2.5. SKLEPANJA – TESTIRANJE HIPOTEZ

- S statističnim sklepanjem ugotavljamo, kakšne so lastnosti populacije ali vzorca.
- Primeri:
  I. V zadnjih 20 desetletjih je bilo na bovškem število glavnih potresnih sunkov:

     1 2 1 2 1 5 1 2 1 5 2 5 5 1 3 1 3 1 1 3

     Ali se potresi pojavljajo naključno = Test ujemanja porazdelitve s Poissonovo?

2.5. SKLEPANJA – TESTIRANJE HIPOTEZ

II. Magmatska kamnina je granit, če vsebuje 20% kremena. V osmih zbruskih kamnine s Pohorja je % kremenovih zrn:

23,5 16,6 25,4 19,3 19,1 22,4 20,9 24,9

Ali je vzorčena kamnina granit – Test ujemanja srednje vrednosti vzorca z neko kritično (predpisano) vrednostjo.

2.5. SKLEPANJA – TESTIRANJE HIPOTEZ

III. V horizontih A in B smo izmerili širine školjk:

A:	3,2	3,1	3,1	3,3	2,9	2,9	3,5	3,0		
B:	3,1	3,1	2,8	3,1	3,1	3,0	2,6	3,0	3,1	2,8

Ali gre v obeh horizontih za isto vrsto školjk? So školjke iz horizonta A večje od tistih iz B? – Test enakosti dveh populacijskih povprečij.

2.5.1. Porazdelitve vzorčenja ocen parametrov

- Vzorčevalna porazdelitev je verjetnostna porazdelitev ocene parametrov populacije.
- Za podatke, ki izhajajo iz normalne porazdelitve iščemo intervale zaupanja (razpone vrednosti), znotraj katerih verjetno leži resnična vrednost ocene:
  - Količina potrebna za sklepanje o srednjih vrednostih podatkov – Studentov *t*
  - razmerje med dvema neodvisnima ocenama iste variance – Fisherjev *F*.

2.5.1.1. Studentova porazdelitev t

- Če želimo uporabiti standardizirano vrednost za vzorec populacije ($\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$), moramo uporabiti standardni odklon populacije, ki ga običajno ne poznamo.
- Ocenimo jo s statsistiko s ali Studentovo *t* vrednostjo:

$$t = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

2.5.1.1. Studentova porazdelitev t

- Porazdelitev te količine ni normalna, čeprav je zvonaste oblike s središčem pri 0.
- Je neodvisna od neznanega standardnega odklona in ima en sam parameter (za razliko od dveh pri normalni porazdelitvi), ki je odvisen le od števila opazovanj, uporabljenih za oceno σ^2.

2.5.1.1. Studentova porazdelitev t

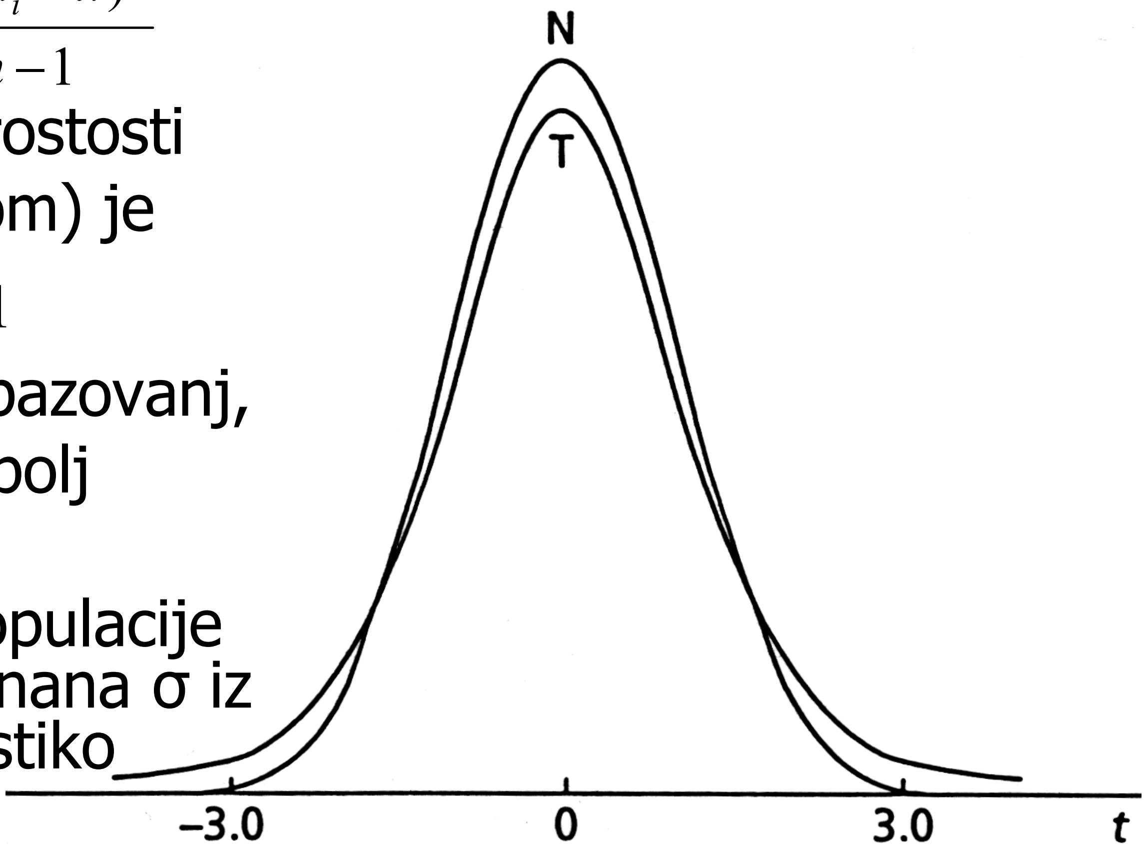
- Enaka je deljitelju, ki ga uporabimo pri izračunu nezamaknjene ocene variance.

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$$

- Parameter ν – stopnje prostosti (d.f. – degrees of freedom) je

$$\nu = n - 1$$

- Z naraščanjem števila opazovanj, se porazdelitev t vedno bolj približuje normalni.
- Če poznamo varianco populacije σ^2, ali če je $n \geq 30$ in je znana σ iz vzorca s, kot testnostatistiko namesto t uporabimo z.



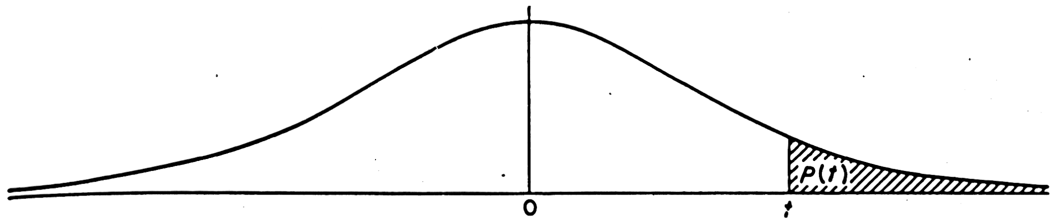


TABLE 3. Upper Percentage Points of the t Distribution *

f \ $P(t)$	.40	.30	.25	.20	.15	.10	.05	.025	.01	.005	.0005
1	.325	.727	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	.289	.617	.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	.277	.584	.765	.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	.271	.569	.741	.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	.267	.559	.727	.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	.265	.553	.718	.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	.263	.549	.711	.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	.262	.546	.706	.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	.261	.543	.703	.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	.260	.542	.700	.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	.260	.540	.697	.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	.259	.539	.695	.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	.259	.538	.694	.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	.258	.537	.692	.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	.258	.536	.691	.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	.258	.535	.690	.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	.257	.534	.689	.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	.257	.534	.688	.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	.257	.533	.688	.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	.257	.533	.687	.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	.257	.532	.686	.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	.256	.532	.686	.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	.256	.532	.685	.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	.256	.531	.685	.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	.256	.531	.684	.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	.256	.531	.684	.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	.256	.531	.684	.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	.256	.530	.683	.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	.256	.530	.683	.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	.256	.530	.683	.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	.255	.529	.681	.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	.254	.527	.679	.848	1.046	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	.254	.526	.677	.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	.253	.524	.674	.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

2.5.1.1. Studentova porazdelitev t

- Primer:
  - Naključni vzorec 12 opazovanj izhaja iz normalne porazdelitve. Katera vrednost t bo presežena z verjetnostjo 97,5 oz. s stopnjo zaupanja α 0,025 (2,5%)?
  - Število stopenj prostosti ν je

    ν = n-1 = 11

    Iz tabele odčitamo, da točki α = 2,5% in ν = 11 ustreza

    t = 2,201.

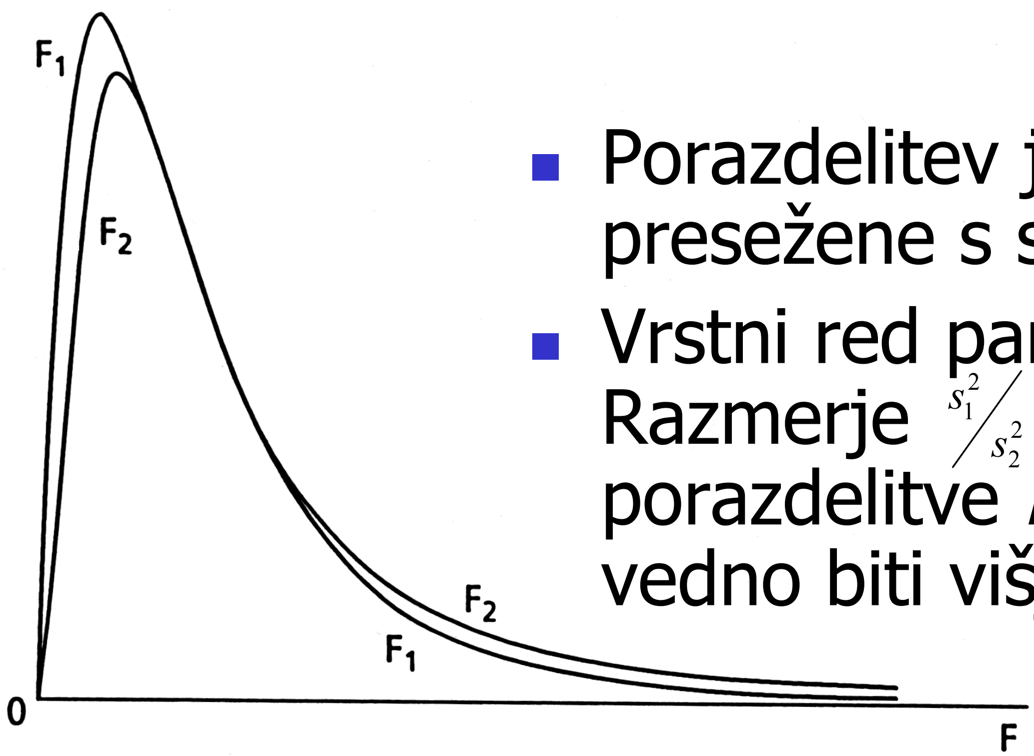
2.5.1.2. Porazdelitev F

- Preverjanje parov varianc omogoča oceniti, ali ju lahko obravnavamo kot neodvisni oceni iste variance.
- Primerjavo izvedemo z iskanjem razmerja med njima. Rezultirajoča statistika ima znano verjetnostno porazdelitev Fisherjev *F*.
- Parametra v_1 in v_2 sta enaka številu stopenj prostosti, povezanih z neodvisnima ocenama s_1 in s_2, ki izhajata iz vzorcev z n_1 in n_2 opazovanj.

2.5.1.2. Porazdelitev F

- Razmerje izhaja iz porazdelitve *F*, kjer je:

$\nu_1 = (n_1 - 1)$ in $\nu_2 = (n_2 - 1)$ in $F = \dfrac{s_1^2}{s_2^2}$



- Porazdelitev je $F_{\nu 1, \nu 2}$ vrednosti, presežene s stopnjo zaupanja α $F_{\alpha,\nu 1,\nu 2}$.
- Vrstni red parametrov je pomemben! Razmerje s_1^2/s_2^2 izhaja iz drugačne porazdelitve *F* kot s_2^2/s_1^2. V števcu mora vedno biti višja vrednost!

TABLE 5. Critical Values for the F Distribution *

$P(F) = 0.05$

f_2 \ f_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	243.91	245.95	248.01	249.05	250.09	251.14	252.20	253.25	254.32
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.84	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.00	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

2.5.1.2. Porazdelitev F

- Primer:

  Kakšna vrednost $F_{4,10}$ in kakšna $F_{10, 4}$ ne bo presežena pri 95% verjetnosti ($\alpha = 0{,}05$)?

- Iz tabele odčitamo: $F_{0,05,4,10} = 3{,}48$

  $F_{0,05,10,4} = 5{,}96$

2.5.2. Intervali zaupanja

- Običajno nas zanima razpon vrednosti, v katerem z določeno (običajno 95%) stopnjo zaupanja (verjetnosti) pričakujemo, tudi resnično vrednost parametra.
- Tak razpon imenujemo 95% interval (pas) zaupanja, njegove skrajne vrednosti pa 95% meje zaupanja.
- Izračunamo ga na podlagi vzorčevalne ocene porazdelitve ali kake njene funkcije.

2.5.2.1. Intervali zaupanja srednje vrednosti normalne porazdelitve

- Interval, v katerem bo pri določeni stopnji zaupanja ležala vrednost t, poiščemo iz tabele odstotnih točk porazdelitve t.
- Kateri razpon vrednosti μ bo ustrezal zahtevanemu intervalu t?
- Za najvišjo vrednost intervala t velja:

$$\frac{\bar{x} - \mu_z}{\sqrt{s^2/n}} = -t_{0,025;\nu}$$

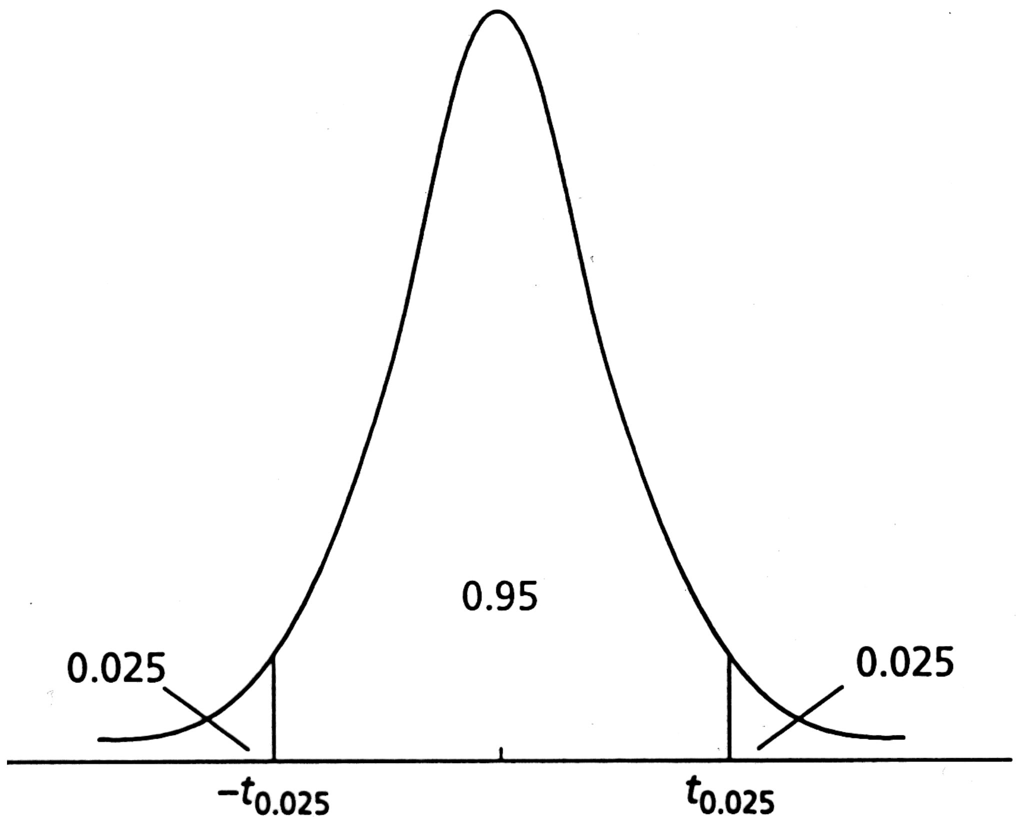
2.5.2.1. Intervali zaupanja srednje vrednosti normalne porazdelitve

- Pri 95% verjetnosti bo torej zgornja meja:

$$\mu_z = \bar{x} + t_{0,025;n-1}\sqrt{\frac{s^2}{n}}$$

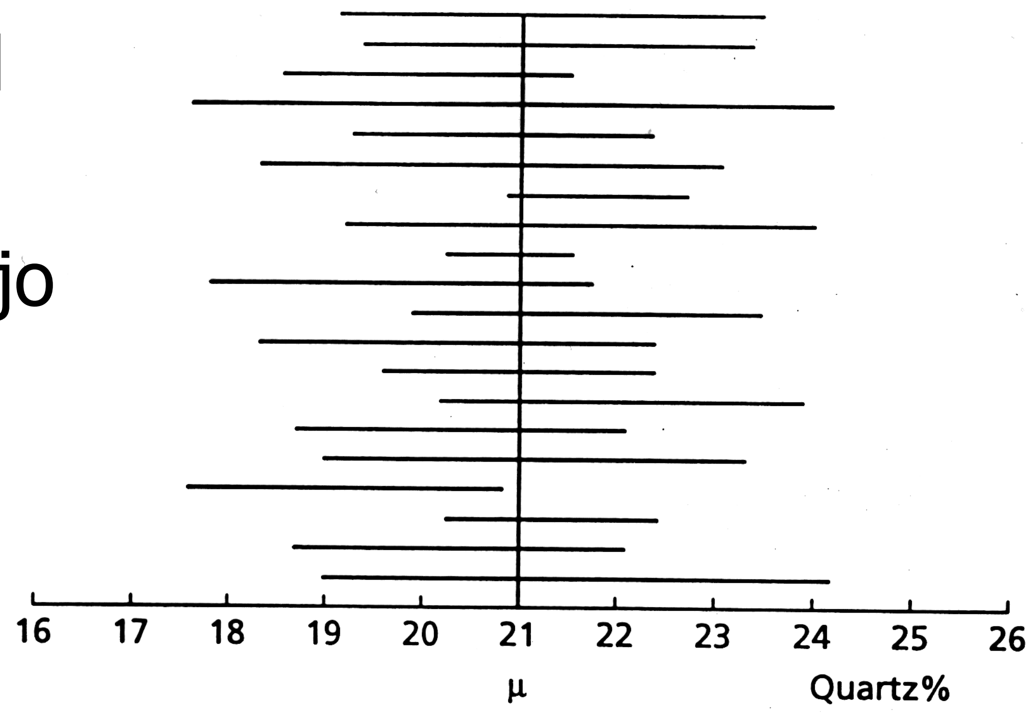
- In spodnja:

$$\mu_s = \bar{x} - t_{0,025;n-1}\sqrt{\frac{s^2}{n}}$$



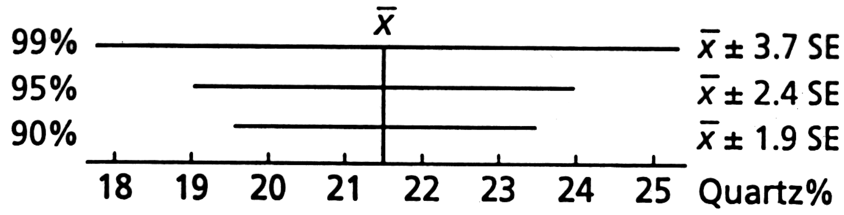
2.5.2.1. Intervali zaupanja srednje vrednosti normalne porazdelitve

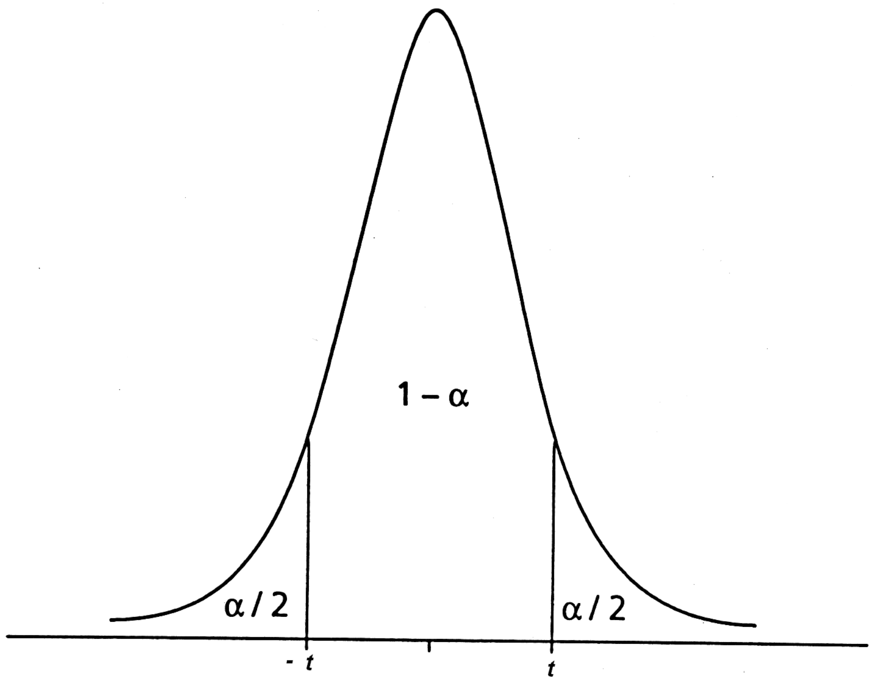
- Če odvzamemo veliko število neodvisnih vzorcev iz dane porazdelitve s srednjo vrednostjo μ in izračunamo 95% pasove zaupanja za vsakega od njih, bo 95% intervalov vključevalo pravo srednjo vrednost, 5% pa ne.



2.5.2.1. Intervali zaupanja srednje vrednosti normalne porazdelitve

- Stopnjo zaupanja za dani vzorec povečamo z daljšanjem in zmanjšamo s krajšanjem intervala, kar je razvidno tudi iz tabel odstotnih točk porazdelitve t.





2.5.2.2. Ocena potrebne velikost vzorca

- Razpon pasu zaupanja pri določeni verjetnosti lahko nadzorujemo z ustrezno izbrano velikostjo vzorca.
- Trditev, da nek interval ($\bar{x}$ ± K) 95% zanesljivo vključuje srednjo vrednost, je enaka izjavi, da smo 95% prepričani, da se srednja vrednost vzorca ne razlikuje od dejanske srednje vrednosti za več kot K.

2.5.2.2. Ocena potrebne velikost vzorca

- Oceno izračunamo tako, da postavimo zahtevo, da naj odstopanje γ ne bo večje od določene vrednosti:

$$t_{0,025;n-1}\sqrt{s^2/n} < \gamma$$

iz česar sledi:

$$n > t_{0,025;n-1}\frac{s^2}{\gamma}$$

2.5.2.2. Ocena potrebne velikost vzorca

- Žal je vrednost $t_{0,025;n-1}$ odvisna od števila opazovanj (n), ki ga želimo oceniti, s^2 pa ne moremo predhodno predvideti.
- Zato proučimo pilotski vzorec n_1 opazovanj, izračunamo začasno oceno variance s_1^2 , upoštevamo t ustrezne velikosti pilotskega vzorca in uporabimo izraz:

$$n > t_{0,025;n_1-1} \frac{s_1^2}{\gamma}$$

- Če vrednost ni celo številu, upoštevamo naslednje najvišje celo število kot najmanjše število potrebnih opazovanj. Ker smo že obravnavali $n_1$vrednosti, potrebujemo le še $(n-n_1)$ opazovanj.

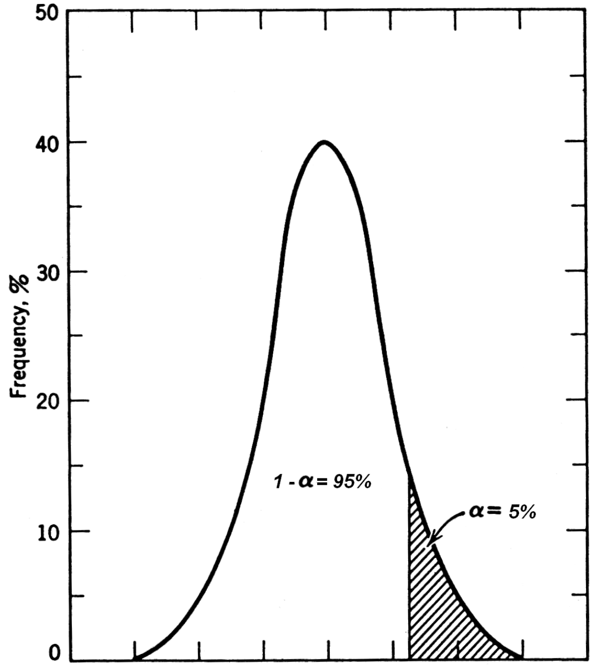
2.5.3. Preverjanje hipotez

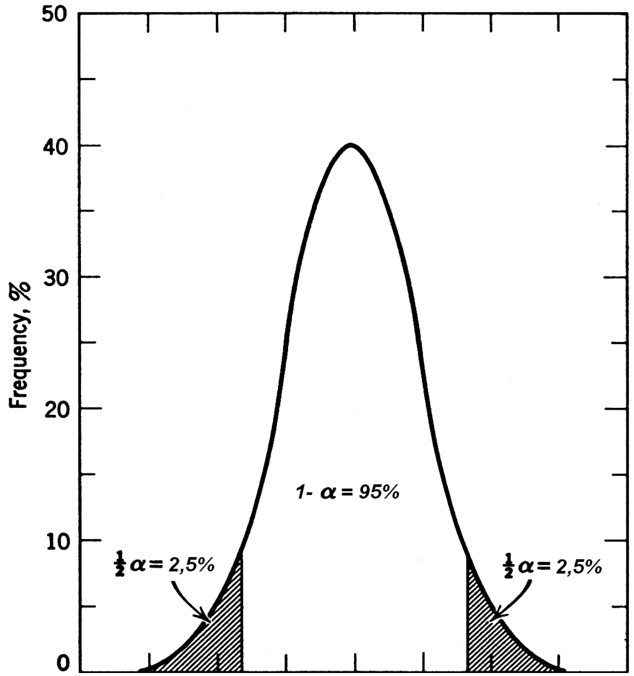
- Ne glede na to, kaj obravnavajo (normalnost porazdelitve, enakost varianc, primerjavo srednjih vrednosti...), imajo vsi statistični testi enako zasnovo:
  - Dve nasprotujoči si domnevi o obravnavanih parametrih
  - Vzorec podatkov
  - Iz vzorca izračunane statistike (n, $\overline{x}$, s^2)
  - Testna statistika z znano verjetnostno porazdelitvijo (t, F, X^2)
  - Stopnja zaupanja (značilnosti, verjetnosti) testa (α)
  - Uporaba ustrezne testne statistike in stopnje zaupanja - tabelirane, kritične vrednosti, s katero primerjamo izračunano vrednost ter sprejmemo ali ovržemo ničelno hipotezo
  - Prepoznavanje napake – možnosti, da ovržemo veljavno hipotezo ali sprejmemo napačno.

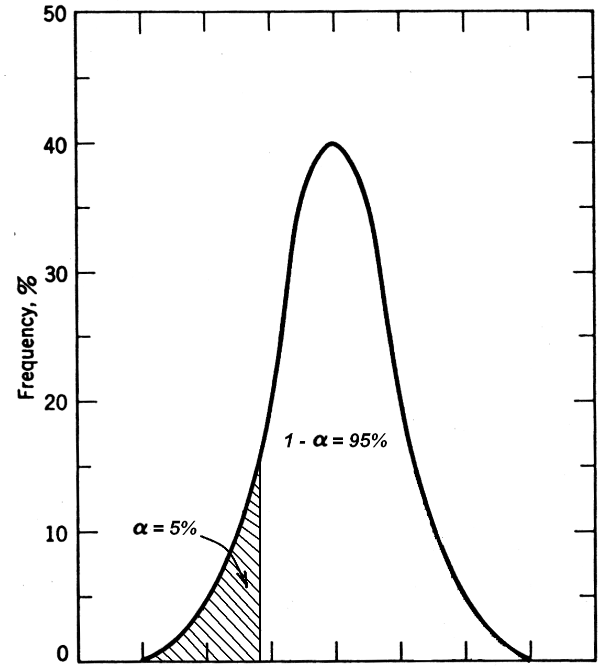
2.5.3.1. Ničelna in alternativna hipoteza

- Nasprotujoči si hipotezi lahko postavimo v eni od treh oblik:

H_0: $\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \geq \mu_2$
H_1: $\mu_1 > \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$
enostranski test	dvostranski test	enostranski test







2.5.3.1. Ničelna in alternativna hipoteza

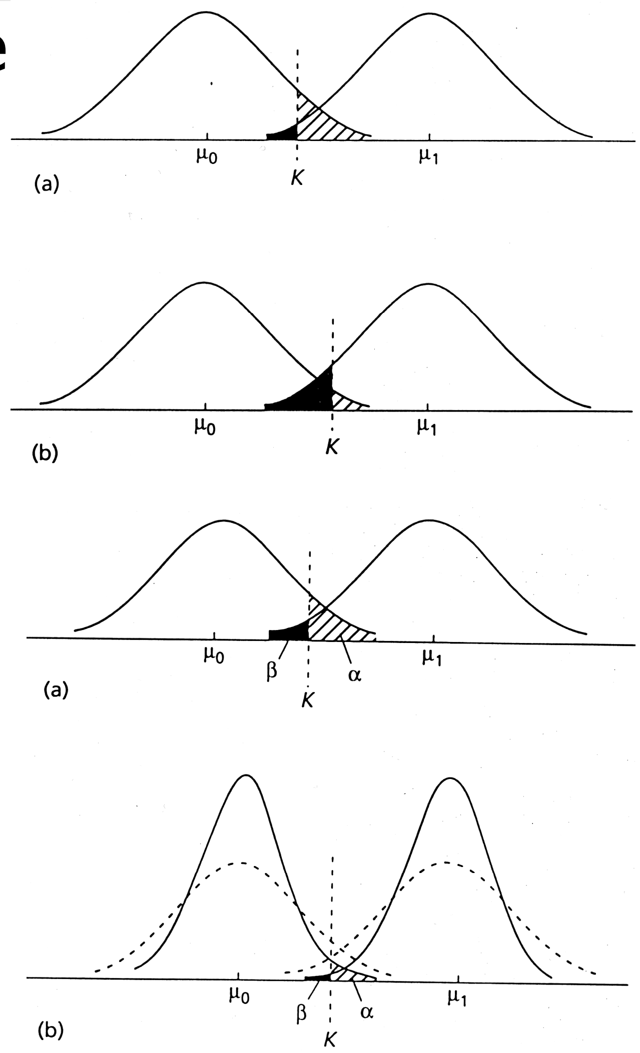
- H_0 je ničelna hipoteza, ki običajno pomeni, da ni razlike (med dvema srednjima vrednostima, variancama, od normalne porazdelitve, ...)
- Običajno v ničelno hipotezo postavimo trditev, ki jo želimo ovreči.
- H_1 je alternativna hipoteza, katere resničnost ugotavljanmo.
- Če preizkus pokaže, da ničelna hipoteza ne drži, sprejmemo alternativno, pri prej zadani verjetnost Pr $= 1 - \alpha$.
- Pravimo, da je izid statistično značilen na ravni značilnosti (tveganja) α.

2.5.3.2. Vrste napak in njihove verjetnosti

- Možni so trije izidi testa hipotez:
  - $Pr_{izračunana} > Pr_{tabelirana}$ zavrni H_0
  - $Pr_{izračunana} < Pr_{tabelirana}$ sprejmi H_0
  - $Pr_{izračunana} \cong Pr_{tabelirana}$ odloži sklep
- Če zanemarimo tretjo možnost, imamo opravka z dvema možnostima napake:
  - napaka vrste I: zavrnemo H_0, kadar ta drži; verjetnost te napake je α in je stopnja značilnost testa, ki jo sami določimo (5% ali 0,05 pomeni 95% verjetnost).
  - Napaka vrste II: sprejmemo H_0, kadar ta ne drži; verjetnost te napake je β in je odvisna od prave velikosti preizkušanega parametra.

2.5.3.2. Vrste napak in njihove verjetnosti

- Nižja kot je vrednost α, manjše je območje zavrnitve H_0, bolj verjetno je, da H_1 res drži.
- Vendar zmanjšanje , s premikom razmejitvene točke v desno, zviša β, torej možnost, da sprejmemo napačno H_1.
- Možnost napake zmanjšamo tako, da zapišemo H_0 tako, da bo predvidoma zavrnjena.
- Obe napaki se zmanjšujeta tudi z večanjem vzorca.
- Zavrnitev ene hipoteze, ne potrjuje, da druga drži! Statistični testi pokažejo le kaj ni res in ne kaj dejansko drži!



2.5.3.3. Domneva, da je srednja vrednost μ enaka neki numerični vrednosti c

- Domneva:

H_0:	$\mu \le c$	$\mu = c$	$\mu \ge c$
H_1:	$\mu > c$	$\mu \ne c$	$\mu < c$

- Preizkusni izraz: $$\boxed{t = \frac{\bar{x} - c}{s/\sqrt{n}}}$$

- Zavrni H_0, če velja

$t > t_{\alpha,\nu}$ $\quad$ $t < -t_{\alpha/2,\nu}$ ali $t > t_{\alpha/2,\nu}$ $\quad$ $t < -t_{\alpha,\nu}$

oziroma $\quad$ $|t| > t_{tabeliran}$

2.5.3.4. Domneva, da sta si populacjski varianci enaki

- Domneva:

H_0:	$\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$
H_1:	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

- Preizkusni izraz:

  v števcu je vedno višja s^2

$$\boxed{F = \frac{s_1^2}{s_2^2}}$$

- Zavrni H_0, če velja

  $F > F_{\alpha,\nu 1-1,\nu 2-1}$ $\quad$ $F > F_{\alpha/2,\nu 1-1,\nu 2-1}$

na prvem mestu so vedno stopnje prostosti variance, ki je v števcu

2.5.3.5. Domneva, da sta populacijski srednji vrednosti enaki

- Domneva:

H_0: $\mu_1 \leq \mu_2$ | $\mu_1 = \mu_2$ | $\mu_1 \geq \mu_2$

H_1: $\mu_1 > \mu_2$ | $\mu_1 \neq \mu_2$ | $\mu_1 < \mu_2$

- Najprej opravi test enakosti populacijskih varianc (2.5.3.4)!
- Preizkusni izraz:
  - Če je $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$$\boxed{t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s \cdot \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}} \qquad s = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}} \qquad \nu = n_1 + n_2 - 2$$

  - Če je $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$$\boxed{t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}} \qquad \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu_1}\left(\frac{s_1^2/n_1}{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}\right)^2 + \frac{1}{\nu_2}\left(\frac{s_2^2/n_2}{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}\right)^2 \qquad \nu_1 = n_1 - 1 \quad \nu_2 = n_2 - 1$$

- Zavrni H_0, če velja

$t > t_{\alpha,\nu}$ | $t < -t_{\alpha/2,\nu}$ ali $t > t_{\alpha/2,\nu}$ | $t < -t_{\alpha,\nu}$

oziroma $|t| > t_{tabeliran}$

2.5.3.6. Preverjanje razporeditve

- Običajno preverjamo ali se porazdelitev ujema z normalno – Gaussovo.
  - Vizualno iz oblike histograma
  - Testiranje parametrov asimetričnosti ($\sqrt{b_1}$) in sploščenosti (b_2)
  - X^2 test
  - Kolmogorov – Smirnov test
  - Stopenjska (order) statistika
  - Uporaba verjetnostnega papirja – grafi normalne verjetnosti.

2.5.3.6. Preverjanje razporeditve
2.5.3.6.1. X^2 test

- Primernejši je za nezvezne kot zvezne porazdelitve.
- Ne zahteva poznavanja parametrov.
- Uporaben je v številnih drugih statističnih testih, kjer primerjamo tisto kar pričakujemo, glede na zadani kriterij, s tistim, kar dejansko opazujemo.

2.5.3.6.1. X^2 test

- Postavimo hipotezi:

H_0: podatki iz populacije imajo določena razmerja v vsakem od k razredov – porazdelitev podatkov se ne razlikuje od normalne

H_1:podatki iz populacije nimajo določenih razmerij – porazdelitev se razlikuje od normalne

2.5.3.6.1. X^2 test

- Testna statistika X^2 je:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(O_j - P_j)^2}{P_j}$$

k	število razredov (kategorij), kamor uvrščamo opazovanja
O_j	opazovane frekvence (pogostnosti, preštetja) v j-tem razredu
P_j	pričakovane frekvence v j-tem razredu, če drži H_0; v angleških besedilih je označba E_j (expected)

- Kvadrat v števcu odstrani težave negativnih in pozitivnih odstopanj, ki se med seboj izničijo.
- Deljenje s pričakovano frekvenco uravnoteži učinek velikosti števil in s tem omogoči uporabo enotnih tabel.

2.5.3.6.1. X^2 test

- Izračunano vrednost primerjamo s tabelirano vrednostjo X^2 pri določeni stopnji zaupanja (običajno $\alpha = 0{,}05$) ter ustreznih stopnjah prostosti.
- Porazdelitev X^2 je premaknjena v desno, pri čemer stopnja asimetričnosti zavisi od parametra ν.
- Stopnje prostosti ν so:

  $\nu = k - 1 -$ (število ocenjenih parametrov)
- H_0 zavrnemo, kadar je izračunana vrednost X^2 višja od tabelirane.

2.5.3.6.1. X^2 test

- Porazdelitev X^2 je premaknjena v desno, pri čemer stopnja asimetričnosti zavisi od parametra ν.

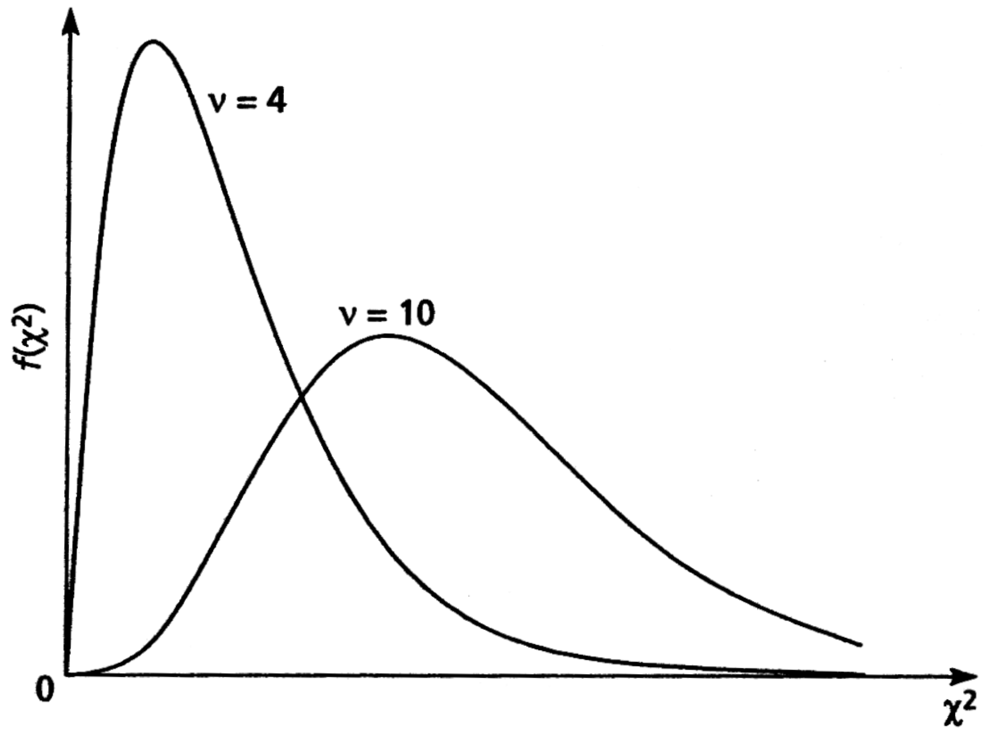


TABLE 4. UPPER PERCENTAGE POINTS OF THE χ^2 DISTRIBUTION *

f \ $P(\chi^2)$	.995	.990	.975	.950	.900	.750	.500	.250	.100	.050	.025	.010	.005
1	3927×10^{-8}	1571×10^{-7}	9821×10^{-7}	3932×10^{-6}	0.01579	0.1015	0.4549	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.01003	0.02010	0.05064	0.1026	.2107	.5754	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.60
3	.07172	.1148	.2158	.3518	.5844	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.34	12.84
4	.2070	.2971	.4844	.7107	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86
5	.4117	.5543	.8312	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75
6	.6757	.8721	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	.9893	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344	10.22	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343	11.39	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342	12.55	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	7.584	10.34	13.70	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	8.438	11.34	14.85	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	9.299	12.34	15.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	10.17	13.34	17.12	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	11.04	14.34	18.25	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	11.91	15.34	19.37	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.09	12.79	16.34	20.49	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.86	13.68	17.34	21.60	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.844	7.633	8.907	10.12	11.65	14.56	18.34	22.72	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.434	8.260	9.591	10.85	12.44	15.45	19.34	23.83	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.034	8.897	10.28	11.59	13.24	16.34	20.34	24.93	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.643	9.542	10.98	12.34	14.04	17.24	21.34	26.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.260	10.20	11.69	13.09	14.85	18.14	22.34	27.14	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.886	10.86	12.40	13.85	15.66	19.04	23.34	28.24	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	24.34	29.34	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	20.84	25.34	30.43	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	21.75	26.34	31.53	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	22.66	27.34	32.62	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	23.57	28.34	33.71	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	24.48	29.34	34.80	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	33.66	39.34	45.62	51.80	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	42.94	49.33	56.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	52.29	59.33	66.98	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	61.70	69.33	77.58	85.53	90.53	95.02	100.42	104.22
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	71.14	79.33	88.13	96.58	101.88	106.63	112.33	116.32
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	80.62	89.33	98.65	107.56	113.14	118.14	124.12	128.30
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	90.13	99.33	109.14	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17
z_P	−2.576	−2.326	−1.960	−1.645	−1.282	−0.6745	0.0000	+0.6745	+1.282	+1.645	+1.960	+2.326	+2.576

* Use explained in Sec. 3.2.2, 4.2, 4.3, 4.6, and 4.7.1. For a number of degrees of freedom $f > 100$, take

2.5.3.6.1. X^2 test

- Opozorila:

1. V vsakem razredu moramo pričakovati vsaj 5 opazovanj. Pogoju običajno zadostimo z nižanjem števila razredov.
2. Izid je zelo občutljiv na število uporabljenih razredov: verjetneje je, da bo H_0 zavrnjena, če je število razredov visoko; pri majhnem številu razredov je zavrnitev H_0 lahko le posledica grobih in nepomembnih podobnosti med podatki in modelom.

2.5.3.6.2. Kolmogorov - Smirnov test

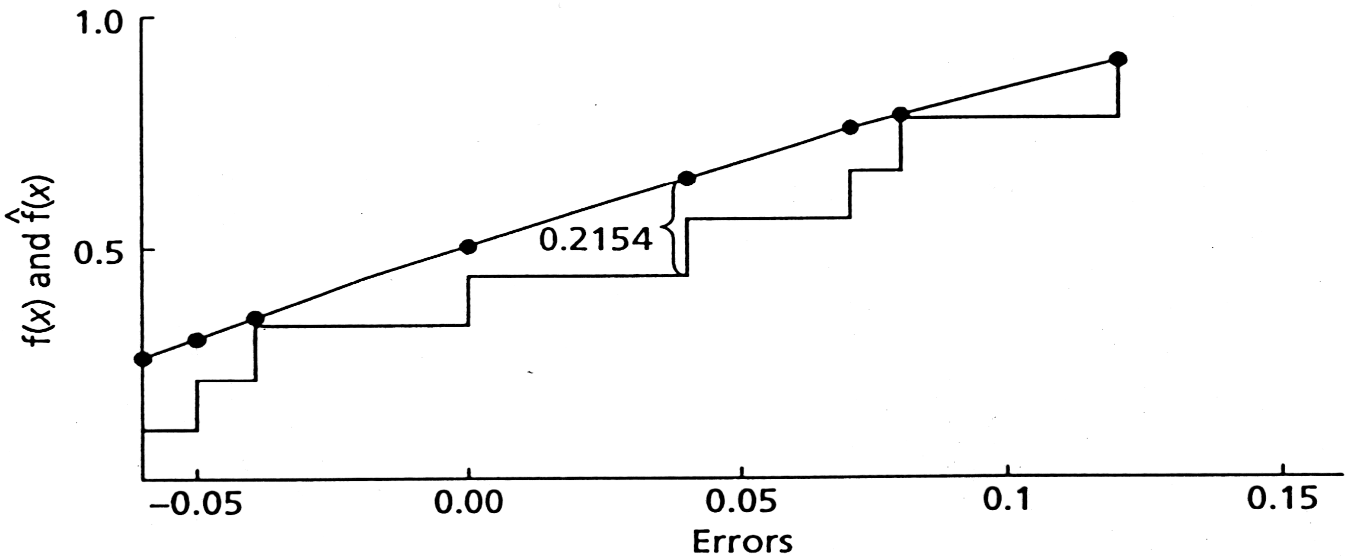
- Podatki v vzorcu naj bodo urejeni v naraščajočem vrstnem redu: $x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}$.
- Kumulativne relativne frekvence (delež podatkov, ki so manjši ali enaki tem vrednostim) so 1/n, 2/n, ..., 1.
- Kumulativne relativne frekvence vzorčenih poodatkov primerjamo z vrednostmi teoretične porazdelitvene funkcije F(x) za porazdelitev, ki jo testiramo.

2.5.3.6.2. Kolmogorov - Smirnov test

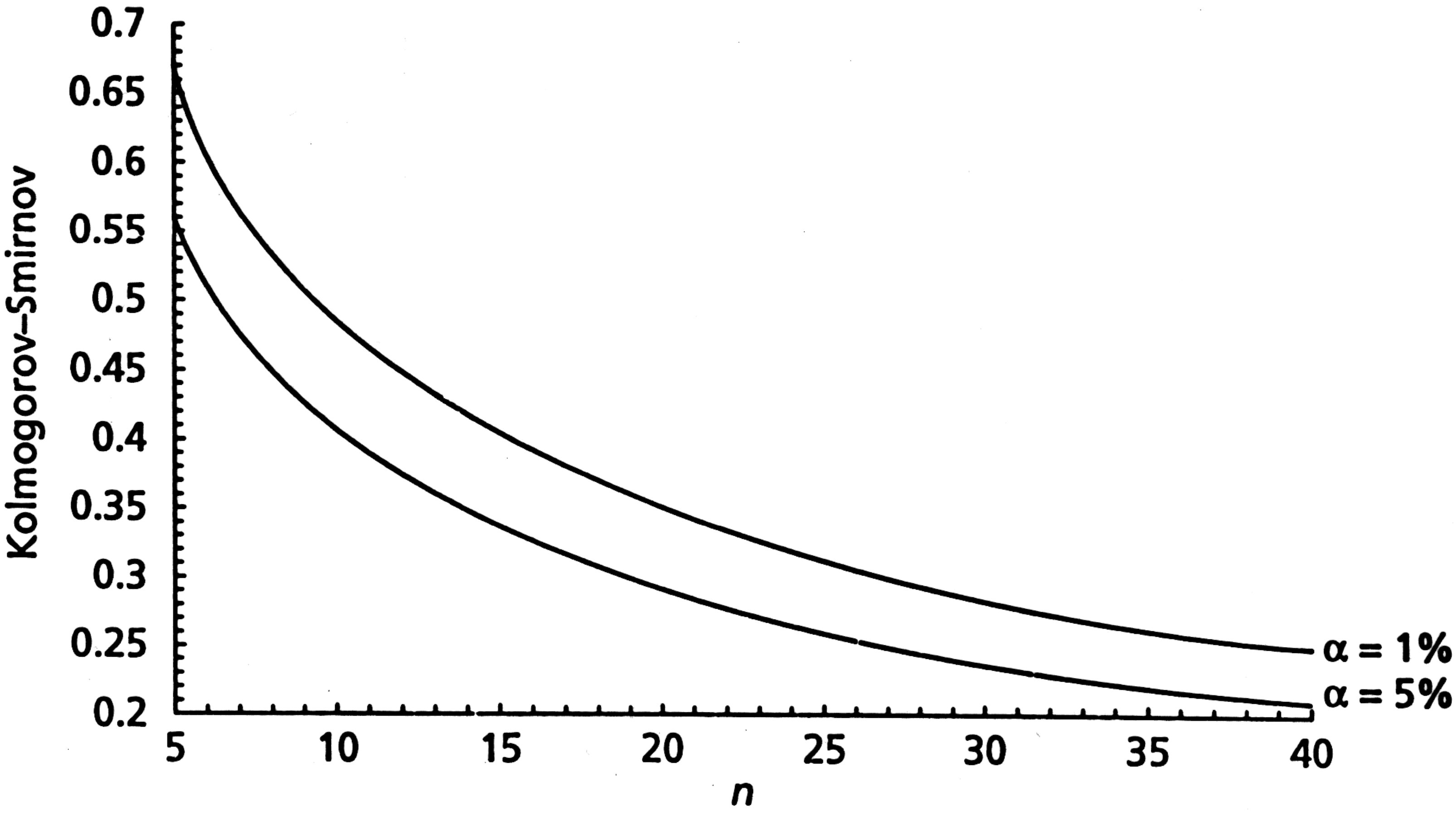
- Če podatki izhajajo iz porazdelitve, podane v H_0, se morajo vrednosti $F(x_{(1)}), \ldots, F(x_{(n)})$, dokaj dobro ujemati z $1/n, \ldots, 1$.
- Kadar spremenljivka nima spodnje meje, kumulativne frekvence namesto z n, delimo z n+1, s čimer preprečimo, da bi kumulativna frekvenca dosegla vrednost 1.
- Test je neparametričen v smislu, da ničelna hipoteza drži, ne glede na to kakšna je predpostavljena porazdelitev.

2.5.3.6.2. Kolmogorov - Smirnov test

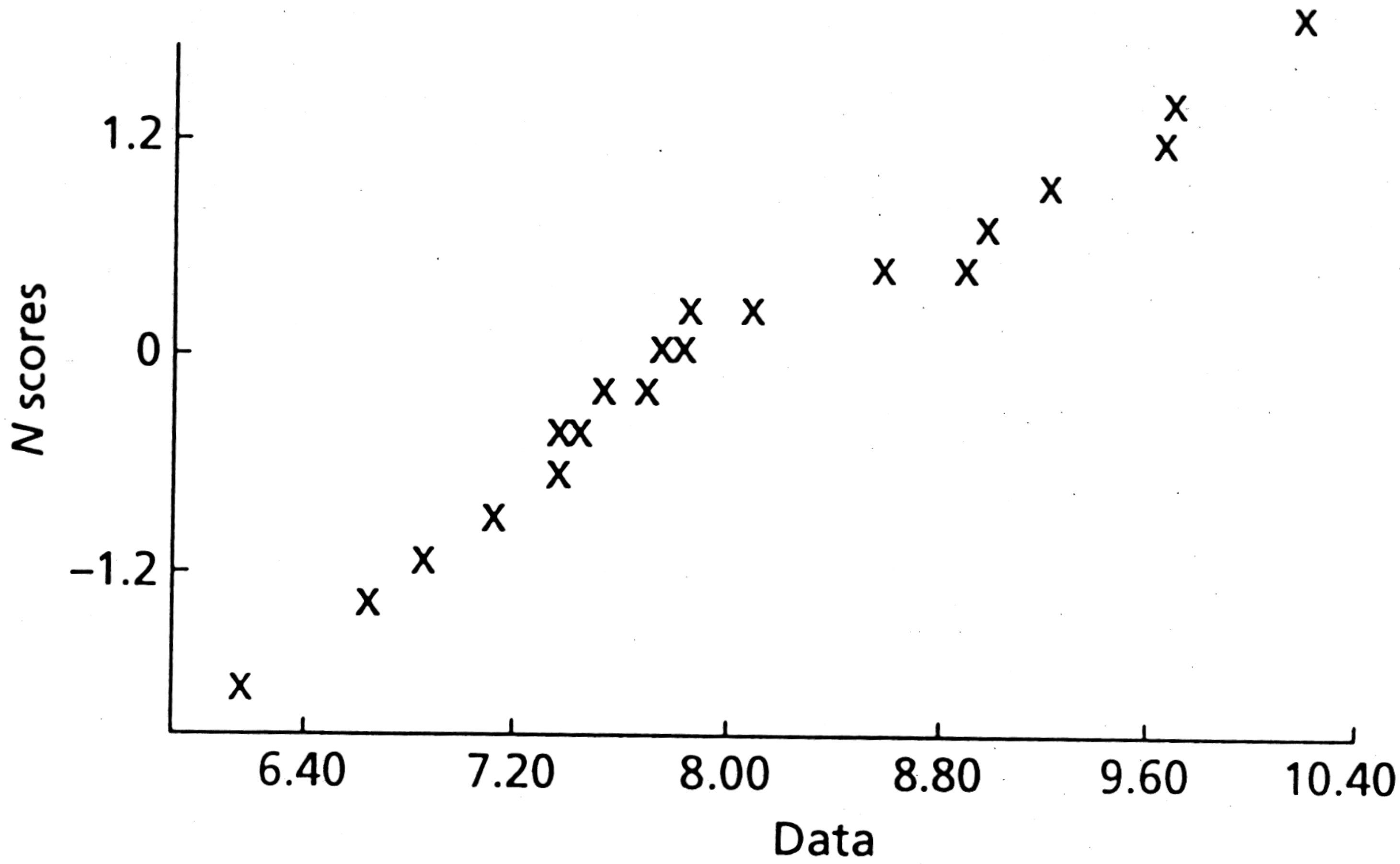
- Izračunamo velikost največje razlike med teoretično in opazovano kumulativno funkcijo ter jo primerjamo s tabelirano kritično vrednostjo.
- H_0 (ni odstopanja med porazdelitvama) zavrnemo, kadar je izračunana vrednost K-S statistike višja od tabelirane.



2.5.3.6.2. Kolmogorov - Smirnov test



2.5.3.6.3. Test normalnih zadetkov



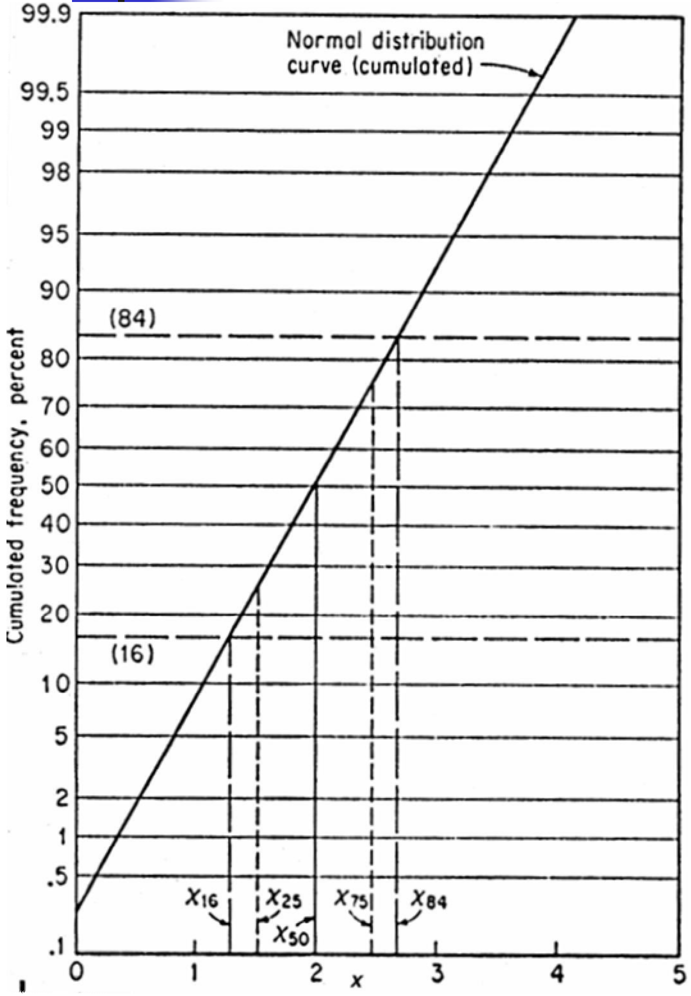
2.5.3.6.4. Graf normalne verjetnosti

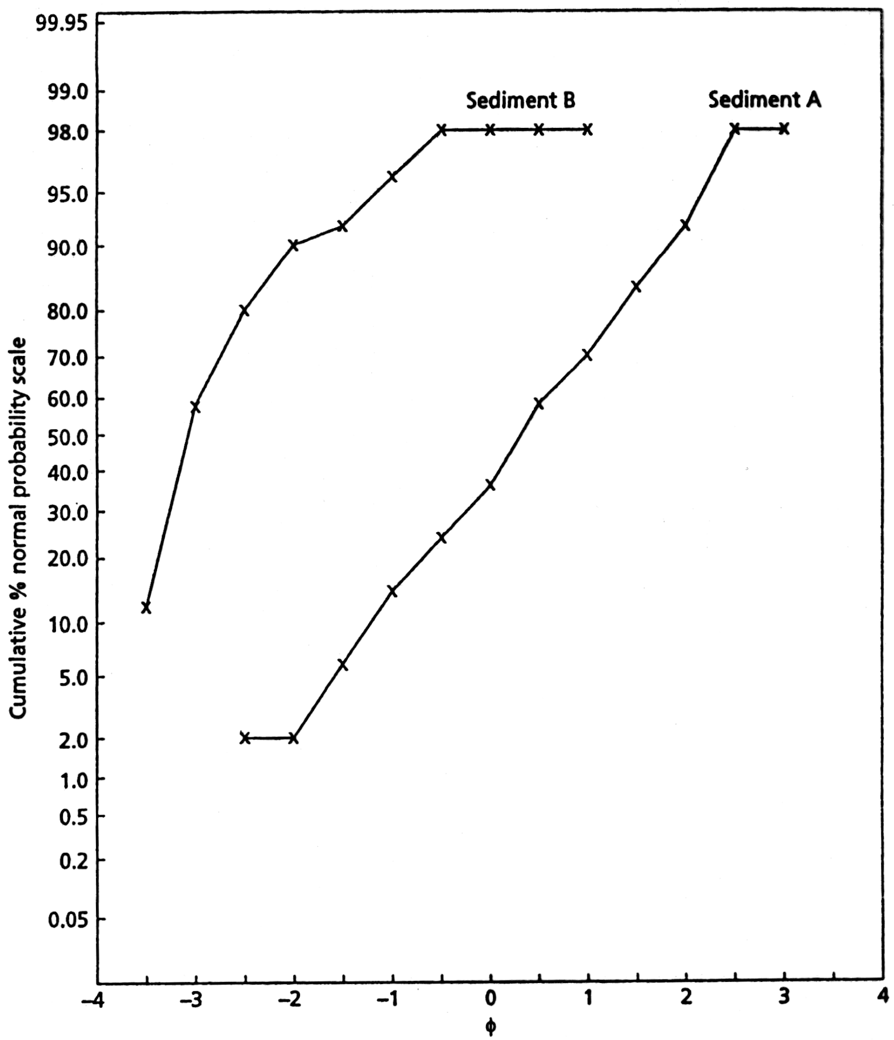
- Verjetnostni papir je izdelan tako, da je graf porazdelitvene funkcije normalne porazdelitve ravna črta.
- Vrednosti porazdelitvene funkcije nanašamo na vzdolžno os, podatke na navpično.
- Podatke uredimo v razrede, za katere preštejemo frekvence; te spremenimo v kumulativne frekvence in izračunamo kumulativne frekvenčne porazdelitve:

  100 x kumulativna frekvenca/(n+1)

- Prileganje normalnost na grafu lahko le subjektivno ocenimo.
- Tovrstne grafe uporabljamo v sedimentologiji pri sejalni analizi. Iz njih odčitamo tudi Folkove parametre – velikosti zrn.

2.5.3.6.4. Graf normalne verjetnosti





2.5.3.6.5. Transformacije

- Veliko statističnih testov zahteva, da so podatki normalno porazdeljeni. Kaj storimo, če ugotovimo, da niso?
  - Opustimo nenormalno razporejeno spremenljivko.
    - Problem je, če je spremenljivka za obravnavani problem bistvena in je ni smiselno opustiti.
  - Nenormalno porazdeljene podatke skušamo s kašno od smislenih transformacij (logaritmiranje) prevesti v normalno obliko.
    - Pri multivariatnih metodah ali, ko primerjamo spremenljivke med seboj je pogosto zaželeno, da so te predstavljene v enaki obliki (npr. vse logaritmirane)