trenutek, v katerem kroglica pade mimo oznake na merilnem valju, glejte na kroglico v vodoravni smeri, saj lahko v nasprotnem primeru zaradi paralakse pride do napake pri meritvi.

Kroglica pada v začetku pospešeno, potem pa se vzpostavi ravnovesje sil, tako da med oznakama pada enakomerno. Izračunajte hitrost padanja kroglice

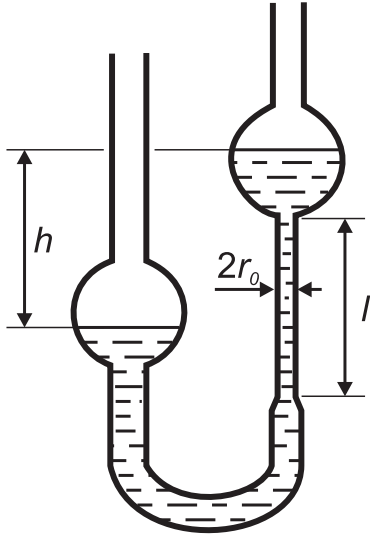
$$v = \frac{\Delta h}{\Delta t}. \quad (3.7)$$

- 2) Narišite diagram hitrosti padanja v odvisnosti od kvadrata radija kroglice. Če je hitrost padanja res odvisna od kvadrata radija, kot to napoveduje enačba (3.6), ležijo točke na diagramu na premici.
- 3) Ob navodilih za vajo sta podani gostoti tekočine ρ_0 in kroglic ρ_k . Izmerite naklonski koeficient premice k ter iz njega izračunajte viskoznost tekočine. Pri tem upoštevajte enačbo (3.6) iz katere vidimo, da je naklonski koeficient premice enak $k = \frac{2g(\rho_k - \rho_0)}{9\eta}$.

3.2 Določanje viskoznosti z merjenjem toka tekočine skozi Ostwaldov viskozimeter

Ostwaldov viskozimeter je steklena cevka v obliki črke U, ki je sestavljena iz delov z različnimi preseki (slika 3.3). Če višini gladin tekočine na obeh straneh viskozimetra nista enaki, tekočina teče proti strani, kjer je gladina nižja. Ker je en odsek viskozimetra zelo ozek in ima zato velik viskozni upor (na sliki ima ta odsek dolžino l in polmer r_0), je pretok tekočine skozi viskozimeter majhen in izenačevanje poteka počasi — bolj kot je tekočina v viskozimetru viskozna, počasneje se izenačujeta gladini. Z merjenjem hitrosti pretoka tekočine skozi viskozimeter lahko torej določimo njeno viskoznost.

Delovanje viskozimetra si pogledjmo še bolj podrobno. Tlak, ki poganja tok tekočine skozi viskozimeter, je po velikosti enak hidrostatskemu tlaku zaradi različno visokih gladin, $\Delta p = \rho gh$, kjer je ρ gostota tekočine, g težni pospešek, h pa razlika višin gladin (do tega zaključka pridemo z ugotovitvijo, da bi se tok tekočine skozi viskozimeter ustavil, če bi na nižjo gladino delovali s tlakom ρgh). Ozki odsek viskozimetra ima veliko manjši radij



Slika 3.3: Shematski prikaz Ostwaldovega viskozimetra. Ključen del viskozimetra je zelo ozka cevka z dolžino l in polmerom r_0 .

kot ostali deli, zato lahko viskozno upornost ostalih delov zanemarimo. Po Poiseuille-Hagenovem zakonu bo torej med pretokom skozi viskozimeter ($\Phi_v = \frac{dV}{dt}$) in tlačno razliko ($\Delta p = \rho gh$) veljala zveza

$$\Phi_v = \frac{\pi r_0^4}{8\eta l} \rho gh, \quad (3.8)$$

kjer je η viskoznost tekočine, v ulomku $\frac{8\eta l}{\pi r_0^4}$ pa prepoznamo izraz za viskozno upornost ozkega odseka viskozimetra. Vidimo, da je velikost pretoka sorazmerna gostoti tekočine ρ in obratno sorazmerna njeni viskoznosti η , vsi ostali parametri v enačbi (3.8) pa niso odvisni od lastnosti tekočine temveč le od geometrije viskozimetra ter volumna tekočine v njem. Po razmisleku lahko tako pridemo do zaključka, da je čas t , v katerem se pri danih pogojih pretoči določen volumen tekočine V , sorazmeren viskoznosti tekočine in obratno sorazmeren njeni gostoti:

$$t = k \frac{\eta}{\rho}, \quad (3.9)$$

kjer je k konstanta, ki je določena z geometrijo viskozimetra ter pretočenim volumenom V (njeno vrednost bi lahko izračunali z integralom $k = \frac{8l}{\pi r_0^4 g} \int_0^V \frac{dV}{h}$).

Če vrednosti konstante k za Ostwaldov viskozimeter ne poznamo, si lahko pomagamo s primerjalno meritvijo, pri kateri čas pretoka tekočine z neznanom viskoznostjo primerjamo s časom pretoka tekočine z znano viskoznostjo. Če pri tem pazimo, da v obeh primerih pod enakimi pogoji pretočimo enako količino volumna, bo tudi vrednost konstante k iz enačbe (3.9) v obeh primerih enaka:

$$k = \frac{t\rho}{\eta} = \frac{t_0\rho_0}{\eta_0}, \quad (3.10)$$

kjer so t , ρ in η čas pretoka, gostota in viskoznost tekočine z neznanom viskoznostjo, t_0 , ρ_0 in η_0 pa čas pretoka, gostota in viskoznost tekočine z znano viskoznostjo. Neznano viskoznost

lahko tako iz zgornje enačbe izrazimo kot:

$$\eta = \eta_0 \frac{t}{t_0} \frac{\rho}{\rho_0}. \quad (3.11)$$

Naloga: 1. Določite viskoznost alkohola.

Potrebščine: Ostwaldov viskozimeter

prižema za pritrditev viskozimetra

steklenica z vodo, katere viskoznost je podana pri vaji

steklenica z alkoholom z neznano viskoznostjo

pipeta oz. merilni valj

gumijasta žogica za pihanje

štoparica

termometer za določanje sobne temperature

Izvedba

- 1) Viskoznost vode je podana pri vaji. Viskoznost alkohola bomo določili s primerjavo časov pretoka alkohola in vode.

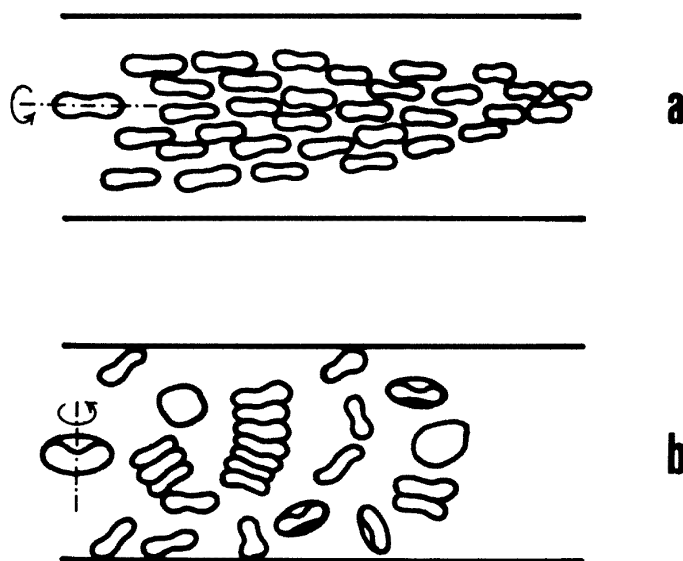
Odmerite določen volumen tekočine (zahtevana količina tekočine je označena pri vaji) ter ga vlijete v viskozimeter. Nad ozkim delom cevi je bučka, ki je zgoraj in spodaj označena. S pomočjo gumijaste žogice črpajte zrak v nižji del viskozimetra, vse dokler se tekočina na drugem delu ne dvigne preko zgornjega znamenja na bučki (natančna navodila za črpanje so na sliki pri vaji). Pri tem pazite, da v viskozimetru ne bo zračnih mehurčkov! Ko žogico odmaknete, začne gladina tekočine v bučki padati. Izmerite čas, v katerem se gladina zniža od zgornjega znamenja do spodnjega znamenja na bučki.

Najprej opravite tri meritve časa pretoka za alkohol t in nato še tri meritve časa pretoka za vodo t_0 . Preden začnete meriti z vodo, alkohol odlijte nazaj v stekleničko ter viskozimeter dobro osušite. Pazite, da v viskozimeter v obeh primerih vlijete enako količino tekočine! Po končani meritvi z vodo, jo odlijte nazaj v stekleničko.

Gostota vode ρ_0 in alkohola ρ ter viskoznost vode η_0 so podane pri vaji (pri tem upoštevajte sobno temperaturo, ki jo odčitata s termometra na steni laboratorija). Viskoznost alkohola izračunajte z uporabo enačbe (3.11).

V razmislek: ali obstaja med gostoto tekočine in njeno viskoznostjo kakšna povezava, so na primer gostejše tekočine tudi bolj viskozne? Primerjajte npr. gostote in viskoznosti medu, alkohola in vode.

3.3 Dodatek. Uporaba mehanike tekočin pri opisu pretakanja krvi po žilah



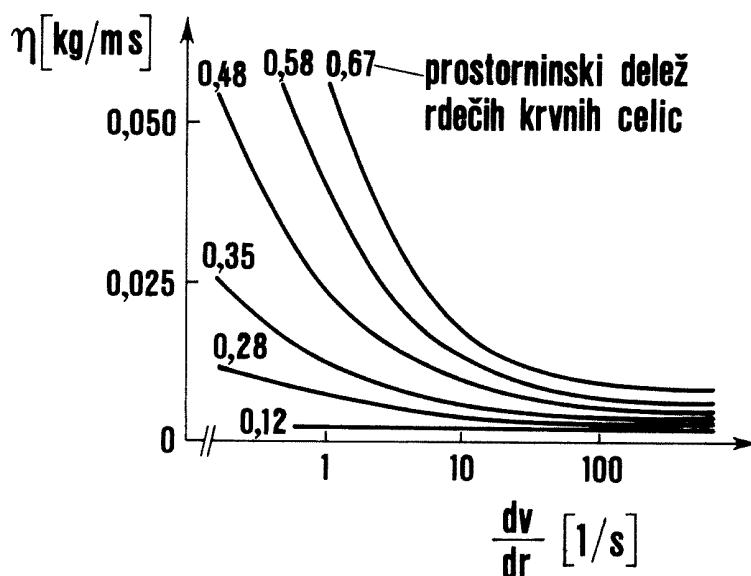
Slika 3.4: Prikaz gibanja rdečih krvnih celic v žili pri veliki hitrosti krvi (a) in pri majhni hitrosti krvi (b). Vidimo, da pri majhni hitrosti krvi pride do nastajanja skupkov rdečih krvnih celic. V obeh primerih sta označeni simetrijski osi eritrocitov.

Krvni obtok je zaključen sistem, katerega glavna naloga je, da prinaša tkivom hranljive snovi (kisik, ogljikove hidrate, aminokisljine, maščobe, hormone in snovi imunskega odziva) in odnaša odpadne snovi, ki izhajajo iz metabolizma tkiv. Črpalka krvnega obtoka je srce. Srce poganja kri v arterije, ki se razvejijo na manjše arterije, arteriole in v kapilare, kjer poteka izmenjava snovi med krvjo in tkivi. Kapilare se potem združujejo v venule, majhne vene in večje vene, ki dovajajo kri proti srcu. Hitrost krvi je največja v velikih žilah. Z razvejanjem arterij se njihov polmer manjša, njihovo število pa večja, na tak način, da se skupni presek večja, hitrost krvi pa manjša. V aorti je povprečna hitrost krvi približno 0,2 m/s, v kapilari pa približno 0,3 mm/s.

Zavedati se moramo, da je krvni obtok razvejan sistem, da žile nimajo povesod okroglega preseka, da pride do razvejišč in stikov ter da pride v obtoku do zavojev ali kakih drugih sprememb v geometriji. Kljub temu pa na nekaterih mestih lahko opišemo geometrijo žil z ravno okroglo cevjo s konstantnim presekom.

Kri opišemo kot vodno raztopino nizkomolekularnih organskih in anorganskih snovi in beljakovin, v kateri plavajo krvne celice in lipoproteini. Rdeče krvne celice so dovolj velike in številne, da njihova prisotnost pomembno vpliva na mehanske lastnosti normalne krvi. Zaradi prisotnosti rdečih krvnih celic je viskoznost normalne krvi pri dani temperaturi odvisna od gradienta hitrosti gibanja krvi in prostorninskega deleža rdečih krvnih celic. Meritve kažejo, da se pri velikih hitrostih krvi rdeče krvne celice gibljejo po sredini žil (slika 3.4a), kjer so strižne sile med celicami in plazmo najmanjše, viskoznost krvi pa skoraj

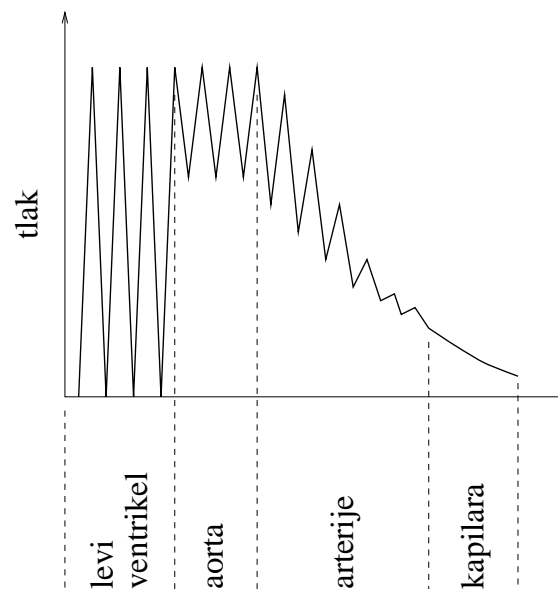
neodvisna od hitrosti krvi. Pri majhnih hitrostih pa so rdeče krvne celice bolj enakomerno porazdeljene po preseku žile (slika 3.4b), kar povečuje verjetnost za interakcije med njimi. Tvorijo se skupki rdečih krvnih celic in viskoznost naraste (slika 3.5).



Slika 3.5: Odvisnost viskoznosti od odvoda $\frac{dv}{dr}$ v suspenziji rdečih krvnih celic v plazmi pri različnih prostorninskih deležih rdečih krvnih celic. Pri eksperimentu uporabljena naprava ustvari po vsem prostoru konstanten gradient hitrosti $\frac{dv}{dr}$. Pri majhnih prostorninskih deležih se viskoznost ne spreminja z $\frac{dv}{dr}$, njena vrednost pa je relativno majhna. Z naraščanjem prostorninskega deleža rdečih krvnih celic viskoznost postane odvisna od $\frac{dv}{dr}$; njena vrednost narašča s padanjem $\frac{dv}{dr}$. Povzeto po C.G. Caro in sod., *The mechanics of circulation*, Oxford University Press, New York, 1978, str. 179.

Tok skozi žile ni povsod stacionaren. Srce poganja kri v obliki sunkov, kar se prenaša tudi na žile, ki imajo zaradi svoje strukture elastične lastnosti. Te se vzdolž obtoka spreminjajo. Spreminja se tudi velikost tlaka, ki poganja tok skozi žile (slika 3.6).

Tok krvi je pretežno laminaren, kar pa ne velja v velikih arterijah in venah, pa tudi v okolici razvejišč, kjer se lahko pojavijo zastoji in vrtinci. Poiseuille-Hagenov zakon torej uporabimo, če nam zadostuje groba ocena in opis nekaterih kvalitativnih lastnosti sistema. Pove nam na primer, da je pri uravnavanju pretoka krvi skozi žile najbolj učinkovita sprememba polmera žile. Na osnovi Poiseuille-Hagenovega zakona ocenimo, da pri dani tlačni razliki Δp sprememba polmera žile r za 1% povzroči spremembo prostorninskega pretoka krvi za 4%. Obratno, če nek organ potrebuje določeno količino krvi za svojo funkcijo, je tlačna razlika, ki je potrebna da srce poganja to količino krvi, odvisna od polmera žil. Za določen prostorninski pretok zmanjšanje polmera žil za 1% zahteva 4% povečanje tlačne razlike. Pri opisu pojavov, pri katerih je pomembna sestava krvi v žilah, elastične lastnosti žil in časovna odvisnost, pa upoštevamo splošnejše zakone gibanja.



Slika 3.6: Shematski prikaz spreminjanja tlaka, ki poganja tok skozi žile, vzdolž arterijskega krvnega obtoka. Shema je simbolična; v levem prekatu, v aorti in v arterijah je nakazana časovna odvisnost tlaka, v obliki periodičnih sunkov. V kapilarah je tok stacionaren.