1. izpit iz TOTP - matematika
11.12.2009

1.1 Nariši množico v kompleksni ravnini, dano z enačbo $|z+2| = 2$. Rešitev: množica $|z-a| = r$ je krog z radijem r okoli točke a, zato je rešitev naloge krog okoli -2 z radijem 2.

1.2 Izračunaj limito

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{4x^2+4x+4}\right)^{4x+1}.$$

Rešitev: limita je tipa 1^∞, torej bomo uporabili limito $\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$. Računamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{4x^2+4x+4}\right)^{4x+1} &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{4x^2+4x+4}\right)^{\frac{4x^2+4x+4}{x+1}\frac{x+1}{4x^2+4x+4}(4x+1)} = \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{4x^2+4x+4}\right)^{\frac{4x^2+4x+4}{x+1}\lim_{x\to\infty}\frac{(4x+1)(x+1)}{4x^2+4x+4}} = \\
&= e^1 = e.
\end{aligned}$$

Pri prvi limiti smo upoštevali, da je

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{4x^2+4x+4}\right)^{\frac{4x^2+4x+4}{x+1}} = e.$$

Za limito

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(4x+1)(x+1)}{4x^2+4x+4}$$

se spomnimo, da je potrebno poiskati člena v števcu in imenovalcu, ki najhitreje naraščata. V števcu je to $4x\cdot x$, v imenovalcu pa $4x^2$, zato je

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(4x+1)(x+1)}{4x^2+4x+4} = \lim_{x\to\infty}\frac{4x^2}{4x^2} = 1.$$

1.3 Izračunaj odvod funkcije $f(x) = \log(\sin x)$. Uporabimo pravilo za odvod sestavljene funkcije $h(g(x))' = h'(g(x))g'(x)$. V našem primeru je $h(u) = \log u$ in $g(x) = \sin x$, zato dobimo

$$f'(x) = \frac{1}{\sin(x)}\cos x.$$

1.4 Izračunaj ploščino omejenega lika med osjo y in grafom $y = x^2 + x - 2$. Rešitev: graf funkcije seka os x pri $x = -2$ in $x = 1$. Ker je območje pod osjo x, je ploščina enaka

$$\begin{aligned} -\int_{-2}^{1} x^2 + x - 2\,dx &= -\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_{-2}^{1} = \\ &= -\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 - \left(\frac{-8}{3} + \frac{4}{2} - 2(-2)\right)\right) = \\ &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$