Jasna Prezelj

TEORETIČNE OSNOVE TISKARSKIH PROCESOV

Matematični modul

NTF 2011

Kazalo

Predgovor

Učbenik z rešenimi nalogami je nastal pri predavanjih matematičnega dela predmeta Teoretične osnove tiskarskih procesov v letih 2009 in 2010. Vsebuje poglavja o številih in geometriji, funkcijah, odvodu in integralu ter njuni uporabi. Poleg predpisane vključuje še ponovitev srednješolske snovi (računanje z realnimi števili, vektorji, premice, sistemi enačb) in snov, ki je potrebna pri statistiki (binomski simboli in Pascalov trikotnik, Gaussove krivulje in integral pod njimi). V zvezi z grafi funkcij v knjigi velja opozoriti, da so zaradi večje jasnosti razmerja med enotami na oseh x in y lahko različna. Znak $\diamondsuit$ označuje konec dokaza.

Zahvaljujem se recenzentoma doc. dr. Matjažu Konvalinki in doc. dr. Marku Slaparju, ter izr. prof. dr. Mihaelu Permanu za natančno branje učbenika in mnoge koristne pripombe.

Jasna Prezelj

1. Števila in vektorji

1. Številske množice

Množice števil so: naravna števila, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, \}$, cela števila, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, racionalna števila ali ulomki, ki jih označimo s $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$, realna števila, $\mathbb{R}$, in kompleksna števila, $\mathbb{C}$. Realna števila, ki niso ulomki, se imenujejo iracionalna. Osnovni računski operaciji v $\mathbb{R}$ sta seštevanje in množenje. Za računanje veljajo pravila:

(a) asociativnost seštevanja: $(a + b) + c = a + (b + c)$,

(b) komutativnost seštevanja: $a + b = b + a$,

(c) imamo obratno število (inverz za množenje): za vsako neničelno število obstaja tako število število a^{-1}, da je $a \cdot a^{-1} = 1$,

(d) asociativnost množenja: $(ab)c = a(bc)$,

(e) komutativnost množenja: $ab = ba$,

(f) distributivnostni zakon: $(a + b)c = ac + bc$.

Deljenje z neničelim številom je ekvivalentno množenju z njemu obratnim številom:

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b}.$$

Od tod dobimo pravila za odpravljanje dvojnih ulomkov:

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \cdot \frac{c}{b}, \quad \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}, \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Ulomek lahko tudi razširimo s poljubnim neničelnim številom a:

$$\frac{c}{d} = \frac{c \cdot a}{d \cdot a}.$$

Potenciranje realnih števil za $n \in \mathbb{N}$ je definirano s predpisom

$$a^n := a \cdot \ldots \cdot a,$$

kjer v produktu nastopa n faktorjev. Število a imenujemo **osnova**, število n pa **stopnja** potence (eksponent). Za $n = 0$ definiramo $a^0 = 1$ ($a \neq 0$). Za negativne eksponente definiramo potenciranje za $a \neq 0$ s pravilom:

$$a^{-n} := a^{-1} \cdot \ldots \cdot a^{-1}.$$

Korenjenje je inverzna operacija potenciranju. Za vsako nenegativno število a in naravno število n je n-ti koren a tako nenegativno število x, za katero velja $x^n = a$. Za lihe n lahko definiramo tudi n-ti koren za negativne a. Za n-ti koren a uporabljamo oznaki $\sqrt[n]{a}$ in $a^{\frac{1}{n}}$. S koreni definiramo potence z racionalnimi eksponenti:

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}}.$$

Za računanje s potencami veljajo pravila:

(a) $a^q b^q = (ab)^q$,

(b) $a^p a^q = a^{p+q}$,

(c) $(a^p)^q = a^{pq}$.

Primer. Poenostavi izraz

$$\frac{(a^2 b^4 c^{\frac{6}{5}})^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{5}} (\frac{b}{c^2})^{\frac{3}{5}}}{(a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{5}})^4 (b^2 c)^2}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{(a^2 b^4 c^{\frac{6}{5}})^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{5}} (\frac{b}{c^2})^{\frac{3}{5}}}{(a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{5}})^4 (b^2 c)^2} &= \frac{a^{\frac{2}{3}+\frac{2}{5}} b^{\frac{4}{3}+\frac{3}{5}} c^{\frac{6}{5\cdot 3}-2\cdot\frac{3}{5}}}{a^{\frac{4}{3}} b^{4\cdot\frac{2}{5}+4} c^2} = \\
&= a^{\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-\frac{4}{3}} b^{\frac{4}{3}+\frac{3}{5}-\frac{4\cdot 2}{5}-4} c^{\frac{6}{3\cdot 5}-\frac{2\cdot 3}{5}-2} = \\
&= a^{-\frac{4}{15}} b^{-\frac{11}{3}} c^{\frac{-14}{5}}
\end{aligned}$$

Realna števila lahko uredimo z relacijo '$<$' in predstavimo s številsko premico. Relacija '$<$' ima lastnosti:

(a) če je $a < b$, je tudi $a + c < b + c$ za vsak c,

(b) če je $a < b$ in $c > 0$, je $ac < bc$,

(c) če je $a < b$ in $c < 0$, je $ac > bc$.

Na realni osi imamo več tipov intervalov:

(a) zaprti: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$,

(b) odprti: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$,

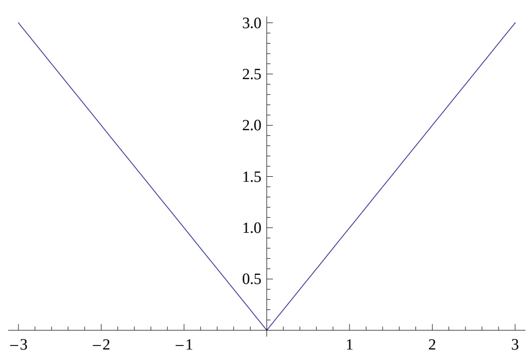
(c) polodprta intervala: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x < b\}$ in $(a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b\}$,

(d) neskončni intervali: $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x\}$, $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq b\}$, $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R},\ a < x\}$, $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R},\ x < b\}$ in $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

Absolutna vrednost realnega števila je definirana s predpisom

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} .$$

Njen graf je prikazan na sliki 1.1. Na realni osi je $|x|$ razdalja med x in iz-



Slika 1.1: Graf funkcije $y = |x|$

hodiščem; $|x-y|$ pomeni razdaljo med $x-y$ in izhodiščem oziroma razdaljo med x in y. Lastnosti absolutne vrednosti so:

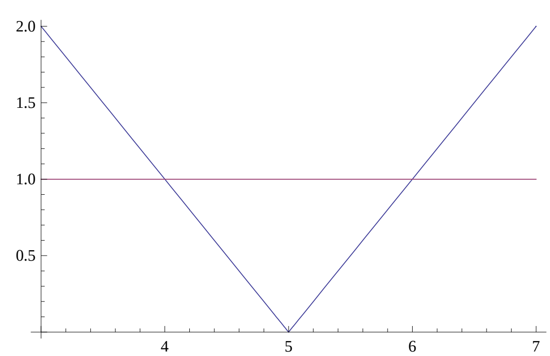
(a) $|x| \geq 0$ za vsak x,

(b) $|x| = |-x|$,

(c) $|xy| = |x||y|$,

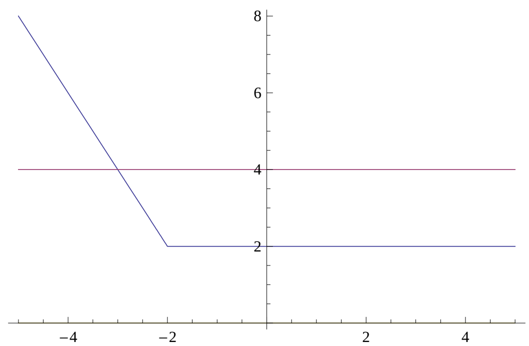
(d) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (trikotniška neenakost).

Primeri.
1. Reši neenačbo $|x-5| \leq 1$.
Rešitev. Neenačba pravi: poišči vse x, ki so od 5 oddaljeni za največ 1. Takoj ugotovimo, da so to števila na intervalu $[4,6]$. Enačbe te vrste sicer rešujemo po naslednjem postopku. Po definiciji absolutne vrednosti je $|x-5| = x-5$, če je $x \geq 5$ in $5-x$ sicer.
(a) $x-5 \geq 0$; Iz enačbe dobimo $x-5 \leq 1$, torej $x \leq 6$. Skupaj s prvim pogojem dobimo $5 \leq x \leq 6$.
(b) $x-5 < 0$; $|x-5| = 5-x \leq 1$, torej $x \geq 4$. Skupaj s prvim pogojem dobimo $4 \leq x \leq 5$. Celotna rešitev je $4 \leq x \leq 6$ ali na kratko interval $[4,6]$. Grafično neenačba pomeni, da iščemo vse točke x, pri katerih je graf funkcije $y_1 = |x-5|$ pod grafom funkcije $y_2 = 1$ (slika 1.2).



Slika 1.2: Grafa funkcij $y_1 = |x-5|$ in $y_2 = 1$

2. Reši enačbo $|x - |x+2|| = 4$.
Rešitev. Najprej odpravimo notranjo absolutno vrednost. Ločiti moramo dva primera:
(a) $x+2 \geq 0$; $|x - |x+2|| = |x-(x+2)| = 2 \neq 4$, kar pomeni, da nimamo nobene rešitve.
(b) $x+2 < 0$; Iz enačbe dobimo $|x-|x+2|| = |x-(-(x+2))| = |2x+2| = 4$ oziroma $|x+1| = 2$. Rešitev so vsa števila, ki so od -1 oddaljena za 2, torej $x = 1$ in $x = -3$. Zaradi pogoja $x+2 < 0$ je rešitev le $x = -3$. Grafično enačba pomeni, da iščemo vse točke x, pri katerih se graf funkcije $y_1 = |x+2|$ in graf funkcije $y_2 = 1$ sekata (slika 1.3).



Slika 1.3: Grafa funkcij $y_1 = |x - |x+2||$ in $y_2 = 4$

2. Kompleksna števila

Korenjenje je definirano le za nenegativna realna števila. V okviru realnih števil npr. $\sqrt{-6}$ ni definiran. Ker želimo korenjenje razširiti na vsa realna števila, vpeljemo novo količino, **imaginarno enoto** i, ki je definirana z enačbo

$$i^2 = -1.$$

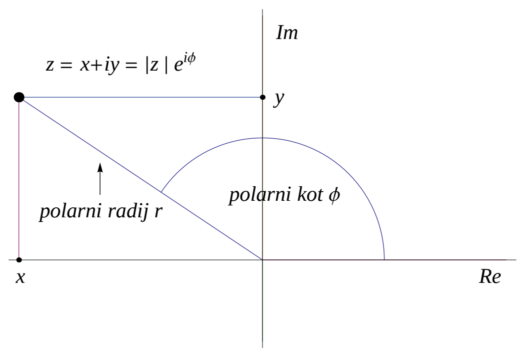
Množica **kompleksnih števil** $\mathbb{C}$ je množica vseh števil oblike $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$. Število x imenujemo **realni del** števila z, y pa **imaginarni del** števila z in ju označimo z $x = \mathrm{Re}\,(z), y = \mathrm{Im}\,(z)$. Kompleksna števila lahko predstavimo kot točke v ravnini: številu z ustreza točka $(\mathrm{Re}\,(z), \mathrm{Im}\,(z))$. **Absolutna vrednost** kompleksnega števila z je enaka oddaljenosti točke $(\mathrm{Re}\,(z), \mathrm{Im}\,(z))$ od izhodišča. Izračunamo jo s Pitagorovim izrekom:

$$|z| = \sqrt{\mathrm{Re}\,(z)^2 + \mathrm{Im}\,(z)^2}.$$

Kot φ, ki ga daljica od 0 do z oklepa z osjo x, imenujemo **polarni kot**. Takoj vidimo, da je $x = |z|\cos\varphi$ in $y = |z|\sin\varphi$, torej $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Takemu zapisu pravimo **polarni zapis**. Pogosto za izraz $(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ uporabljamo krajšo oznako

$$e^{i\varphi} := (\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

in pišemo $z = |z|e^{i\varphi}$.



Slika 1.4: Število z v polarnem in kartezičnem zapisu

Osnovni računski operaciji med kompleksnimi števili sta seštevanje in množenje. Naj bo $z = x + iy = |z|e^{i\varphi}$ in $w = u + iv = |w|e^{i\psi}$.

$$\begin{aligned} z + w &= (x + iy) + (u + iv) := (x + u) + i(y + v) \\ z \cdot w &= (x + iy)(u + iv) := xu + ixv + iyu + i^2 yv = \\ &= (xu - yv) + i(xv + yu) \end{aligned}$$

Za množenje kompleksnih števil je bolj primeren polarni zapis:

$$zw = |z||w|e^{i\varphi}e^{i\psi} = |z||w|e^{i(\varphi+\psi)}.$$

Prepričajmo se, da je $e^{i\varphi}e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}$.

$$\begin{aligned}
e^{i\varphi}e^{i\psi} &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \\
&= \cos\varphi\cos\psi + i^2\sin\varphi\sin\psi + i\sin\varphi\cos\psi + i\cos\varphi\sin\psi = \\
&= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + i(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi) = \\
&= \cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi) = e^{i(\varphi+\psi)}
\end{aligned}$$

Iz zgornjega takoj dobimo **De Moivrovo formulo**:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$$

oziroma

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}.$$

Iz tega sledi formula za potenciranje:

$$z^n = |z|^n e^{in\phi}.$$

Geometrijsko je množenje kompleksnega števila z s številom $e^{i\alpha}$ zasuk za kot α v pozitivni smeri. Za vajo se prepričajte, da za vsak α velja $|e^{i\alpha}| = 1$.

Primeri.

1. Naj bo $z = 1 + 2i$ in $w = 2 - 3i$. Izračunaj $2z + w, w^2, zw, z^{-1}$ in z/w.

$$\begin{aligned}
&2z + w = 4 + i, \\
&w^2 = (2-3i)^2 = 4 - 9 - 12i = -4 - 12i, \\
&zw = (1+2i)(2-3i) = 2 + 6 + i = 8 + i, \\
&z^{-1} = \frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1-2i}{5}, \\
&zw^{-1} = \frac{1+2i}{2-3i} = \frac{(1+2i)(2+3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{-4+7i}{13}.
\end{aligned}$$

2. Reši enačbo $|z - i| = |z - 1|$.

Rešitev. Poglejmo si najprej geometrijsko rešitev, pri kateri kompleksna števila identificiramo s točkami v kompleksni ravnini. Enačba pravi: poišči vse $z \equiv (x, y)$, ki so od točke $i \equiv (0, 1)$ oddaljene enako kot od točke $1 \equiv (1, 0)$. Vse te točke ležijo na simetrali daljice, ki povezuje $(0, 1)$ in

$(1,0)$. Zlahka se prepričamo, da je simetrala premica $x = y$. Rešitev enačbe so vsa števila oblike $t(1+i)$, $t \in \mathbb{R}$.

Poskusimo rešiti zgornjo enačbo še analitično. Če jo kvadriramo, dobimo $|z-i|^2 = |z-1|^2$. Uporabimo definicijo absolutne vrednosti in vstavimo $z = x + iy$, pa dobimo:

$$\begin{aligned} x^2 + (y-1)^2 &= (x-1)^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 - 2y + 1 &= x^2 - 2x + 1 + y^2 \\ x &= y. \end{aligned}$$

3. Poišči vsa kompleksna števila, ki rešijo enačbo $|z - i| = 3$.
Rešitev. Enačba pove, da iščemo števila, ki so od števila i oddaljena za natanko 3. V ravnini je to krožnica s središčem $(0,1)$ in radijem 3. Analitično pridemo do rešitve tako, da pišemo $z = x+iy$, enačbo kvadriramo in dobimo

$$|z-i|^2 = |x + i(y-1)|^2 = x^2 + (y-1)^2 = 9.$$

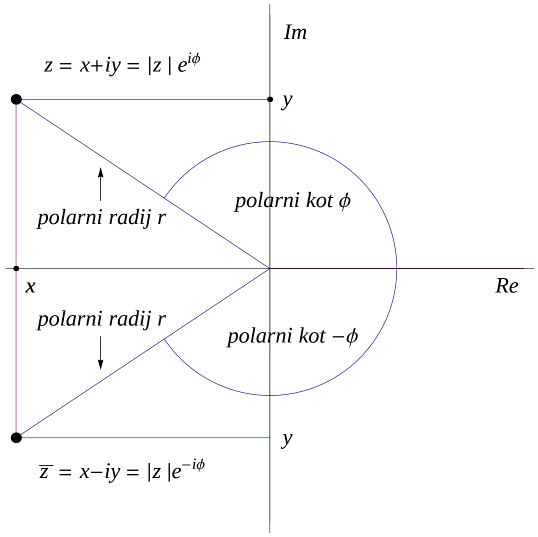
4. Poišči vsa kompleksna števila, ki ustrezajo neenačbi $|z - i| \leq 3$.
Rešitev. Enačba pove, da iščemo števila, ki so od števila i oddaljena za največ 3. V ravnini je to krog s središčem $(0,1)$ in radijem 3.

3. Konjugiranje

Konjugiranka kompleksnega števila $z = x + iy$ je število $\bar{z} = x - iy$. Grafično je operacija konjugiranja kar zrcaljenje preko realne osi. Konjugiranka $\bar{z}$ ima enak polarni radij kot z in nasproten polarni kot kot z. Velja enačba $z\bar{z} = |z|^2$. Grafični prikaz je na sliki 1.5.

4. Koreni enote

Osnovni primer korenjenja so koreni kompleksnega števila, ki je po absolutni vrednosti 1. Opazili smo, da se pri potenciranju polarni kot množi s stopnjo potence. Podobno velja za korenjenje. Oglejmo si najprej primer



Slika 1.5: Konjugiranka števila z v polarnem in kartezičnem zapisu

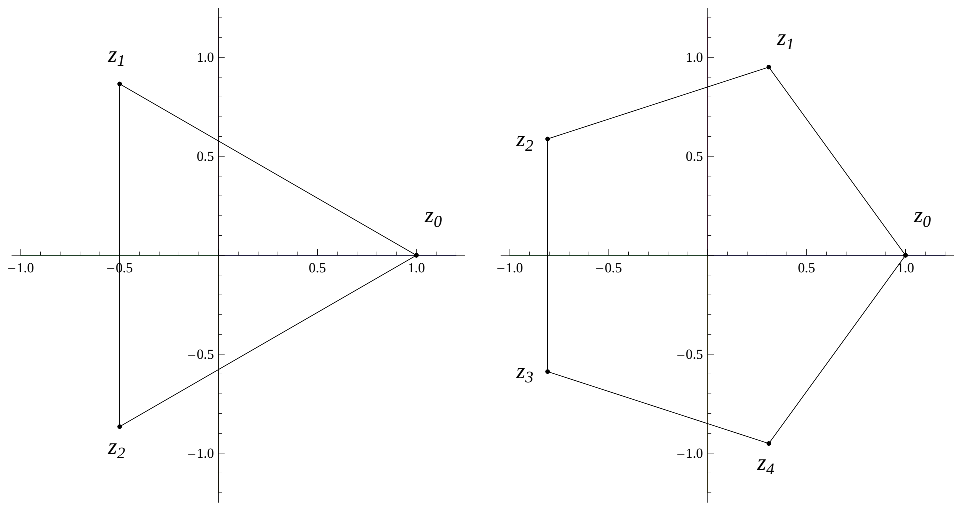
enačbe $z^3 = 1$. Takoj opazimo, da bodo vse rešitve enačbe ležale na enotski krožnici, torej bodo oblike $z = e^{i\alpha}$. Ker mora biti $z^3 = 1$, bo $3\alpha = 2k\pi$ oziroma $\alpha = 2k\pi/3, k \in \mathbb{N}$. Zaradi periodičnosti zadošča, da vzamemo $k = 0, 1, 2$. Števila 1, $e^{i2\pi/3}$, $e^{i4\pi/3}$ so tretji koreni števila 1 oziroma **tretji koreni enote.** Podobne rešitve dobimo za druga naravna števila. Na sliki 1.6 so prikazani tretji in peti koreni enote.

Definicija 1.1. *Rešitve enačbe* $z^n = 1$ *se imenujejo* **n-ti koreni enote**. *To so števila:*

$$e_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}},\ k = 0, \dots, n-1.$$

Na krožnici ta števila predstavljajo pravilni n-kotnik.

Primer. Rešimo enačbo $z^3 = i$. Spet ugotovimo, da bodo rešitve na enotski krožnici in zato oblike $z = e^{i\alpha}$. Ker mora biti $z^3 = i$, bo $3\alpha = \pi/2 + 2k\pi$ oziroma $\alpha = \pi/6 + 2k\pi/3, k \in \mathbb{N}$. Zaradi periodičnosti zadošča, da vzamemo $k = 0, 1, 2$. Dobimo rešitve $e^{i\pi/6}$, $e^{i\pi/6+2i\pi/3}$, $e^{i\pi/6+4i\pi/3}$. Opazimo, da zadošča, da najdemo le eno rešitev, preostale pa dobimo z množenjem s



(a) $z^3 = 1$ (b) $z^5 = 1$

Slika 1.6: Tretji in peti koreni enote

tretjimi koreni enote:

$$\begin{aligned} e^{i\pi/6} &= e^{\pi/6} \cdot 1, \\ e^{i\pi/6+2i\pi/3} &= e^{i\pi/6} \cdot e^{2i\pi/3} \text{ in} \\ e^{i\pi/6+4i\pi/3} &= e^{i\pi/6} \cdot e^{4i\pi/3}. \end{aligned}$$

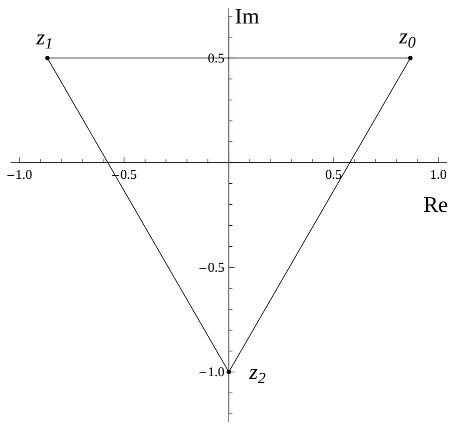
Rešitve predstavljajo zasukan pravilni trikotnik (slika 1.7).

V splošnem rešujemo enačbo $z^3 = a$, kjer je a poljubno kompleksno število. Zapišimo a in z v polarni obliki: $a = |a|e^{i\alpha}$, $z = |z|e^{i\varphi}$. Ker mora veljati $|z|^3 = |a|$, je $|z| = |a|^{1/3}$. Iz osnovne enačbe dobimo še zvezo $e^{3i\varphi} = e^{i\alpha}$. Rešitve so torej

$$\begin{aligned} z_1 &= |a|^{1/3} e^{i\alpha/3}, \\ z_2 &= |a|^{1/3} e^{i\alpha/3+2i\pi/3}, \\ z_3 &= |a|^{1/3} e^{i\alpha/3+4i\pi/3}. \end{aligned}$$

Izrek 1.2. *Naj bosta dani števili $n \in \mathbb{N}$ in $a = |a|e^{i\alpha} \in \mathbb{C}$. Rešitve enačbe $z^n = a$ so naslednje:*

$$z_k = |a|^{1/n} e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n})},\ k = 0, \ldots, n-1.$$



Slika 1.7: Rešitve enačbe $z^3 = i$

Dokaz. Rešujemo $z^n = a = |a|e^{i\alpha} = |a|e^{i(\alpha+2k\pi)}$. Po De Moivrovi formuli dobimo $z = z_k = |a|^{1/n}e^{i(\frac{\psi}{n}+\frac{2k\pi}{n})}$. Zaradi periodičnosti so v množici $\{z_k,\, k = 0, \ldots, n-1\}$ zajete vse rešitve zgornje enačbe.

Primer. Reši enačbo $z^n + 2 = 2i$.
Rešitev. Zapišimo števila v polarnem zapisu:

$$z = re^{i\varphi} \text{ in } -2+2i = 2^{3/2}e^{i(3/4\pi+2k\pi)}.$$

Vstavimo v enačbo in dobimo:

$$r^n e^{in\varphi} = 2^{3/2}e^{i(3/4\pi+2k\pi)}.$$

Ker je

$$|e^{in\varphi}| = |e^{i(3/4\pi+2k\pi)}| = 1,$$

mora biti $r^n = 2$, torej $r = 2^{3/2n}$ in $e^{in\varphi} = e^{i(3/4\pi+2k\pi)}$. Po De Moivrovi formuli zadnjo enačbo korenimo tako, da argument delimo z n :

$$e^{i\varphi} = e^{i(3/(4n)\pi+2(k/n)\pi)},$$

kar pomeni, da je

$$\varphi_k = (3/(4n) + 2(k/n))\pi, k = 1, \ldots, n.$$

Rešitve so števila

$$z_k = 2^{\frac{3}{2n}} e^{i(3/(4n)+2(k/n))\pi}.$$

5. Sistemi linearnih enačb

Okoli leta nič je na Kitajskem nastala *Matematika v devetih knjigah* (Jiŭzhāng suànshù).[1] Oglejmo si šestnajsto nalogo iz osme knjige, ki je posvečena pravilu fang cheng.

Enemu načelniku, petim uradnikom in desetim spremljevalcem postrežejo z desetimi kokošmi. Desetim načelnikom, enemu uradniku in petim spremljevalcem postrežejo z osmimi kokošmi. Petim načelnikom, desetim uradnikom in enemu spremljevalcu postrežejo s šestimi kokošmi. Vprašamo: koliko kokoši poje načelnik, koliko uradnik in koliko spremljevalec?

Odgovor: načelniku je treba postreči s 45/122 kokoši, uradniku z 41/122 kokoši in spremljevalcu s 97/122 kokoši.

Navodilo: rù fāng chéng, računaj po zhèng fùshù.

Rešitev. Načelniku namenimo x kokoši, uradniku y, spremljevalcu z kokoši in nalogo prepišimo v enačbe:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 5y & + & 10z & = & 10 \\ 10x & + & y & + & 5z & = & 8 \\ 5x & + & 10y & + & z & = & 6. \end{array}$$

Napisali smo sistem **treh linearnih enačb s tremi neznankami**. V splošnem je **sistem n linearnih enačb z m neznankami** tak:

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \dots & +a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \dots & +a_{2m}x_m = b_2 \\ & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + & \dots & +a_{nm}x_m = b_n. \end{array} \tag{1.1}$$

[1] Povzeto po F. Križanič, Nihalo, prostor in delci.

Pred reševanjem gornje naloge si oglejmo nekaj preprostih sistemov linearnih enačb. Rešujemo tako, da najprej eliminiramo prvo spremenljivko iz druge enačbe, potem pa še drugo spremenljivko iz prve enačbe, če gre.

1. Rešimo sistem

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & 3y & = & 1. \end{array}$$

Če zgornjo enačbo pomnožimo z -2 in prištejemo spodnji, dobimo:

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ & & y & = & -1. \end{array}$$

Odštejmo še drugo enačbo od prve:

$$\begin{array}{rcrcr} x & & & = & 2 \\ & & y & = & -1. \end{array}$$

Dobili smo eno samo rešitev, $x = 2$, $y = -1$.

2. Rešimo še podoben sistem

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & 2y & = & 1. \end{array}$$

Če zgornjo enačbo pomnožimo z -2 in prištejemo spodnji, dobimo:

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ & & 0 & = & -1. \end{array}$$

To pomeni, da je sistem protisloven in nima nobene rešitve.

3. Rešimo še sistem

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ 3x & + & 3y & = & 3. \end{array}$$

Če zgornjo enačbo pomnožimo z -3 in prištejemo spodnji, dobimo:

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ & & 0 & = & 0, \end{array}$$

torej ima naš sistem v resnici samo eno enačbo. Dobimo enoparametrično družino rešitev: $\{(x, 1-x),\ x \in \mathbb{R}\}$ (to je premica v ravnini).

4. Oglejmo si še malo večji sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 4 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 0. \end{array}$$

Pomnožimo prvo vrstico z -3 in jo prištejemo drugi, potem pa še z -2 in jo prištejemo tretji:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 0 & - & 2y & - & z & = & 1 \\ 0 & + & y & - & z & = & -2. \end{array}$$

Pomnožimo zadnjo enačbo z 2 in ji prištejemo drugo:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 0 & - & 2y & - & z & = & 1 \\ 0 & + & 0 & - & 3z & = & -3. \end{array}$$

Delimo zadnjo enačbo z -3, jo prištejemo drugi in odštejemo od prve:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 0 & = & 0 \\ & & -2y & + & 0 & = & 2 \\ & & & & z & = & 1. \end{array}$$

Delimo še drugo enačbo z -2 in jo odštejemo od prve:

$$\begin{array}{cccr} x & & & = 1 \\ & y & & = -1 \\ & & z & = 1. \end{array}$$

Rešitve so $x = 1$, $y = -1$ in $z = 1$.

5. Rešimo sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 4 \\ x & - & y & & & = & 2. \end{array}$$

Pomnožimo prvo vrstico z -3, jo prištejemo drugi in prvo odštejemo od tretje:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 0 & - & 2y & - & z & = & 1 \\ 0 & - & 2y & - & z & = & 1. \end{array}$$

Od tretje vrstice odštejemo drugo:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & -2y & - & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0. \end{array}$$

Opazimo, da imamo v resnici samo dve enačbi namesto treh. Delimo drugo enačbo z -2 in jo odštejemo od prve:

$$\begin{array}{ccccccr} x & + & 0 & + & (1/2)z & = & 3/2 \\ & & y & + & (1/2)z & = & -1/2 \\ & & & & 0 & = & 0, \end{array}$$

oziroma

$$\begin{aligned} x &= 3/2 - z/2 \\ y &= -1/2 - z/2. \end{aligned}$$

Spet smo dobili enoparametrično družino rešitev:

$$\{(3/2 - z/2, -1/2 - z/2, z), z \in \mathbb{R}\},$$

ki predstavlja premico v prostoru.

6. Ostal nam je še zadnji primer sistema

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 4 \\ x & - & y & & & = & 1. \end{array}$$

Pomnožimo prvo vrstico z -3 in jo prištejemo drugi in prvo odštejemo od tretje:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 0 & - & 2y & - & z & = & 1 \\ 0 & - & 2y & - & z & = & 0. \end{array}$$

Od tretje vrstice odštejemo drugo:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & -2y & - & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & -1. \end{array}$$

Zadnja enačba v sistemu pravi, da je $0 = -1$. Sistem je protisloven (nima rešitve).

Opazimo, da v resnici zadošča, da pišemo le koeficiente v enačbah, ker spremenljivke določa položaj v enačbi. Vrstni red enačb ni pomemben.

Definicija 1.3. Matrika sistema (1.1) *je* $n \times (m+1)$ *pravokotna shema števil:*

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,m} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,m} & b_n \end{array}\right].$$

Glavna diagonala je diagonala v matriki, ki gre čez elemente z enakima indeksoma.

Postopku zaporednega izločanja spremenljivk pravimo Gaussova eliminacija. Če sistem zapišemo v matriko, potem pri Gaussovi eliminaciji pišemo le koeficiente. Zapišimo 4. primer z matrikami.

4'. Matrika, ki pripada sistemu iz 4. primera je

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Pomnožimo prvo vrstico z -3 in jo prištejemo drugi, potem pa še z -2 in jo prištejemo tretji:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right].$$

Pomnožimo zadnjo enačbo z 2 in ji prištejemo drugo:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right].$$

Delimo zadnjo enačbo z -3, jo prištejemo drugi in odštejemo od prve:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Delimo še drugo enačbo z -2 in jo odštejemo od prve:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Ko dobimo v prvem delu matriko

$$I = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

preberemo rešitev v zadnjem stolpcu: $x = 1$, $y = -1$ in $z = 1$, saj sistem oblike

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right]$$

pravi, da je $x = a$, $y = b$ in $z = c$. Napišimo še postopek Gaussove eliminacije za splošni sistem n enačb z m neznankami.

Dana je matrika sistema

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,m} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,m} & b_n \end{array}\right].$$

Privzemimo, da velja $a_{11} \neq 0$. **Gaussova eliminacija**[2] je postopek, v katerem poskusimo uničiti vse elemente matrike, ki ležijo pod glavno diagonalo. Postopek je naslednji: prvo vrstico pomnožimo z $-a_{21}/a_{11}$ in

[2] Carl Friedrich Gauss (1777–1855), nemški matematik.

prištejemo drugi, potem prvo vrstico pomnožimo z $-a_{31}/a_{11}$ in prištejemo tretji itd. Dobimo matriko oblike

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,m} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2,m} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \ldots & a'_{n,m} & b'_n \end{array}\right].$$

Postopek ponovimo na manjši matriki

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a'_{22} & \ldots & a'_{2,m} & b'_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a'_{n2} & \ldots & a'_{n,m} & b'_n \end{array}\right].$$

To ponavljamo, dokler gre.

Opomba. Med Gaussovo eliminacijo lahko vrstice zamenjujemo, če nam to ustreza, saj to pomeni, da smo le zamenjali vrstni red enačb. Če je npr. $a_{11} = 0$, zamenjamo prvo vrstico s kakšno, ki ima prvi člen neničeln. Če so v prvem stolpcu same ničle, celoten stolpec izpustimo in delamo z manjšim sistemom.

Izrek 1.4. *Rezultat Gaussove eliminacije je zgornjetrikotna matrika. Število neničelnih vrstic te matrike se imenuje* **rang matrike** *in nam pove, koliko neekvivalentnih enačb je bilo v sistemu. Če dobimo kako vrstico oblike* $0 = b_i$, *kjer je* $b_i \neq 0$, *je sistem protisloven. Če je rang matrike enak* r *in je sistem z* m *neznankami rešljiv, je rešitev odvisna od* $m - r$ *prostih parametrov.*

Zdaj pa lahko rešimo nalogo z začetka. Najprej pojasnimo navodilo: ru fang cheng – zapiši matriko sistema, računaj po zheng fu shu – uporabi Gaussovo eliminacijo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 10 & | & 10 \\ 10 & 1 & 5 & | & 8 \\ 5 & 10 & 1 & | & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 10 & | & 10 \\ 0 & -49 & -95 & | & -92 \\ 0 & -15 & -49 & | & -44 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 10 & | & 10 \\ 0 & 49 & 95 & | & 92 \\ 0 & 0 & -976/49 & | & -776/49 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & | & 250/122 \\ 0 & 49 & 0 & | & 2009/122 \\ 0 & 0 & 1 & | & 97/122 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 45/122 \\ 0 & 1 & 0 & | & 41/122 \\ 0 & 0 & 1 & | & 97/122 \end{bmatrix}$$

Oglejmo si še eno nalogo iz kitajskega učbenika. Vidim šestglave štirinoge zveri in štiriglave dvonoge ptice. Zgoraj 76 glav, spodaj 46 nog. Koliko vidim ptic, koliko zveri? Odgovor: 8 zveri, 7 ptic.

Označimo število zveri z x, število ptic pa z y. Potem za število glav velja $6x + 4y = 76$ in za število nog $4x + 2y = 46$.

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & | & 76 \\ 4 & 2 & | & 46 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 6 & 4 & | & 76 \\ 0 & -4/6 & | & (46 \cdot 6 - 304)/6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 6 & 0 & | & 48 \\ 0 & 1 & | & 7 \end{bmatrix}$$

Rešitev je $x = 8$ in $y = 7$.

6. Vektorji v ravnini in prostoru

Vektor $\overrightarrow{AB}$ v $\mathbb{R}^3$ je usmerjena daljica med točkama A in B. Določata ga **velikost** (ali **dolžina** ali **norma**) in **smer**. Vektorja sta enaka, če imata enako smer in velikost. Vektorja sta **kolinearna**, če imata enako smer (ležita na isti premici) in **pravokotna** ali **ortogonalna**, če oklepata kot $\pi/2$. V pravokotnem ali kartezičnem koordinatnem sistemu vektorje identificiramo s točkami: vektor (a, b, c) pomeni usmerjeno daljico med izhodiščem in točko (a, b, c). V kartezičnem koordinatnem sistemu izračunamo dolžino vektorja $\vec{v} = (a, b, c)$ po Pitagorovem izreku:

$$|\vec{v}| = v := \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Vektorje z dolžino 1 imenujemo **enotski** ali **normirani**. Vektorje seštevamo in množimo s skalarjem (številom) $\lambda \in \mathbb{R}$ po naslednjih pravilih:

$$\begin{aligned}
&(a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2),\\
&\lambda(a, b, c) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c).
\end{aligned}$$

Za vsak vektor $\vec{v}$ obstaja nasprotni vektor $-\vec{v}$; to je vektor, za katerega velja $\vec{v} + (-\vec{v}) = 0$. V kartezičnem koordinatnem sistemu sestavljajo enotski vektorji

$$\vec{i} = (1, 0, 0),\ \vec{j} = (0, 1, 0),\ \vec{k} = (0, 0, 1)$$

standardno bazo; vsak vektor $\vec{v} = (a, b, c)$ lahko na en sam način zapišemo v obliki

$$\vec{v} = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$

Primer. Zapiši vektor $\vec{v} = (2, 1, 3)$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{v}_1 = (0, 1, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$ in $\vec{v}_3 = (1, 1, 0)$.

Rešitev. Naloga zahteva, da poiščemo taka števila a, b, c, da bo

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3,$$

torej

$$(2, 1, 0) = a(0, 1, 0) + b(0, 1, 1) + c(1, 1, 0).$$

Če enačbe zapišemo po komponentah, dobimo sistem

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Rešitve sistema so $2 = c$, $b = 0$ in $a = -1$, zato je

$$(2, 1, 0) = -1(0, 1, 0) + 2(1, 1, 0).$$

7. Skalarni produkt

Skalarni produkt vektorjev $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ je število (skalar)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Primer. Skalarni produkt vektorjev $\vec{a} = (1, -2, 3)$ in $\vec{b} = (0, 1, -3)$ je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + 3 \cdot (-3) = -11.$$

Lastnosti skalarnega produkta so:

(a) $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$ za vsak vektor $\vec{a}$ in $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$,

(b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (komutativnost),

(c) $(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (homogenost),

(d) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (distributivnost).

Dokaz lastnosti (a). $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2$. Trditev je zdaj očitna. Zapomnimo si povezavo med dolžino vektorja in skalarnim produktom vektorja s samim seboj:

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a}\vec{a}$$

Dokaz lastnosti (c). $(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = \alpha a_1 b_1 + \alpha a_2 b_2 + \alpha a_3 b_3 = \alpha(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$. $\diamondsuit$

Za vajo dokaži še preostali dve lastnosti.

Geometrijsko je skalarni produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ enak

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \varphi,$$

kjer je $\varphi \in [0, \pi]$ kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Privzemimo, da je $a \neq 0$ in označimo z bo $pr_{\vec{a}}\vec{b}$ pravokotno projekcijo vektorja $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$. Izraz $|b \cos \varphi|$ je velikost vektorja $pr_{\vec{a}}\vec{b}$,

$$|pr_{\vec{a}}\vec{b}| = |b \cos \varphi| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{a}.$$

Če je izraz $b\cos\varphi$ negativen, to pomeni, da kaže pravokotna projekcija vektorja $\vec{b}$ v nasprotno smer kot $\vec{a}$. Vektor $pr_{\vec{a}}\vec{b}$ dobimo s formulo

$$pr_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a^2}\vec{a}.$$

Primer. Izračunajmo kot med vektorjema $\vec{u} = (2,3,-1)$ in $\vec{v} = (1,1,2)$ in $pr_{\vec{u}}\vec{v}$. Skalarni produkt je $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2+3-2 = 3$, $|\vec{u}| = \sqrt{2^2+3^2+(-1)^2} = \sqrt{14}$ in $|\vec{v}| = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$. Kot je $\cos(\varphi) = 3/(\sqrt{14}\sqrt{6}) = 3/\sqrt{84} \doteq 0.3273$, tako da je $\varphi \doteq 1.2373$ radianov (približno $70.8934°$). Projekcija je

$$pr_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{3}{14}(2,3,-1).$$

Izrek 1.5. *Neničelna vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$ sta:*
(1) *kolinearna natanko tedaj, ko je $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ za neki skalar $\alpha \neq 0$ in*
(2) *ortogonalna natanko tedaj, ko je $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.*

Dokaz. (1) Prva smer. Če sta $\vec{u}$ in $\vec{v}$ kolinearna, potem je

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \pm\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|},$$

tako da je

$$\vec{u} = \pm\frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}\vec{v} = \alpha\vec{v}.$$

(1) Druga smer. Če je $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ za neki skalar $\alpha \neq 0$, potem je kosinus kota med vektorjema

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{\vec{u}\cdot(\alpha\vec{u})}{|\vec{u}||\alpha\vec{u}|} = \frac{\alpha(\vec{u}\cdot\vec{u})}{|\alpha||\vec{u}||\vec{u}|} = \pm 1.$$

(2) Skalarni produkt je

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\varphi = 0$$

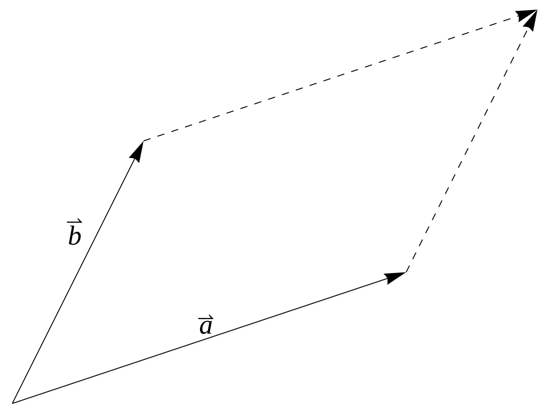
natanko tedaj, ko je

$$\cos\varphi = 0,$$

torej je $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

8. Ploščina paralelograma

Naj bo paralelogram napet na vektorjih $\vec{a} = (a_1, a_2)$ in $\vec{b} = (b_1, b_2)$ (slika 1.8).



Slika 1.8: Paralelogram, napet na vektorjih $\vec{a}$ in $\vec{b}$

Ploščina paralelograma $P(\vec{a}, \vec{b})$ je enaka produktu dolžin osnovnice in višine. Dolžina osnovnice je enaka a, višina pa je projekcija vektorja $\vec{b}$ na vektor, ki je na $\vec{a}$ pravokoten, to je npr. vektor $\vec{a}_p = (-a_2, a_1)$. Vektorja $\vec{a}_p$ in $\vec{a}$ imata enaki dolžini. Izračunajmo višino:

$$v = \frac{|\vec{a}_p \cdot \vec{b}|}{a_p} = \frac{|\vec{a}_p \cdot \vec{b}|}{a}.$$

Ploščina je:

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = a\frac{|\vec{a}_p \cdot \vec{b}|}{a} = |(-a_2, a_1)(b_1, b_2)| = |a_1 b_2 - b_1 a_2|.$$

Izraz $a_1 b_2 - b_1 a_2$ zapišemo z oznako, ki ji rečemo determinanta:

$$a_1 b_2 - b_1 a_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Po definiciji skalarnega produkta je

$$|\vec{a}_p \cdot \vec{b}| = ab \cos \varphi_p,$$

kjer je φ_p kot med $\vec{b}$ in $\vec{a}_p$. Ta kot pa je enak $\pi/2-\varphi$, kjer je φ kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Iz adicijskih izrekov dobimo

$$\cos(\pi/2-\varphi)=\sin\varphi.$$

Če povedano združimo:

$$P(\vec{a},\vec{b})=|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}|=|a_1b_2-b_1a_2|=|ab\sin\varphi|,$$

kjer je φ kot med vektorjema $\vec{b}$ in $\vec{a}$.

Primer. Dan je paralelogram $ABCD$ z oglišči $A(2,1)$, $B(4,2)$ in $C(3,3)$. Določi koordinati oglišča D, izračunaj ploščino in obseg paralelograma ter ploščino in obseg trikotnika ABC.
Rešitev. Krajevni vektor do oglišča D je

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}=(2,1)+(-1,1)=(1,2).$$

Ploščina paralelograma je

$$p=P(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})=P((2,1),(-1,1))=3,$$

njegov obseg pa

$$o=2\|\overrightarrow{AB}\|+2\|\overrightarrow{BC}\|=2(\sqrt{5}+\sqrt{2}).$$

Ploščina trikotnika je polovica ploščine paralelograma in je enaka $3/2$, njegov obseg pa je

$$o=\|\overrightarrow{AB}\|+\|\overrightarrow{BC}\|+\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{5},$$

saj je $\overrightarrow{AC}=(1,2)$.

9. Premica v prostoru

Definicija 1.6. Premica *v* $\mathbb{R}^3$ *skozi točko* $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ *in s smernim vektorjem* $\vec{s}=(s_1,s_2,s_3)$ *je množica vseh točk* $\vec{x}=(x,y,z)$ *oblike*

$$\vec{x}=\vec{a}+t\vec{s},\ t\in\mathbb{R}.$$

Enačbo premice lahko zapišemo v parametrični obliki

$$\begin{aligned} x &= a_1 + ts_1 \\ y &= a_2 + ts_2 \\ z &= a_3 + ts_3 \end{aligned}$$

ali v kanonski obliki

$$\frac{x - a_1}{s_1} = \frac{y - a_2}{s_2} = \frac{z - a_3}{s_3} \quad (s_1, s_2, s_3 \neq 0).$$

Primer. Zapiši enačbo premice skozi točki $\vec{a} = (1, 1, 1)$ in $\vec{b} = (2, 4, 2)$.
Rešitev. Najprej izračunamo smerni vektor. Iz definicije premice sledi, da mora biti smerni vektor enak

$$\vec{b} - \vec{a} = (1, 3, 1).$$

Enačba premice se glasi: $(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(1, 3, 1)$ oziroma

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{3} = \frac{z - 1}{1}.$$

10. Naloge

1.1. Izračunaj naslednje izraze: $(2 + 3i)(4 + 5i)$, $(4 + 3i)^{-1}(2 + 2i)$, $(2 + 2i)\overline{(3 + 3i)}$, $(1 + i)^6$.

1.2. Naslednja števila zapiši v polarni obliki:

$$\begin{aligned} &z_1 = 1 + i, \\ &z_2 = -i, \\ &z_3 = 1 + \sqrt{3}i, \\ &z_4 = 5. \end{aligned}$$

1.3. Reši enačbe:

$$z^3 = 1 + i,$$
$$z^2 = -i,$$
$$z^6 = 1 + \sqrt{3}i,$$
$$z^5 = 5z.$$

Rešitve tudi grafično prikaži.

1.4. Nariši množice točk:

$$|\operatorname{Re} z| \leq 1,$$
$$|z - 1 + i| = 2,$$
$$|z + 1| = |z - 1|.$$

1.5. V paralelogramu $ABCD$ so dane točke $B = (1, 2)$, $C = (2, 1)$ in $D = (3, 3)$. Določi koordinate točke A, izračunaj ploščino in obseg paralelograma in njegove notranje kote.

1.6. Določi parameter a tako, da bosta vektorja $(a, 2)$ in $(2, 2 + a)$ pravokotna.

1.7. Napiši vektorsko enačbo premice skozi točki $(4, 5)$ in $(1, 4)$.

1.8. Napiši vektorsko enačbo premice skozi točki $(1, 2, 3)$ in $(2, 1, 1)$.

1.9. Z uporabo Gaussove eliminacije reši sisteme enačb

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 14 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 11 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 11, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 4 \\ 3x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & 8y & - & 3z & = & 0, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 7z & = & -4 \\ 1x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \\ 3x & + & 7y & - & 5z & = & 5. \end{array}$$

2. Funkcije

1. Osnovni pojmi, kompozicija, inverzna funkcija

Definicija 2.1. *Naj bosta A in B podmnožici $\mathbb{R}$.* **Realna funkcija realne spremenljivke** *$f\colon A \to B$ je predpis, ki vsakemu elementu a iz množice A (imenovane* **definicijsko območje** *ali* **domena***) priredi natanko en element $f(a)$ iz množice B. Elementu $f(a) \in B$ pravimo* **slika** *elementa a, množici vseh slik $f(A) = \{f(a) : a \in A\} \subseteq B$ pa pravimo* **zaloga vrednosti**. *Funkciji sta enaki, če imata enak predpis in enako definicijsko območje.*

Primer. Funkciji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ in $g\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ nista enaki.

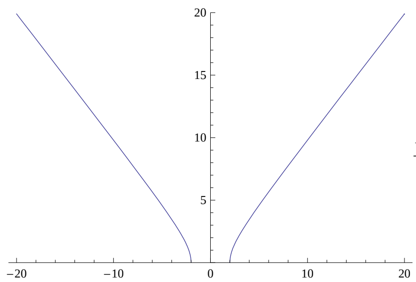
Realna funkcija je pogosto podana le s predpisom. V tem primeru se razume, da vzamemo za definicijsko območje **naravno definicijsko območje**, to je množico vseh realnih števil, za katera ima predpis smisel. Za definicijsko območje funkcije f se pogosto uporablja oznaka D_f.

Primer. Določimo naravna definicijska območja funkcij z naslednjimi predpisi: $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, $g(x) = (x - 2)/(x^2 - 4)$, $h(s) = \sqrt{s^2 + 1}$.

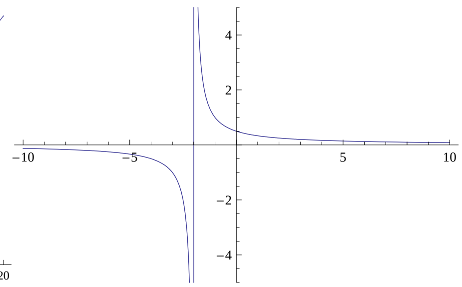
Rešitev. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \geq 0\} = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$, $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \neq 0\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$ in $D_h = \{s \in \mathbb{R} : s^2 + 1 \geq 0\} = \mathbb{R}$.

Definicija 2.2. *Realna funkcija f je na intervalu I* **naraščajoča***, če za vsaki števili $x_1, x_2 \in I$ velja*

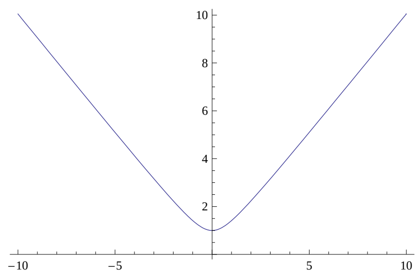
$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2),$$



(a) Graf funkcije f



(b) Graf funkcije g



(c) Graf funkcije h

Slika 2.1

in **strogo naraščajoča**, *če za vsaki števili $x_1, x_2 \in I$ velja*

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Funkcija f je na intervalu I **padajoča**, *če za vsaki števili $x_1, x_2 \in I$ velja*

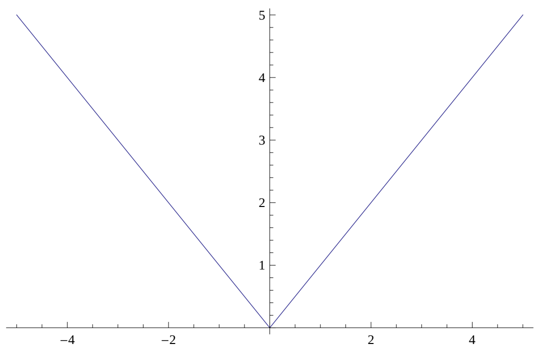
$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2),$$

in **strogo padajoča**, *če za vsaki števili $x_1, x_2 \in I$ velja*

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Primer. Funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ je strogo padajoča na intervalu $(-\infty, 0]$ in strogo naraščajoča na intervalu $[0, \infty)$. Prikazuje jo slika 2.2.

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 \leq 0 \quad &\Longrightarrow \quad |x_1| > |x_2| \\ 0 \leq x_1 < x_2 \quad &\Longrightarrow \quad |x_1| < |x_2| \end{aligned}$$



Slika 2.2: Graf funkcije $f(x) = |x|$

Definicija 2.3. *Funkcija* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je* **soda**, *če za vsak* $x \in \mathbb{R}$ *velja* $f(-x) = f(x)$. *Funkcija* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je* **liha**, *če za vsak* $x \in \mathbb{R}$ *velja* $f(-x) = -f(x)$.

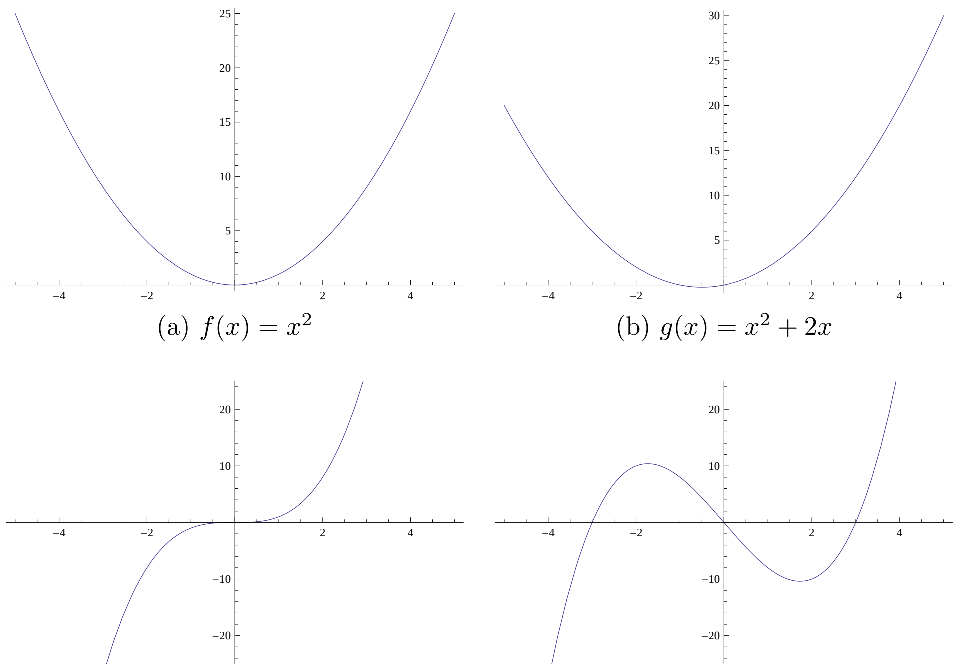
Primer. Ali so funkcije f, g, h in v, podane s predpisi $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 2x$, $h(x) = x^3$, $v(x) = x^3 - 9x$, sode ali lihe?
Rešitev. 1. $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, torej je f soda. 2. Ker je $g(-x) = (-x)^2 + 9(-x) = x^2 - 9x$ in $x^2 + 9x = g(x)$, funkcija g ni ne soda ne liha. 3. $h(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -h(x)$, torej je h liha. 4. $v(-x) = (-x)^3 - 9(-x) = -x^3 + 9x = -v(x)$, torej je v liha. Grafi funkcij so na sliki 2.3.

Posledica 2.4. *Graf sode funkcije je zrcalno simetričen prek osi* y*, graf lihe funkcije pa je simetričen prek izhodišča.*

Definicija 2.5. *Funkcija* $f\colon A \to B$ *je* **injektivna**, *če za vsaka* $a_1, a_2 \in A$ *velja:*

$$f(a_1) = f(a_2) \Longrightarrow a_1 = a_2.$$

Funkcija $f\colon A \to B$ *je* **surjektivna**, *če za vsak* $b \in B$ *obstaja* $a \in A$, *tako da je* $f(a) = b$. *Z drugimi besedami,* f *je surjektivna, če je njena zaloga vrednosti natanko* B, *tj. če je* $f(A) = B$.



(a) $f(x) = x^2$

(b) $g(x) = x^2 + 2x$

(c) $h(x) = x^3$

(d) $v(x) = x^3 - 9x$

Slika 2.3: Grafi funkcij f, g, h, v

Funkcija $f\colon A \to B$ je **bijektivna***, če je injektivna in surjektivna. Povedano drugače, f je bijektivna, če za vsak $b \in B$ obstaja natanko en element $a \in A$, tako da je $f(a) = b$.*

Primer. Ali sta funkciji $f(x) = x^2$ in $g(x) = x^3$ (slika 2.3) kot funkciji $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektivni, surjektivni, bijektivni?
Rešitev. Funkcija f ni injektivna, ker je $f(-1) = 1 = f(1)$, in ni surjektivna, ker je njena zaloga vrednosti $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$. Funkcija g pa je injektivna, ker velja $x_1^3 = x_2^3$, iz česar sledi $x_1 = x_2$, in surjektivna, ker za vsak $a \in \mathbb{R}$ obstaja $a^{1/3} \in \mathbb{R}$, torej je bijektivna.

Posledica 2.6. *Funkcija $f\colon A \to B$ je injektivna natanko tedaj, ko njen graf seka vsako premico $y = b$, $b \in B$, kvečjemu v eni točki.*

Funkcija $f\colon A \to B$ je surjektivna natanko tedaj, ko njen graf seka vsako premico $y = b$, $b \in B$, vsaj v eni točki.

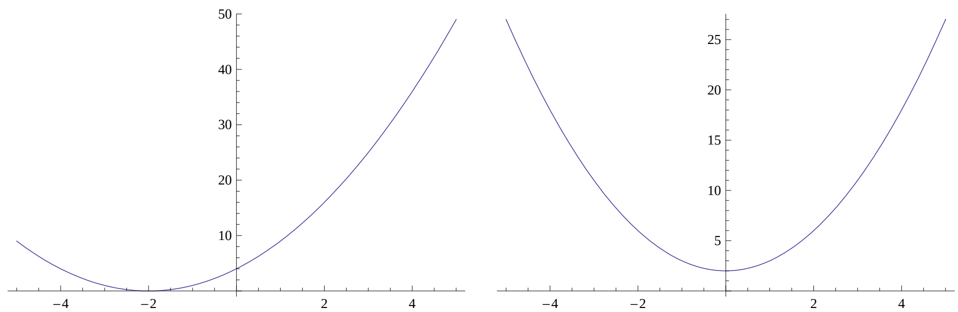
Funkcija $f\colon A \to B$ je bijektivna natanko tedaj, ko njen graf seka vsako premico $y = b$, $b \in B$, natanko v eni točki.

Opomba. . Naj bo realna funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ injektivna in definirajmo $B := f(A)$. Potem je $f : A \to B$ bijektivna.

Definicija 2.7. **Kompozitum** *$f \circ g$ funkcij $f\colon B \to C$ in $g\colon A \to B$ je funkcija $f \circ g\colon A \to C$, podana s predpisom $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.*

Opomba. V splošnem sta kompozita $f \circ g$ in $g \circ f$ različna.

Primeri.
1. Naj bosta f in g definirani s predpisoma $f(x) = x^2$ in $g(x) = x + 2$. Potem je $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 2) = (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$ in $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 2$. Grafa sta narisana na sliki 2.4.



(a) $f(g(x)) = x^2 + 4x + 4$ (b) $g(f(x)) = x^2 + 2$

Slika 2.4: Kompozita $f \circ g, g \circ f$

2. Pri prostem padu z višine 100 m je višina padajočega telesa funkcija časa: $s = 100 - 4.9t^2$. Izračunaj čas, ko je telo na dani višini.

Rešitev. Iz enačbe izrazimo

$$t = \sqrt{\frac{100 - s}{4.9}}.$$

Iščemo pozitivno rešitev. Dobili smo čas kot funkcijo višine telesa. Funkciji $f(x) = 100 - 4.9x^2$ in

$$g(x) = \sqrt{\frac{100 - x}{4.9}}$$

sta inverzni.

Definicija 2.8. *Naj bo $f\colon A \to B$ bijektivna funkcija. Njena* **inverzna funkcija** $f^{-1} : B \to A$ *je definirana z ekvivalenco*

$$f^{-1}(x) = y \Longleftrightarrow f(y) = x.$$

Opomba. . Številka -1 v oznaki f^{-1} ni eksponent, $f^{-1}(x) \neq 1/f(x)$.

Iz definicije sledi, da je

$$\begin{aligned}(f \circ f^{-1})(x) &= f(f^{-1}(x)) = f(y) = x \\ (f^{-1} \circ f)(y) &= f^{-1}(x) = y,\end{aligned}$$

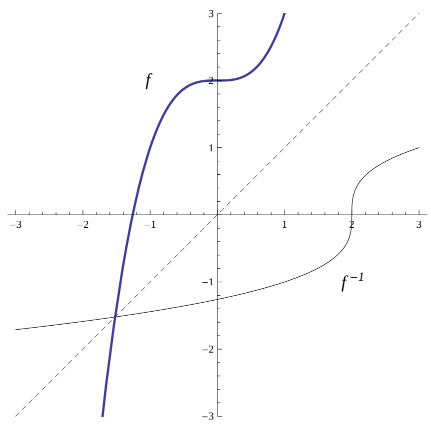
kar pomeni, da sta kompozita identiteti: $f \circ f^{-1} = id_B$ in $f^{-1} \circ f = id_A$.

Primer. Poiščimo inverz funkcije, podane s predpisom $f(x) = x^3 + 2$.
Rešitev. Postopek reševanja je naslednji. 1. Zapišemo enačbo $y = x^3 + 2$. 2. Izrazimo x (če je to mogoče): $x = \sqrt[3]{y-2}$. 3. Če želimo, da je f^{-1} funkcija neodvisne spremenljivke x, v enačbi zamenjamo spremenljivki x in y: $y = \sqrt[3]{x-2}$, tj. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$. Grafa funkcije in njenega inverza sta prikazana na sliki 2.5.

Posledica 2.9. *Graf funkcije f^{-1} je zrcalna slika grafa funkcije f, prezrcaljena prek premice $y = x$.*

2. Elementarne funkcije

2.1. Potenčne funkcije, polinomi in racionalne funkcije



Slika 2.5: Grafa funkcije $f(x) = x^3 + 2$ in njenega inverza

Potenčna funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je podana s predpisom $f(x) = x^n$, kjer je $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. **Polinom stopnje** n ($n \in \mathbb{N}_0$) je vsaka funkcija $P_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oblike

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0,\ a_n \neq 0.$$

Števila $a_0, a_1, \ldots, a_n$ so **koeficienti polinoma**, a_n je **vodilni koeficient**, $a_n x^n$ pa **vodilni člen**. Grafi nekaterih potenčnih funkcij so na sliki 2.6.

Faktorizacija polinomov

Če je x_1 ničla polinoma P_n stopnje n, potem obstaja polinom P_{n-1} stopnje $n-1$, tako da velja

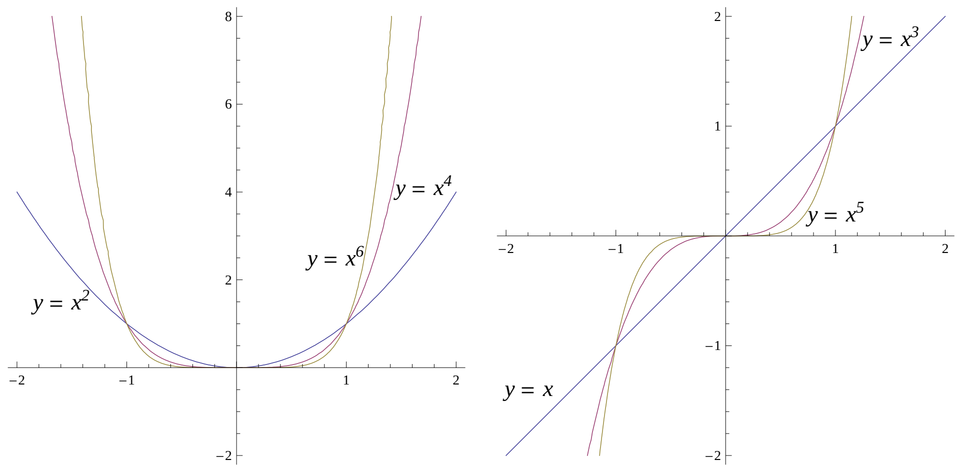
$$P_n(x) = (x - x_1)P_{n-1}.$$

Če ima polinom P_n stopnje n realne ničle $x_1, x_2, \ldots, x_n$, potem ima razcep na linearne faktorje:

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

Če v tem razcepu nastopa faktor $(x - x_k)$ natanko m-krat, potem je x_k m-kratna ničla polinoma P_n.

Izrek 2.10. *(Osnovni izrek algebre) Polinom n-te stopnje ima n kompleksnih ničel, štetih z večkratnostjo.*



(a) Sode potenčne funkcije (b) Lihe potenčne funkcije

Slika 2.6: Grafi nekaterih potenčnih funkcij

Posledica 2.11. *Kompleksne ničle polinoma z realnimi koeficienti nastopajo v konjugiranih parih, tako da ima npr. polinom tretje stopnje eno ali tri realne ničle, polinom četrte stopnje pa dve, štiri ali nobene realne ničle.*

Primeri.

1. Polinom $P(x) = 3x^3 + 3x^2 + 6x + 6$ ima samo eno realno ničlo, namreč $x_1 = -1$, ker ga razcepimo kot $P(x) = 3(x+1)(x^2+2)$, faktor (x^2+2) pa je v realnem nerazcepen. V kompleksnem je $x^2 + 2 = (x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i)$, zato je $P(x) = 3(x+1)(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)$.

2. Hornerjev algoritem. Oglejmo si iskanje ničel (oziroma deljenje polinomov) s Hornerjevim algoritmom za polinom $P(x) = 3x^3 + 3x^2 + 6x + 6$. Kandidati za celoštevilske ničle so celoštevilski delitelji prostega člena, torej $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Začnimo z 1. Napišemo tabelo, kjer v zgornjo vrsto napišemo koeficiente polinoma, druga vrsta je zaenkrat prazna, v spodnjo pa levo od navpičnice zapišemo število, za katero preverjamo, ali je ničla (v našem primeru 1), desno od navpičnice pa napišemo vodilni koeficient polinoma (v našem primeru 3):

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 3 & 6 & 6 \\ & & & & \\ \hline 1 & 3 & & & \end{array}$$

Nadaljujemo tako, da 1 pomnožimo s 3, produkt napišemo na drugo mesto (desno od navpičnice) v drugo vrsto, seštevek tega stolpca pa napišemo pod črto:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 3 & 6 & 6 \\ & & 1\cdot 3 & & \\ \hline 1 & 3 & 6 & & \end{array}$$

Postopek ponovimo z drugim in tretjim stolpcem: 1 pomnožimo s številom v spodnji vrsti v drugem stolpcu desno od navpičnice (pri nas 6) in produkt napišemo v drugo vrsto v tretji stolpec. Seštejemo števili v tretjem stolpcu in napišemo vsoto (pri nas 12) v spodnjo vrsto v tretji stolpec:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 3 & 6 & 6 \\ & & 3 & 1\cdot 6 & \\ \hline 1 & 3 & 6 & 12 & \end{array}$$

Postopek ponovimo na naslednjem stolpcu:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 3 & 6 & 6 \\ & & 3 & 6 & 1\cdot 12 \\ \hline 1 & 3 & 6 & 12 & 18 \end{array}$$

Zadnja številka pove funkcijsko vrednost $P(1)$, ki je v našem primeru enaka 18. Če se zgodi, da je ta vrednost enaka 0, smo našli ničlo. Celotna spodnja vrstica ima naslednji pomen: koeficienti za navpičnico, razen zadnjega, predstavljajo koeficiente polinoma $Q(x) = 3x^2 + 6x + 12$, za katerega velja:

$$P(x) = (x-1)Q(x) + P(1).$$

Poglejmo še postopek pri $x = -1$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 3 & 6 & 6 \\ & & -3 & 0 & -6 \\ \hline -1 & 3 & 0 & 6 & 0 \end{array}$$

Izračunali smo, da je

$$P(x) = (x+1)(3x^2+6) + 0,$$

torej je -1 ničla polinoma.

3. Ničle kvadratne funkcije dobimo s formulo:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Izraz $D = b^2 - 4ac$ je **diskriminanta** kvadratne funkcije oz. enačbe. Kvadratna funkcija ima dve različni realni ničli, če je $D > 0$; dvojno realno ničlo, če je $D = 0$; če pa je $D < 0$, kvadratna funkcija nima realnih ničel.

4. Racionalna funkcija je realna funkcija oblike $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kjer sta

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 \text{ in } Q(x) = b_m x^m + \ldots + b_0$$

polinoma, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$. Definicijsko območje je

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}.$$

Definicijsko območje je unija končnega števila disjunktnih odprtih intervalov.

Privzemimo, da polinoma P in Q nimata skupnih faktorjev (če jih imata, jih vnaprej pokrajšamo). V točki c, kjer je imenovalec $Q(c) = 0$, ima racionalna funkcija **pol**, premica $x = c$ pa je **vertikalna asimptota** racionalne funkcije. Kot primer vzemimo racionalno funkcijo $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2-1}$. Števec in imenovalec razcepimo in vidimo, da je za $x \neq -1$ funkcija f enaka

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}.$$

Pri $x = 1$ ima funkcija pol, pri $x = -1$ pa ne. Edina asimptota, vzporedna z ordinatno osjo, je $x = 1$.

Pri velikih x je racionalna funkcija 'približno enaka' kvocientu vodilnih členov polinomov P in Q :

$$A(x) = \frac{a_n x^x}{b_m x^m} = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}.$$

Funkcija A je potenčna funkcija. Izraz **asimptota** se navadno uporablja takrat, ko je $A(x)$ premica ali pa se premici približuje. Glede na vrednost izraza $n-m$ ločimo več primerov.

(a) Če je $n-m<0$, je $\lim_{x\to\pm\infty} A(x)=0$, kar pomeni, da se funkcija za velike x približuje ničli. Pravimo, da ima f **horizontalno asimptoto**, premico $y=0$.

(b) Če je $n-m=0$, je $A(x)=a_n/b_m$ konstanta in funkcija se za velike x približuje a_n/b_m, zato je premica $y=a_n/b_m$ tudi horizontalna asimptota.

(c) Če je $n-m=1$, je $A(x)=(a_n/b_m)x$ poševna premica in pravimo, da je ta premica **poševna asimptota**.

(d) Če je $n-m=k>1$, se funkcija pri velikih x vede kot potenčna funkcija $(a_n/b_m)x^k$.

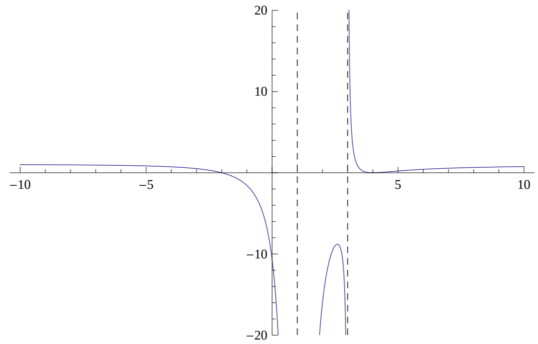
Primer. Skiciraj graf funkcije

$$r(x)=\frac{(x+2)(x-4)^2}{(x-3)(x-1)^2}=\frac{x^3-6x+32}{x^3-5x^2+7x-3}.$$

Funkcija ima ničlo -2, ki je lihe stopnje, in ničlo 4, ki je sode stopnje. Pola sta 3, ki je lihe stopnje, in 1, ki je sode. Definicijsko območje je množica $D_r=(-\infty,1)\cup(1,3)\cup(3,\infty)$. Asimptoto dobimo tako, da pogledamo člena v števcu in imenovalcu, ki imata najvišjo stopnjo:

$$A(x)=\frac{x^3}{x^3}=1.$$

Pri prehodu prek pola ali ničle sode stopnje funkcija ne spremeni predznaka, pri prehodu prek ničle ali pola lihe stopnje pa menja predznak. Njen graf prikazuje slika 2.7.



Slika 2.7: Graf funkcije r

5. Potence binoma, Pascalov trikotnik in binomski koeficienti. Izračunajmo nekaj potenc binoma $(x+a)^n$.

$$\begin{aligned}
(x+a)^0 &= 1 \\
(x+a)^1 &= 1\cdot x + 1\cdot a \\
(x+a)^2 &= 1\cdot x^2 + 2\cdot xa + 1\cdot a^2 \\
(x+a)^3 &= 1\cdot x^3 + 3\cdot x^2a + 3\cdot xa^2 + 1\cdot a^3 \\
(x+a)^4 &= 1\cdot x^4 + 4\cdot x^3a + 6\cdot x^2a^2 + 4\cdot xa^3 + 1\cdot a^4 \\
(x+a)^5 &= 1\cdot x^5 + 5\cdot x^4a + 10\cdot x^3a^2 + 10\cdot x^2a^3 + 5\cdot xa^4 + 1\cdot a^5 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Uredimo koeficiente v trikotnik, ki se imenuje Pascalov trikotnik. Vrste in stolpce štejemo od 0 naprej. V i-to vrsto pišemo koeficiente, ki jih dobimo iz potenc $(x+a)^i$. Na j-to mesto v i-ti vrsti napišemo koeficient pri a^jx^{i-j}.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

Opazimo, da je vsota dveh sosednjih koeficientov enaka koeficientu, ki je pod njima. Koeficienti Pascalovega trikotnika se imenujejo binomski koeficienti in jih lahko izračunamo s formulo. Koeficient potence $(x+a)^n$ pri členu $x^k a^{n-k}$ je število

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

kjer je $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ produkt vseh naravnih števil od 1 do n. Izrazu

$$\binom{n}{k}$$

pravimo binomski simbol.

2.2. Korenske funkcije

Korenska funkcija je inverz potenčne funkcije. Da bo potenčna funkcija $x \mapsto x^n$ injektivna, se moramo pri sodem n omejiti na interval $[0, \infty)$. Tako dobimo korensko funkcijo $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ z definicijskim območjem $D_f = [0, \infty)$, če je n sod, in z definicijskim območjem $\mathbb{R}$, če je n lih.

Funkcije, ki jih dobimo iz potenčne funkcije z operacijami seštevanje, odštevanje, množenje, deljenje in korenjenje, imenujemo **algebraične funkcije**, npr. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $g(x) = (x^4 - 16x^2)/(x\sqrt{x}) + (x-2)\sqrt[3]{x+1}$.

2.3. Eksponentna funkcija

Eksponentna funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkcija oblike $f(x) = a^x$, kjer je osnova $a > 0$. Njena zaloga vrednosti je $(0, \infty)$. Eksponentna funkcija je naraščajoča pri osnovi $a > 1$ in padajoča pri osnovi $a < 1$. Grafa funkcij $f(x) = a^x$ in $g(x) = (\frac{1}{a})^x = a^{-x}$ sta zrcalni sliki drug drugega prek ordinatne osi. Nekaj grafov eksponentnih funkcij je na sliki 2.8.

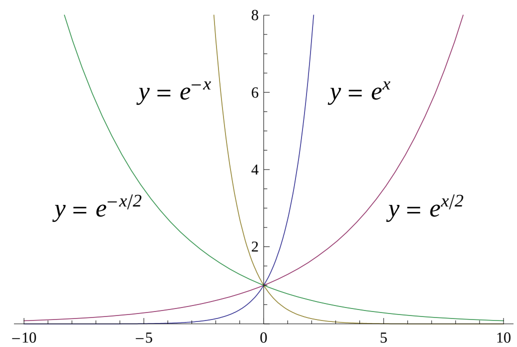
Pravila za računanje z eksponentno funkcijo:

(a) $a^0 = 1$,

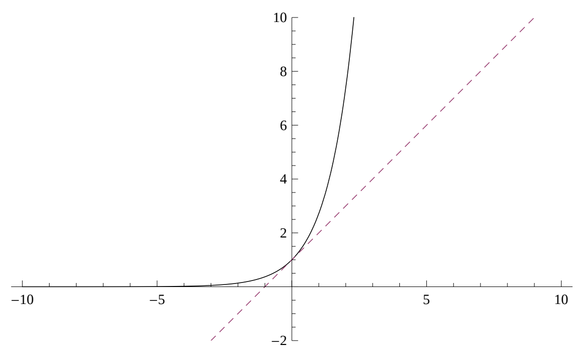
(b) $a^x b^x = (ab)^x$,

(c) $a^x a^y = a^{x+y}$,

(d) $(a^x)^y = a^{xy}$.



Slika 2.8: Grafi nekaterih eksponentnih funkcij



Slika 2.9: Graf e^x in tangenta skozi $(0,1)$

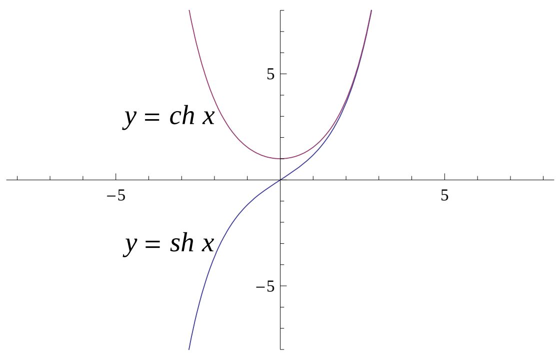
Posebno pomembna je osnova $e = 2.718281828\ldots$. To je tisti a, pri katerem ima tangenta na graf funkcije a^x skozi $(0,1)$ smerni koeficient 1 (slika 2.9). Z eksponentno funkcijo definiramo funkciji

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

prva je **hiperbolični sinus**, druga pa **hiperbolični kosinus**. Z njima definiramo še hiperbolični tangens in kotangens:

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}, \quad \mathrm{cth}(x) = \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}.$$

Grafa hiperboličnega sinusa in kosinusa sta na sliki 2.10.



Slika 2.10: Grafa hiperboličnega sinusa in kosinusa

Za vajo skiciraj eksponentni funkciji $f(x) = 2^x$ in $g(x) = (\frac{1}{2})^x$.

2.4. Logaritemska funkcija

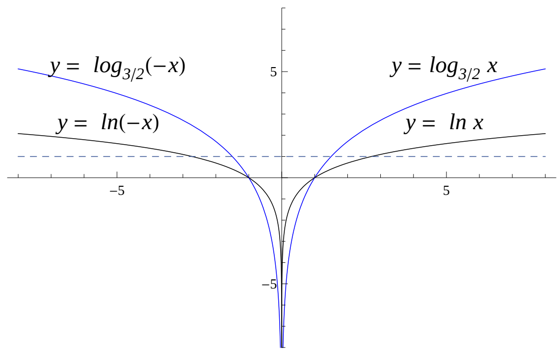
Logaritemska funkcija $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a(x)$, je inverz eksponentne funkcije, tj.

$$y = \log_a(x) \Longleftrightarrow a^y = x.$$

Pri osnovi $e = 2.718281828\ldots$ uporabljamo oznake $\log(x) = \ln(x) = \log_e(x)$ (naravni logaritem). Logaritemska funkcija je naraščajoča pri osnovi $a > 1$ in padajoča pri osnovi $a < 1$. Nekaj grafov logaritemskih funkcij je na sliki 2.11.
Pravila za računanje z logaritmi:

(a) $\log_a(a) = 1, \log_a(1) = 0,$

(b) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y),$



Slika 2.11: Grafi nekaterih logaritemskih funkcij

(c) $\log_a(x^p) = p\log_a(x)$,

(d) $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$ (sprememba osnove).

Primer. Rešimo enačbo $2^{5-3x} = 10$. Obe strani enačbe najprej logaritmiramo z osnovo 2:

$$\begin{aligned} \log_2(2^{5-3x}) &= \log_2(10) \\ (5-3x)\log_2(2) &= \log_2(10) \\ 5-3x &= \log_2(10) \\ x &= \frac{5-\log_2(10)}{3} \\ x &= \frac{5-\frac{\ln(10)}{\ln(2)}}{3} \end{aligned}$$

2.5. Kotne funkcije

Osnovni kotni funkciji sta $\sin, \cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki ju definiramo takole (slika 2.12): $\sin(x)$ je ordinata točke na enotski krožnici, ki pripada kotu x (merjenem v radianih, v pozitivni smeri od abscisne osi), $\cos(x)$ pa abscisa točke na enotski krožnici, ki pripada kotu x, pri čemer kot merimo v radianih. Grafa sinusa in kosinusa sta na sliki 2.13. Kotni funkciji tangens in kotangens sta definirani s predpisoma:

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \text{ in } \operatorname{ctg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Grafa tangensa in kotangensa sta na sliki 2.14.

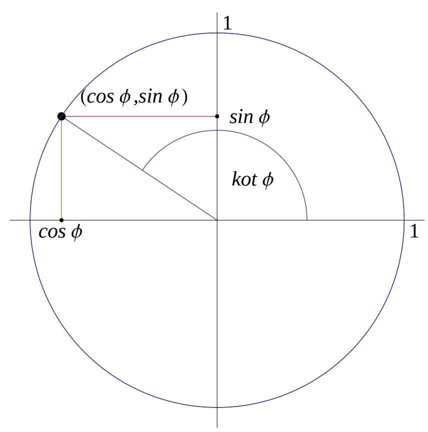
Osnovne lastnosti:

(a) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ in $1 + \operatorname{tg}^2(x) = 1/(\cos^2(x))$,

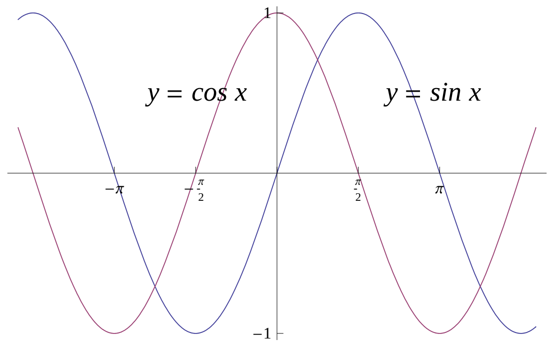
(b) sinus je liha funkcija: $\sin(-x) = -\sin(x)$, kosinus pa soda: $\cos(-x) = \cos(x)$,

(c) sin in cos imata periodo 2π, tg in ctg periodo π,

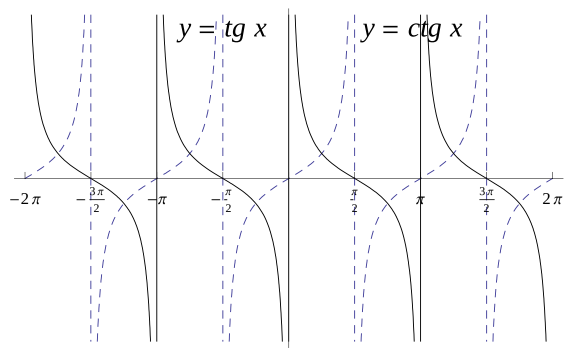
(d) adicijski izreki: $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)$ in $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$.



Slika 2.12: Definicija sinusa in kosinusa



Slika 2.13: Grafa sinusa in kosinusa

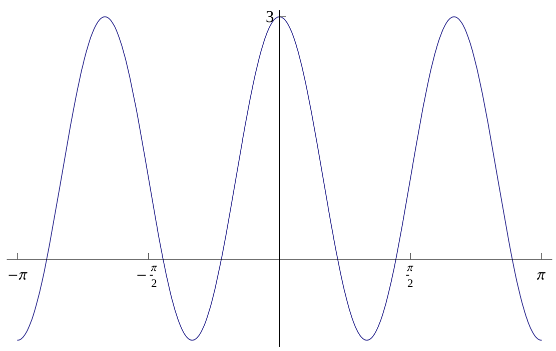


Slika 2.14: Grafa tangensa in kotangensa

Iz navedenih lastnosti sledijo formule za dvojne in polovične kote:

$$\begin{aligned}
\sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x), \\
\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x), \\
\sin^2(x) &= \frac{1-\cos(2x)}{2}, \\
\cos^2(x) &= \frac{1+\cos(2x)}{2}.
\end{aligned}$$

Primer. Skiciraj graf funkcije $f(x) = 1 - 2\cos(3x - \pi)$. Ta funkcija je poseben primer posplošenih sinusnih funkcij, tj. funkcij oblike $f(x) =$

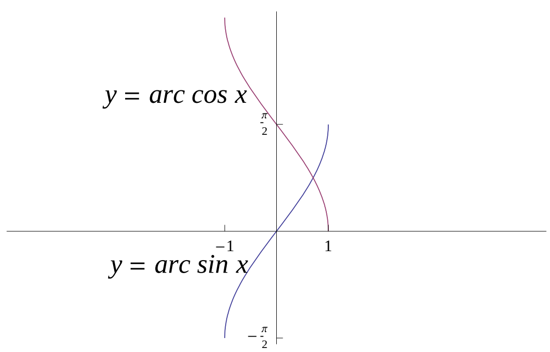


Slika 2.15: Graf funkcije $1 - 2\cos(3x - \pi)$

$a + b\sin(c(x - d))$. Pri tem je a premik v smeri osi y, b je amplituda (razteg v smeri osi y), $2\pi/c$ je perioda in d je premik v smeri osi x.

2.6. Ciklometrične funkcije

Ciklometrične funkcije so inverzne funkcije kotnih funkcij. Posebno pomembni sta arcsin in arctg .



Slika 2.16: Grafa arkus sinusa in arkus kosinusa

Definicija 2.12. *Inverzna funkcija funkcije* $\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ *je*

arkus sinus,

$$\arcsin\colon [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2].$$

Inverzna funkcija funkcije $\cos\colon [0,\pi] \to [-1,1]$ *je* **arkus kosinus**,

$$\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi].$$

Inverzna funkcija funkcije $\mathrm{tg}\colon (-\pi/2, \pi/2) \to (-\infty, \infty)$ *je* **arkus tangens**,

$$\mathrm{arctg}\colon (-\infty, \infty) \to (-\pi/2, \pi/2).$$

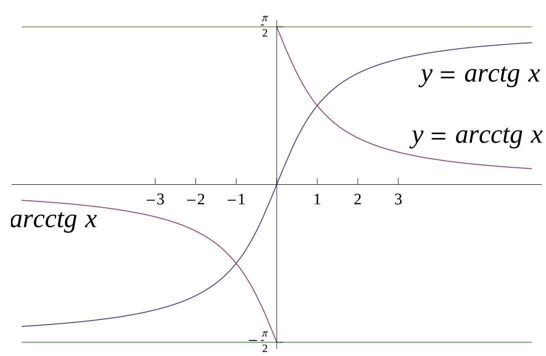
Po definiciji inverzne funkcije velja:

$$\arcsin(x) = y \iff \sin(y) = x \text{ in } \mathrm{arctg}(x) = y \iff \mathrm{tg}(y) = x.$$

Grafa arkus sinusa in arkus kosinusa sta na sliki 2.16. Za definicijo arkus kotangensa bi lahko vzeli tole. Inverzna funkcija funkcije $\mathrm{ctg}\colon (-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2) \to (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ je **arkus kotangens**,

$$\mathrm{arcctg}\colon (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \to (-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2).$$

Grafa arkus tangensa in arkus kotangensa sta na sliki 2.17.



Slika 2.17: Grafa arkus tangensa in arkus kotangensa

Primer. Poenostavimo izraz $\cos(\mathrm{arctg}(x))$. Zapišimo $y = \mathrm{arctg}(x)$. Potem je $\mathrm{tg}(y) = x$. Iščemo pa $\cos(y)$. Iz ene od osnovnih identitet dobimo

$$\cos^2(y) = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2(y)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

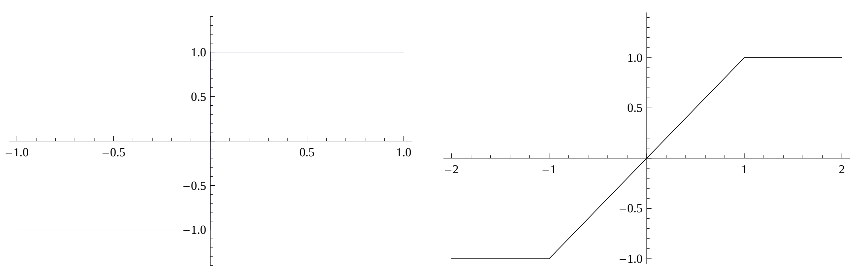
Ker je $\operatorname{arctg}(x) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, kosinus pa je na tem intervalu pozitiven, je rezultat $\cos(\operatorname{arctg}(x)) = 1/\sqrt{1+x^2}$.

Definicija 2.13. *Elementarne funkcije so vse funkcije, ki jih dobimo iz polinomov, korenskih, eksponentnih, logaritemskih, kotnih in ciklometričnih funkcij s seštevanjem, množenjem, deljenjem in komponiranjem.*

3. Zveznost in limita

Oglejmo si funkciji

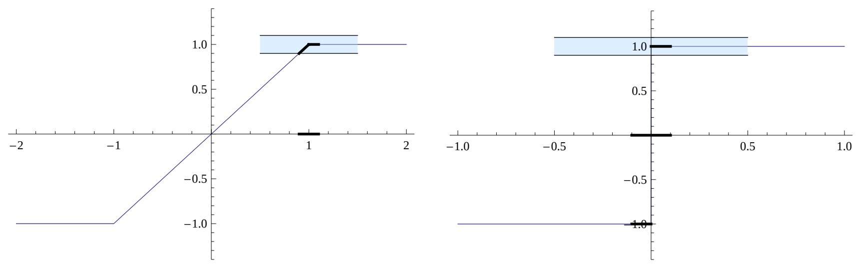
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad \text{in} \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ x, & -1 \leq x \leq 1 \\ -1, & x < -1 \end{cases} .$$



(a) Graf g (b) Graf f

Slika 2.18: Zvezna in nezvezna funkcija

Funkciji sta prikazani na sliki 2.18. Obe funkciji sta definirani na $\mathbb{R}$, le da ima f 'skok' v točki 0, g pa je 'zvezna'. Kako bi natančno definirali, kaj naj bi bila zvezna funkcija? Za zvezne funkcije naj bi veljalo: če se od točke $x \in \mathbb{R}$ premaknemo malo levo ali desno, se funkcijske vrednosti malo spremenijo. Lahko povemo tudi tako. Če okoli točke $(a, f(a))$ narišemo ozek pas, lahko najdemo interval okoli a, tako da graf funkcije nad tem intervalom v celoti leži v predpisanem pasu. Na sliki 2.19a je prikazan pas okoli točke $(1, 1)$ na grafu funkcije g. Vidimo, da je graf nad dovolj majhnim intervalom okoli $x = 1$ v celoti v pasu. Na sliki 2.19b je prikazan pas okoli točke $(0, 1)$ na grafu funkcije f. Vidimo, da graf za negativne x vedno pade iz pasu.



(a) Graf g (b) Graf f

Slika 2.19: Preverjanje zveznosti

Druga možna geometrijska razlaga zveznosti je naslednja. Če je definicijsko območje funkcije ‘v enem kosu’, mora biti graf funkcije nad tem definicijskim območjem tudi ‘v enem kosu’. Napišimo še uradno definicijo.

Definicija 2.14. *Naj bo $D \subset \mathbb{R}$ dana množica in $f \colon D \to \mathbb{R}$ realna funkcija. Pravimo, da je f* **zvezna** *v točki $x \in D$, če za vsako število $\varepsilon > 0$ obstaja tako število $\delta > 0$, da velja:*

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Funkcija f je zvezna na D, če je zvezna v vsaki točki $x \in D$.

Trditev 2.15. *Če sta funkciji f in g zvezni v točki a in če je c konstanta, potem so v točki a zvezne tudi funkcije $f + g$, cf, fg in f/g, če je $g(a) \neq 0$.*

Dokaz. Dokažimo najprej, da je za vsako neničelno konstanto c funkcija cf zvezna v a. Izberimo $\varepsilon > 0$. Ker je f zvezna v a, obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(x) - f(a)| < \varepsilon/|c|$. Za tak $\delta > 0$ je potem

$$|cf(x) - cf(a)| = |c||(f(x) - f(a))| < |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

za vsak $x \in (a - \delta, a + \delta)$.

Pokažimo, da je vsota zveznih funkcij zvezna funkcija. Izberimo $\varepsilon > 0$. Ker sta f in g zvezni v točki a, obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(x) - f(a)| < \varepsilon/2$ in $|g(x) - g(a)| < \varepsilon/2$ za $|x - a| < \delta$. Za tak $\delta > 0$ je potem:

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (f(a) + g(a))| &= |(f(x) - f(a)) + (g(x) - g(a))| \\ &\leq |f(x) - f(a)| + |(g(x) - g(a)| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Posledica 2.16. *Polinomi in racionalne funkcije so zvezne v vsaki točki svojega definicijskega območja.*

Opomba. Če ima racionalna funkcija pole, je njen graf sicer res 'iz več kosov', vendar je to zato, ker je 'iz več kosov' definicijsko območje. Spomnimo se, da točke, v katerih ima funkcija pol, niso v definicijskem območju.

Izrek 2.17. *Če je funkcija g zvezna v točki a in je funkcija f zvezna v točki $g(a)$, potem je funkcija $f \circ g$ zvezna v točki a.*

Izrek 2.18. *Vse elementarne funkcije so zvezne povsod, kjer so definirane.*

Primeri.

1. Za katere vrednosti konstante c je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} cx + 1, & \text{če je } x \leq 3 \\ cx^2 - 1, & \text{če je } x > 3 \end{cases}$$

zvezna na $(-\infty, \infty)$?

Rešitev. Oba predpisa se morata v točki 3 ujemati, torej je na levi vrednost

$$L = c \cdot 3 + 1,$$

na desni pa

$$D = c \cdot 9 - 1.$$

Ker mora biti $L = D$, je $c = 1/3$.

2. Oglejmo si funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}.$$

Funkcija v 0 ni definirana in je zvezna povsod. Ali jo lahko v 0 definiramo tako, da bo zvezna na $\mathbb{R}$? Kot prej izračunamo $L = 1$ in $D = 1$ in definiramo $f(0) = 1$. Funkcija f je zvezna na $\mathbb{R}$.

Kako pa je s funkcijo

$$g(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}?$$

Izračunamo $L = 0$ in $D = 1$. Takoj vidimo, da je funkcijo nemogoče razširiti do zvezne funkcije na $\mathbb{R}$. V prvem primeru smo izračunali, kam gre $f(x)$, ko se približujemo 0, v drugem pa, kam gre $g(x)$, ko gremo proti 0 z leve ali z desne. Pravimo, da smo računali limito $f(x)$ v točki 0 ter levo in desno limito funkcije g v točki 0. Napišimo si še definicijo.

Definicija 2.19. *Naj bodo $b < a < c$ realna števila in $D = (b, c) \setminus \{a\}$. Naj bo $f\colon D \to \mathbb{R}$ realna funkcija. Pravimo, da je število l* **limita f v** *a, in zapišemo*

$$l = \lim_{x \to a} f(x),$$

če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tako število $\delta > 0$, da velja:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Število l je **leva limita f v** *a,*

$$l = \lim_{x \to a^-} f(x),$$

če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tako število $\delta > 0$, da velja:

$$0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Število l je **desna limita** f **v** a,

$$l = \lim_{x \to a^+} f(x),$$

če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tako število $\delta > 0$, da velja:

$$0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Trditev 2.20. *Funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$ je zvezna v točki $a \in D$ natanko takrat, ko je*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Dokaz. Funkcija f je zvezna v a, zato za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da velja:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

kar po definiciji limite pomeni, da je $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$. ♢

Primeri.

1. S kalkulatorjem približno izračunaj, koliko je

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Rešitev. Sestavimo tabelo vrednosti:

x	$\sin x$	$(\sin x)/x$
1.00000	0.8414709848	0.8414709848
0.10000	0.09983341665	0.9983341665
0.01000	0.009999833334	0.9999833334
0.00100	0.0009999998333	0.9999998333
0.00010	0.00009999999983	0.9999999983
0.00001	0.00001000000000	1.0000000000

Opazimo, da se kvocient približuje 1. To je mogoče tudi korektno dokazati, vendar bomo dokaz izpustili, limito pa si bomo zapomnili:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

2. S predpisom

$$f(x) = \frac{\sqrt{(x^2+1)} - 1}{x^2(\sqrt{(x^2+1)} + 1)}$$

je definirana funkcija na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Izračunajmo $\lim_{x \to 0} f(x)$. Ali lahko funkcijo f dodatno definiramo v 0 tako, da bo nova funkcija zvezna na $\mathbb{R}$?
Rešitev. Števec in imenovalec pomnožimo z izrazom $\sqrt{(x^2+1)} + 1$ in dobimo

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(\sqrt{(x^2+1)} - 1)(\sqrt{(x^2+1)} + 1)}{x^2(\sqrt{(x^2+1)} + 1)^2} = \\ &= \frac{x^2+1-1}{x^2(\sqrt{(x^2+1)} + 1)^2} = \\ &= \frac{x^2}{x^2(\sqrt{(x^2+1)} + 1)^2}. \end{aligned}$$

Za $x \neq 0$ se funkcija f ujema s funkcijo

$$g(x) = \frac{1}{(\sqrt{(x^2+1)} + 1)^2},$$

ki pa je definirana tudi za $x = 0$. Ker je g elementarna, je zvezna povsod, torej moramo f v točki 0 definirati kot $g(0) = 1/4$.

Definicija 2.21. (Neskončne limite) *Naj bodo $b < a < c$ realna števila in $D = (b,c) \setminus \{a\}$. Naj bo $f\colon D \to \mathbb{R}$ realna funkcija. Pravimo, da ima funkcija f* **limito neskončno (∞) v** *a, in zapišemo*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty,$$

če za vsak $N > 0$ obstaja tako število $\delta > 0$, da velja:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > N.$$

Pravimo, da ima funkcija f **limito minus neskončno ($-\infty$) v** *a,*

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty,$$

če za vsak $N > 0$ obstaja tako število $\delta > 0$, da velja:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -N.$$

Analogno definiramo levo in desno limito.

Primer. Za funkcijo
$$f(x)=\frac{x+1}{x^2-1}$$
izračunajmo limite v točkah, kjer ni definirana.
Rešitev. Funkcija ni definirana v točkah ± 1. Izračunajmo levi in desni limiti funkcije v teh točkah:
$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{2},$$
torej -1 ni pol. Pri drugi točki je desna limita
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty,$$
leva pa
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty.$$

Definicija 2.22. (Limite v neskončnem) *Naj bo a realno število in naj bo $f\colon [a,\infty)\to\mathbb{R}$ realna funkcija. Pravimo, da ima funkcija f* **limito l v neskončnosti**,
$$l=\lim_{x\to\infty} f(x),$$
če za vsak $\varepsilon>0$ obstaja tako število $N>0$, da velja:
$$x>N \Rightarrow\ |f(x)-l|<\varepsilon.$$
Podobno definiramo $\lim_{x\to -\infty} f(x)$.
Funkcija f ima **limito neskončno (∞) v neskončnosti**
$$\infty=\lim_{x\to\infty} f(x),$$
če za vsak $N>0$ obstaja tako število $M>0$, da velja:
$$x>M \Rightarrow\ f(x)>N.$$

Pravila za računanje z limitami. Naj bo $l=\lim_{x\to a} f(x), m=\lim_{x\to a} f(x)$ $c\in\mathbb{R}$ poljubno število. Veljajo naslednja pravila:

(a) $\lim_{x\to a} cf(x)=c\lim_{x\to a} f(x)$,

(b) $\lim_{x\to a}(g(x)f(x)) = (\lim_{x\to a} g(x))(\lim_{x\to a} f(x))$, če l in m nista 0, ∞ ali $-\infty$,

(c) $\lim_{x\to a}(g(x)+f(x)) = \lim_{x\to a} g(x) + \lim_{x\to a} f(x)$, če l in m nista 0, ∞ ali $-\infty$.

Izrek 2.23. *Če je funkcija f zvezna v točki b in $\lim_{x\to a} g(x) = b$, potem je*

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x)) = f(b).$$

Dokaz. Pišimo $c = f(b)$. Ker je f zvezna v b, za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(y) - c| < \varepsilon$, če je $|y - b| < \delta$. Ker je $b = \lim_{x\to a} g(x)$, to pomeni, da za naš $\delta =: \varepsilon_1$ obstaja tak δ_1, da je $|b - g(x)| < \varepsilon_1$, če je $|x - a| < \delta_1$. Pokazali smo, da velja:

$$|x-a| < \delta_1 \Rightarrow \ |g(x) - b| < \varepsilon_1 = \delta \Rightarrow \ |f(g(x)) - c| < \varepsilon,$$

torej je $f(b) = c = \lim_{x\to a} f(g(x))$. $\diamondsuit$

Podobno pravilu za računanje limite kompozita funkcij je pravilo za uvedbo nove spremenljivke. Naj bo $b = \lim_{x\to a} g(x)$; limita b je lahko tudi $\pm\infty$. Potem lahko v limito

$$\lim_{x\to a} f(g(x))$$

uvedemo novo spremenljivko $g(x) = y$:

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{y\to b} f(y).$$

Primeri.
1. Naj bo $f(x) = x^{-1}\cos(x)$. Izračunajmo $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

$$|\lim_{x\to\infty} f(x)| = \lim_{x\to\infty} |x^{-1}||\cos(x)| \leq \lim_{x\to\infty} |x^{-1}| = 0,$$

zato je $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

2. Izračunajmo limito

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x}$$

z uporabo limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Zapišimo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3\sin(3x)}{3x} = \lim_{u\to 0} \frac{3\sin(u)}{u} = 3.$$

Uvedli smo novo spremenljivko $u = 3x$. Ko gre $x \to 0$, gre tudi $u \to 0$.

3. Izračunajmo limito $\lim_{x\to -1} \frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x^2-1}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1} \frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x^2-1} &= \lim_{x\to -1} \frac{(x-\sqrt{x^2+x+1})(x+\sqrt{x^2+x+1})}{(x^2-1)(x-\sqrt{x^2+x+1})} \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{x^2-(x^2+x+1)}{(x^2-1)(x-\sqrt{x^2+x+1})} \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{-(x+1)}{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{x^2+x+1})} \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{-1}{(x-1)(x-\sqrt{x^2+x+1})} = \\
&= \frac{-1}{(-1-1)(-1-1)} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

4. Z uporabo limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log(a)$$

izračunajmo limito

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x-1}{x}-2}{x-1}.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x-1}{x}-2}{x-1} &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x-1}{x(x-1)} - \frac{2}{(x-1)}\right) \\
&= -1+2 = 1
\end{aligned}$$

5. Izračunajmo limito

$$\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+x+1}).$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x-\sqrt{x^2+x+1} &= \lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2+x+1})(x+\sqrt{x^2+x+1})}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(x^2+x+1)}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{-(x+1)}{(x+\sqrt{x^2+x+1})}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{-(1+\frac{1}{x})}{(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}})}=-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

6. Z uporabo limite

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

izračunajmo limito

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Rešitev. Uvedimo novo spremenljivko $u=1/x$. Potem je

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e.$$

7. Izračunajmo limito

$$\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{\frac{1}{x-1}}.$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{x^2-1}{x}\right)^{\frac{1}{x-1}} &= \lim_{x\to 1}\left(1+\frac{x^2-1}{x}\right)^{(\frac{x}{x^2-1})(\frac{1}{x-1})(\frac{x^2-1}{x})} \\
&= \left(\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{x^2-1}{x}\right)^{\frac{x}{x^2-1}}\right)^{\lim_{x\to 1}(\frac{1}{x-1})(\frac{x^2-1}{x})} \\
&= \left(\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right)^{\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x}} \\
&= e^{\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x}} \\
&= e^2
\end{aligned}
$$

4. Ničle zveznih funkcij, bisekcija

Oglejmo si funkcijo $f(x) = xe^x - 1$. Zanima nas, kdaj je $f(x) = 0$ oziroma kdaj je $xe^x = 1$. Vrednosti funkcije v točkah $x = 0$ in $x = 1$ sta $f(0) = -1$ in $f(1) = e - 1 > 0$. Na intervalu $[0, 1]$ funkcija f spremeni znak, in ker je zvezna, bi morala imeti ničlo. Kako bi ničlo določili? Razpolovimo interval, zapišimo $x_1 = 1/2$ in izračunajmo $f(1/2) = -0.175639364$. To pomeni, da ničla leži na $[1/2, 1]$. Postopek ponovimo: $x_2 = 3/4$, $f(3/4) = 0.587750012$. Ker je $f(3/4) > 0$, ničla leži na intervalu $[1/2, 3/4]$.

interval	razpolovišče	f(razpolovišče)
$[1/2, 3/4]$	$x_3 = 5/8$	$f(x_3) = 0.167653723$
$[1/2, 5/8]$	$x_4 = 0.5625$	$f(x_4) = -0.012781755$
$[0.5625, 0.625]$	$x_5 = 0.59375$	$f(x_5) = 0.075142355$
$[0.5625, 0.59375]$	$x_6 = 0.578125$	$f(x_6) = 0.030619243$
$[0.5625, 0.578125]$	$x_7 = 0.5703125$	$f(x_7) = 0.008779997$
$[0.5625, 0.5703125]$	$x_8 = 0.56640625$	$f(x_8) = -0.002035377$
$[0.56640625, 0, 5703125]$	$x_9 = 0.568359375$	$f(x_9) = 0.003363661$
$[0.56640625, 0.568359375]$	$x_{10} = 0.567382812$	$f(x_{10}) = 0.000661982$
$[0.56640625, 0.567382812]$	$x_{11} = 0.566894531$	$f(x_{11}) = -0.000687236$
$[0.566894531, 0.567382812]$	$x_{12} = 0.567138671$	$f(x_{12}) = 0.000012762$
$[0.566894531, 0.567138671]$	$x_{13} = 0.567016601$	$f(x_{13}) = -0.000350033$
$[0.567016601, 0.567138671]$	$x_{14} = 0.567077636$	$f(x_{14}) = -0.000181408$

$[0.567077636, 0.567138671]$	$x_{15} = 0.567108153$	$f(x_{15}) = -0.00009000$
$[0.567108153, 0.567138671]$	$x_{16} = 0.567123412$	$f(x_{16}) = -0.000054926$
$[0.567123412, 0.567138671]$	$x_{17} = 0.567131041$	$f(x_{17}) = -0.000033845$
$[0.567131041, 0.567138671]$	$x_{18} = 0.567134856$	$f(x_{18}) = -0.000023305$
$[0.567134856, 0.567138671]$	$x_{19} = 0.567136763$	$f(x_{19}) = -0.000018034$
$[0.567136763, 0.567138671]$	$x_{20} = 0.567137717$	$f(x_{20}) = -0.000015399$

Približek za ničlo je $x_{20} = 0.567137717$. Za vsako decimalko potrebujemo približno tri iteracije. Naš približek je izračunan na 5 decimalk natančno. Opisani postopek se imenuje **bisekcija**.

Izrek 2.24. *Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija in naj bo $f(a)f(b) < 0$. Potem obstaja tak $c \in [a,b]$, da je $f(c) = 0$.*

Opomba. Pogoj $f(a)f(b) < 0$ pomeni, da sta $f(a)$ in $f(b)$ neničelna in različno predznačena.

Dokaz. Razpolovimo interval $[a,b]$ in označimo razpolovišče s c_1. Če je $f(c_1) \neq 0$, zavzame f na krajiščih enega od intervalov $[a,c_1], [c_1,b]$ nasprotni vrednosti. Izberimo ta interval, ga razpolovimo in razpolovišče označimo s c_2. Obdržimo spet tisto polovico, kjer ima funkcija v krajiščih različna predznaka. Interval spet razpolovimo, razpolovišče označimo s c_3 in nadaljujemo kot prej. Rezultat je zaporedje točk c_n, ki konvergira proti neki točki c, in zaporedje intervalov, ki gre prav tako proti tej točki.

Trdimo, da je $f(c) = 0$. Recimo, da to ni res in je $f(c) = d > 0$. Izberimo si $\varepsilon = d/4$. Ker je f zvezna v c, obstaja tak $\delta > 0$, da je $f((c-\delta, c+\delta)) \subset (d-\varepsilon, d+\varepsilon) = (3d/4, 5d/4)$. Od neke dovolj pozne delitve dalje pa vsi intervali ležijo v $(c-\delta, c+\delta)$, kar pomeni, da f na teh intervalih ne spremeni znaka, saj je $d > 0$. To pa je v protislovju s konstrukcijo zaporedja intervalov. $\diamondsuit$

Izrek 2.25. *Zvezna funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je omejena. Naj bo M najmanjša zgornja meja za f na $[a,b]$ in m največja spodnja meja $[a,b]$. Potem obstajata taki točki $x_M, x_m \in [a,b]$, da je $f(x_M) = M$ in $f(x_m) = m$. Zaloga vrednosti funkcije f je $[m,M]$.*

5. Naloge

2.1. Skiciraj graf funkcije

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x \geq 1 \\ x-1, & x < 1 \end{cases} .$$

Ugotovi, ali je funkcija injektivna, surjektivna, bijektivna. Če je bijektivna, izračunaj še inverz.

2.2. Skiciraj graf funkcije

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+2x, & x \geq 1 \\ -x+2, & x < 1 \end{cases} .$$

Ugotovi, ali je funkcija injektivna, surjektivna, bijektivna. Če je bijektivna, izračunaj še inverz.

2.3. Skiciraj premice $p_1 : 2x+3y = -4$, $p_2 : x+2y = 2$, $p_3 : 7x-4y = 2$, $p_4 : -3x+2y = 2$. Grafično in z Gaussovo metodo določi naslednja presečišča: $p_1 \cap p_2$, $p_1 \cap p_4$, $p_2 \cap p_4$ in $p_3 \cap p_4$. Ali se katere tri premice sekajo v isti točki?

2.4. Skiciraj grafe funkcij:

$$f_1(x) = \frac{(x-1)^2(x+3)^3(x-4)}{(x+1)(x-3)(x+2)^4},$$
$$f_2(x) = \frac{(x^2-1)(x+3)(x^2-4)}{(x+1)^2(x-3)(x+2)^2,}$$
$$f_3(x) = \frac{x^2}{x^2+1,}$$
$$f_4(x) = e^{x-1}.$$

Določi tudi asimptote, če so.

2.5. Določi definicijsko območje in skiciraj grafe funkcij:

$$\begin{aligned}
g_1(x) &= 3\sin(2x),\\
g_2(x) &= 2\cos(x+\pi),\\
g_3(x) &= \operatorname{tg}(2x-\pi/4),\\
g_4(x) &= e^x,\\
g_5(x) &= e^{-2x+1},\\
g_6(x) &= \log(x-2),\\
g_7(x) &= \log(4-x),\\
g_8(x) &= \arcsin(\sin(x)).
\end{aligned}$$

2.6. Reši enačbe:

$$\begin{aligned}
&2^{3x-4} = 4^{x+2},\\
&4\cdot 5^{2x} = 25^x 6^x,\\
&\log(2x-4) = 3,\\
&\log_2(3x+2) = 0,\\
&\log_2(3x+2) = 2.
\end{aligned}$$

2.7. Po Hornerju določi ničle polinoma $p(x) = x^6 - 12x^5 + 54x^4 - 104x^3 + 45x^2 + 108x - 108$. Začni z majhnimi celoštevilskimi delitelji. Ničle so lahko večkratne.

2.8. Po Hornerju določi ničle polinoma $p(x) = x^7 + 6x^6 + 6x^5 - 12x^4 - 19x^3 - 90x^2 - 108x + 216$. Začni z majhnimi celoštevilskimi delitelji. Ničle so lahko večkratne.

2.9. Izračunaj binomske koeficiente

$$\binom{50}{48},\ \binom{50}{2},\ \binom{10}{5},\ \binom{60}{1},\ \binom{60}{59}.$$

2.10. Z uporabo bisekcije izračunaj ničlo funkcije $x^3 - 2x + \frac{1}{2} = 0$ na intervalu $[0,1]$ na 3 decimalke natančno.

2.11. Z uporabo bisekcije reši enačbo $x\sin(x) = 10$.

3. Odvod

1. Definicija odvoda in primer

Avto pelje po cesti in vsako sekundo izmerimo njegovo prevoženo pot. Dobimo naslednje podatke:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$s(t)$	0	1	3	8	16	21	25	28	33	40

Zanimajo nas hitrosti in pospeški. Povprečna hitrost na časovnem intervalu $[t_{k-1}, t_k]$ je

$$\bar{v}_{[t_{k-1},t_k]} = \frac{s(t_k) - s(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}.$$

Recimo, da je povprečna hitrost približno enaka hitrosti na sredini intervala:

$$\bar{v}_{[t_{k-1},t_k]} \doteq v((t_k - t_{k-1})/2).$$

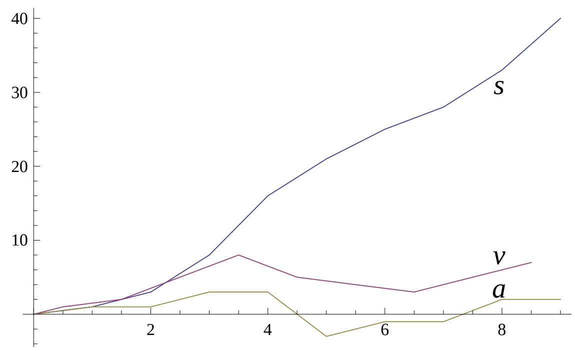
Za lažje računanje dodatno definirajmo $s(-1) = 0$. Za naše podatke dobimo naslednjo tabelo:

t	-0.5	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5
$v(t)$	0	1	2	5	8	5	4	3	5	7

Podobno naredimo še za pospešek. Povprečni pospešek je sprememba hitrosti v dani časovni enoti:

$$\bar{a}_{[t_{k-1},t_k]} = \frac{v(t_k) + v(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}.$$

Kot prej bomo povprečni pospešek enačili s pospeškom na sredini intervala. Tako dobimo tabelo:



Slika 3.1: Grafi poti, hitrosti in pospeška

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$a(t)$	1	1	3	3	-3	-1	-1	2	2

Narišimo te podatke na graf (slika 3.1).

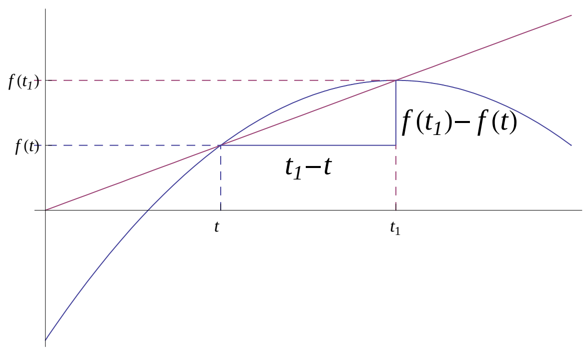
Opazimo, da je hitrost večja tam, kjer je graf poti bolj strm in da je pospešek negativen, če se hitrost manjša. Po definiciji je povprečna hitrost v točki 5.5 enaka smernemu koeficientu daljice med točkama $(5, 21)$ in $(6, 25)$. Če bi poznali funkcijo $s(t)$ za vsak t, bi lahko izračunali povprečne hitrosti za poljubno kratke časovne intervale. Manjši ko bi bil interval, bolj natančen približek za hitrost bi dobili. V limiti bi dobili pravo hitrost. Zato je hitrost enaka

$$v(t) = \lim_{t_1 \to t} \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t}.$$

Grafično to pomeni, da smo daljico oziroma premico, ki je njena nosilka in seka graf funkcije v dveh točkah (pravimo ji sekanta), premikali tako, da je bila točka $(t, s(t))$ pri miru, točko $(t_1, s(t_1))$ pa smo potiskali proti točki $(t, s(t))$. Sekanta je prešla v tangento, smerni koeficient sekante, ki mu pravimo diferenčni kvocient (slika 3.2) in je enak

$$\frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t},$$

pa je prešel v smerni koeficient te tangente. Tej količini pravimo odvod.



Slika 3.2: Diferenčni kvocient

Definicija 3.1. *Naj bo $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ zvezna funkcija, $x\in(a,b)$. Če obstaja*

$$\lim_{x_1\to x}\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x},$$

jo imenujemo **odvod** *funkcije f v točki x in označimo s*

$$f'(x)=\lim_{x_1\to x}\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}.$$

Če obstaja gornja limita, pravimo, da je funkcija f **odvedljiva** *v x. Če $f'(x)$ obstaja povsod na (a,b), pravimo, da je f odvedljiva na (a,b). Če je f' zvezna, pravimo, da je f (enkrat) zvezno odvedljiva na (a,b).*

Primeri.

Izračunaj odvode funkcij $x^n, e^x, \sin(x), x^{1/n}$ za $n\in\mathbb{N}$.

1. $f(x)=x^n$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{x_1\to x}\frac{x_1^n-x^n}{x_1-x}\\
&= \lim_{x_1\to x}\frac{(x_1-x)(x_1^{n-1}+xx_1^{n-2}+x^2x_1^{n-3}+\dots x^{n-1})}{(x_1-x)}\\
&= \lim_{x_1\to x} x_1^{n-1}+xx_1^{n-2}+x^2x_1^{n-3}+\dots x^{n-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x^{n-1} + x \cdot x^{n-2} + x^2 \cdot x^{n-3} + \ldots x^{n-1} \\
&= n x^{n-1}
\end{aligned}
$$

Izkaže se, da formula velja tudi za cele n.

2. $f(x) = e^x$:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{x_1 \to x} \frac{e_1^x - e^x}{x_1 - x} \\
&= \lim_{x_1 \to x} \frac{e^x(e^{x_1 - x} - 1)}{(x_1 - x)} \\
&= e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} \\
&= e^x.
\end{aligned}
$$

Uvedli smo spremenljivko $h = x_1 - x$ in uporabili definicijo e. Limita

$$
\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}
$$

je namreč ravno smerni koeficient tangente na graf e^h pri $h = 0$, to pa je 1 po definiciji e.

3. $f(x) = \sin(x)$:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{x_1 \to x} \frac{\sin(x_1) - \sin(x)}{x_1 - x} = \\
&= \lim_{x_1 \to x} \frac{2 \sin\left(\frac{x_1 - x}{2}\right) \cos\left(\frac{x_1 + x}{2}\right)}{(x_1 - x)} \\
&= \lim_{x_1 \to x} \frac{2 \sin\left(\frac{x_1 - x}{2}\right)}{(x_1 - x)} \lim_{x_1 \to x} \cos\left(\frac{x_1 + x}{2}\right) \\
&= \lim_{x_1 \to x} \frac{\sin\left(\frac{x_1 - x}{2}\right)}{\frac{(x_1 - x)}{2}} \cos(x) \\
&= \cos(x)
\end{aligned}
$$

4. $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{x_1 \to x} \frac{x_1^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}{x_1 - x} = \\
&= \lim_{u \to v} \frac{(u - v)}{(u^n - v^n)} \\
&= \frac{1}{\lim_{u \to v} \frac{u^n - v^n}{u - v}} \\
&= \frac{1}{n v^{n-1}} \\
&= \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} \\
&= \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1}
\end{aligned}$$

Izpeljimo nekaj pravil za odvajanje. Naj bosta f in g odvedljivi funkciji in c konstanta.

(a) Odvod konstante je 0, $c' = 0$:

$$\lim_{x_1 \to x} \frac{c - c}{x_1 - x} = 0.$$

(b) Odvajanje je homogeno, $(cf(x))' = cf'(x)$,

$$\lim_{x_1 \to x} \frac{cf(x_1) - cf(x)}{x_1 - x} = c \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = cf'(x).$$

(c) Odvod vsote: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

$$\begin{aligned}
(f(x) + g(x))' &= \lim_{x_1 \to x} \frac{(f(x_1) + g(x_1)) - (f(x) + g(x))}{x_1 - x} \\
&= \lim_{x_1 \to x} \frac{(f(x_1) - f(x))}{x_1 - x} + \lim_{x_1 \to x} \frac{(g(x_1) - g(x))}{x_1 - x} \\
&= f'(x) + g'(x)
\end{aligned}$$

(d) Odvod produkta: $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$$
\begin{aligned}
(f(x)g(x))' &= \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1)g(x_1) - f(x)g(x)}{x_1 - x} \\
&= \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1)g(x_1) - f(x)g(x_1) + f(x)g(x_1) - f(x)g(x)}{x_1 - x} \\
&= \lim_{x_1 \to x} \frac{(f(x_1) - f(x))g(x_1)}{x_1 - x} \\
&\quad + \lim_{x_1 \to x} \frac{(g(x_1) - g(x))f(x)}{x_1 - x} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}
$$

(e) Odvod kompozita: $f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$:

$$
\begin{aligned}
(f(g(x)))' &= \lim_{x_1 \to x} \frac{f(g(x_1)) - f(g(x))}{x_1 - x} \\
&= \lim_{x_1 \to x} \frac{[f(g(x_1)) - f(g(x))][g(x_1) - g(x)]}{[g(x_1) - g(x)][x_1 - x]} \\
&= \lim_{x_1 \to x} \frac{f(g(x_1)) - f(g(x))}{g(x_1) - g(x)} \lim_{x_1 \to x} \frac{g(x_1) - g(x)}{x_1 - x} \\
&= \lim_{y_1 \to y} \frac{f(y_1) - f(y)}{y_1 - y} \lim_{x_1 \to x} \frac{g(x_1) - g(x)}{x_1 - x} \\
&= f'(b)g'(x) = f'(g(x))g'(x)
\end{aligned}
$$

V predzadnji vrsti smo uvedli pisavo $g(x) = y$ in $g(x_1) = y_1$.

(f) Odvod recipročne funkcije: $((g(x))^{-1}) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$

$$
\begin{aligned}
((g(x))^{-1})' &= \lim_{x_1 \to x} \frac{\frac{1}{g(x_1)} - \frac{1}{g(x)}}{x_1 - x} \\
&= \lim_{x_1 \to x} \frac{g(x) - g(x_1)}{g(x)g(x_1)(x_1 - x)} \\
&= \frac{1}{(g(x))^2} \lim_{x_1 \to x} \frac{-(g(x_1) - g(x))}{x_1 - x} \\
&= -\frac{g'(x)}{g^2(x)}
\end{aligned}
$$

Odvod recipročne funkcije je odvod kompozita $f \circ g$, kjer je $f(y) = 1/y$. Zato je

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = (f(g(x))' = f'(g(x))g'(x) = -\frac{1}{(g(x))^2)}g'(x).$$

(g) Odvod kvocienta dobimo s kombinacijo odvoda produkta in recipročne funkcije. Formula je

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

(h) Odvod inverzne funkcije: Naj bosta I_1, I_2 odprta intervala, $f : I_1 \to I_2$ odvedljiva bijekcija in $g\colon I_2 \to\ I_1$ njena inverzna funkcija, ki naj bo tudi odvedljiva. Izberimo $a \in B$ in naj bo $f(a) = b$, $f(x) = y$. Ker sta funkciji inverzni, velja:

$$y \to\ b \Leftrightarrow x \to\ a.$$

Izračunajmo odvod funkcije g v b :

$$\begin{aligned} g'(b) &= \lim_{y\to\ b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} \\ &= \lim_{x\to\ a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} \\ &= \frac{1}{f'(a)} \\ &= \frac{1}{f'(g(b))} \end{aligned}$$

V prvotnih oznakah je

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Primeri.

1. Izračunajmo odvod funkcije $f(x) = \arcsin(x)$. Uporabimo pravilo za računanje odvoda inverzne funkcije:

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Podobno izračunamo odvod funkcije $\arccos x$ in $\operatorname{arctg} x$ in dobimo

$$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

in odvod funkcije $\log(x)$

$$(\log x)' = \frac{1}{x}.$$

2. Zapišimo enačbo tangente na graf funkcije $f(x) = \operatorname{sh}(x)$ v $x = 0$. Najprej moramo izračunati odvod v točki 0.

$$\operatorname{sh}'(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch}(x)$$

Smerni koeficient tangente je $k = \operatorname{ch}(0) = 1$. Ker gre premica skozi izhodišče, dobimo tangento $y = x$.

3. Pot v ravnini in prostoru, hitrost in pospešek. Pot v ravnini je dana s predpisom

$$\vec{s}(t) = (x(t), y(t)), \; t \in [a, b].$$

Takemu predpisu pravimo parametrizacija. Gibanje po ravnini smo tako predstavili kot gibanje v smeri osi x in smeri osi y posebej. Hitrostni vektor je definiran kot

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{s}}(t) = (x'(t), y'(t)) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)).$$

Oznaka s pikicami je posebno priljubljena pri fizikih. Vektor $\vec{v}(t)$ je tangenten na pot, njegova velikost pa je enaka hitrosti v času t,

$$v(t) = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}.$$

Če hitrostni vektor še enkrat odvajamo, dobimo pospešek:

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{s}}(t) = (x''(t), y''(t)) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)).$$

Primer št. 2. lahko rešimo z uporabo parametrizacije. Graf funkcije f zapišemo kot preslikavo $\vec{s}(x) \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definirano s predpisom

$$x \mapsto (x, f(x)).$$

Smerni vektor je

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{s}}(x) &= \lim_{x_1 \to x} \frac{\vec{s}(x_1) - \vec{s}(x)}{x_1 - x} = \\
&= \lim_{x_1 \to x} \frac{(x_1, f(x_1)) - (x, f(x))}{x_1 - x} = \\
&= \lim_{x_1 \to x} \frac{(x_1 - x, f(x_1) - f(x))}{x_1 - x} = \\
&= \left(\lim_{x_1 \to x} \frac{x_1 - x}{x_1 - x}, \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \right) = \\
&= (1, f'(x)).
\end{aligned}$$

Točka, skozi katero iščemo tangento, je $\vec{s}(0) = (0, 0)$, enačba tangente pa se glasi

$$(x, y) = (0, 0) + t(1, 1).$$

Izračunajmo hitrostni vektor in napišimo enačbo tangente na pot $\vec{s}$, parametrizirano s $\vec{s}(t) = (t\cos(t), t\sin(t))$ pri $t = \pi/2$. Hitrostni vektor je

$$\dot{\vec{s}}(t) = (\cos(t) - t\sin(t), \sin(t) + t\cos(t)).$$

Pri $t = \pi/2$ dobimo $\dot{\vec{s}}(\pi/2) = (-\pi/2, 1)$, $\vec{s}(\pi/2) = (0, \pi/2)$, enačba tangente pa je

$$(x, y) = (0, \pi/2) + t(-\pi/2, 1)$$

oziroma

$$y = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}x.$$

Podobno je s potjo v prostoru, ki je dana s predpisom

$$\vec{s}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Hitrostni vektor je definiran kot

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{s}}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)).$$

Kot prej je vektor $\vec{v}(t)$ tangenten na pot, njegova velikost pa je enaka hitrosti v času t,

$$v(t) = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}.$$

Če hitrostni vektor še enkrat odvajamo, dobimo pospešek:

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{s}}(t) = (x''(t), y''(t), z''(t)) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)).$$

4. Pod katerim kotom se sekata grafa funkcij

$$f_1(x) = e^x \text{ in } f_2(x) = -\frac{1}{3}(x+1)^3 + \frac{4}{3}?$$

Rešitev. Kot med grafoma v presečišču je enak kotu med tangentama na grafa. Takoj vidimo, da je preseščišče v točki $(0, 1)$. Izračunamo smerna koeficienta: $k_1 = 1$, $k_2 = -1$.

$$\mathrm{tg}(\varphi) = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = \frac{2}{2} = 1$$

Grafa se sekata pod kotom $\varphi = \pi/2$.

Nalogo lahko rešimo tudi z uporabo hitrostnih vektorjev. Grafa funkcij imata parametrizaciji

$$\vec{s}_1(x) = (x, f_1(x)) \text{ in } \vec{s}_2(x) = (x, f_2(x)).$$

Smerna vektorja tangent sta hitrostna vektorja, to sta

$$\dot{\vec{s}}_1(t) = (1, f_1'(x)) = (1, e^x) \text{ in } \dot{\vec{s}}_2(t) = (1, f_2'(x)) = (1, -(x+1)).$$

V presečišču sta to vektorja $(1, 1)$ in $(1, -1)$, kot med njima pa je $\pi/2$, saj je skalarni produkt enak 0.

Tabela odvodov

$f(x)$	$f'(x)$
x^a	ax^{a-1}
$\log ax$	$\frac{1}{x}$
e^{ax}	ae^{ax}
$\sin ax$	$a \cos ax$
$\cos as$	$-a \sin ax$

$f(x)$	$f'(x)$
$\operatorname{sh} ax$	$a \operatorname{ch} ax$
$\operatorname{ch} ax$	$a \operatorname{sh} ax$
$\operatorname{tg} ax$	$\frac{a}{\cos^2 ax}$
$\operatorname{ctg} ax$	$-\frac{a}{\sin^2 ax}$
$\arcsin ax$	$\frac{a}{\sqrt{1-(ax)^2}}$
$\arccos ax$	$\frac{-a}{\sqrt{1-(ax)^2}}$
$\operatorname{arctg} ax$	$\frac{a}{1+(ax)^2}$

2. Višji odvodi, odvod implicitne funkcije

Definicija 3.2. *Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija. Če je tudi funkcija $f'(x)$ odvedljiva, pravimo, da je $(f'(x))'$* **drugi odvod** *f. Drugi odvod označimo s $f''(x)$. Postopek lahko ponovimo: če je $f''(x)$ odvedljiva, je $f'''(x) = f^{(3)}(x)$* **tretji odvod** *f itd. Če so odvodi $f'(x), \ldots, f^{(k)}(x)$ zvezni, pravimo, da je funkcija* **k-krat zvezno odvedljiva.**

Primeri.
1. Izračunaj vse odvode funkcije $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.
Rešitev.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 2x + 1, \\ f''(x) &= 6x + 2, \\ f^{(3)}(x) &= 6, \\ f^{(4)}(x) &= 0, \\ f^{(n)}(x) &= 0, \text{ za vsak } n \geq 4 \end{aligned}$$

2. Izračunaj prvi in drugi odvod funkcije

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}.$$

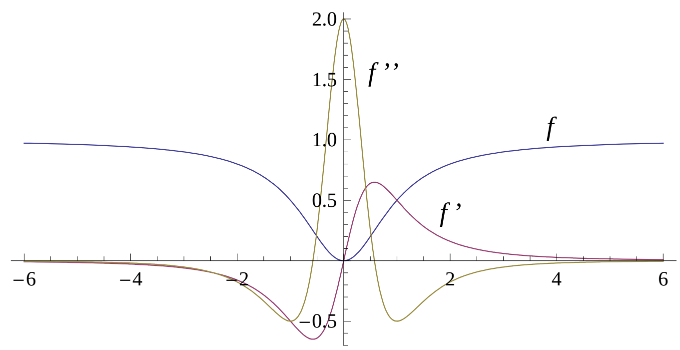
Rešitev.

$$f'(x) = -\frac{2x^3}{(1 + x^2)^2} + \frac{2x}{1 + x^2} = \frac{2x}{(1 + x^2)^2}$$

in

$$f''(x) = \frac{2-6x^2}{(1+x^2)^3}$$

Grafi so prikazani na sliki 3.3.



Slika 3.3: Grafi funkcije $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ in njenih odvodov

Včasih se zgodi, da imamo opravka s krivuljo v prostoru, ki je podana implicitno, npr. $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 1$, radi pa bi izračunali tangento na krivuljo v neki točki, recimo v $(1/4, 1/4)$. Res je, da ne vemo, kako se y izraža z x, vendar pa lahko predpostavimo, da je $y = y(x)$. Vstavimo v enačbo in odvajamo:

$$10x + 6y(x) + 6xy'(x) + 10y(x)y'(x) = 0.$$

Izrazimo $y'(x)$:

$$y'(x) = -\frac{10x + 6y(x)}{6x + 10y(x)} = -\frac{\frac{16}{4}}{\frac{16}{4}} = -1.$$

Tangenta ima smerni koeficient -1, gre skozi $(1/4, 1/4)$. Njena enačba je:

$$y = -x + \frac{1}{2}.$$

3. Naloge

3.1. Določi definicijska območja in izračunaj odvode funkcij:

$$f_1(x) = x^3 - 9x^2,$$
$$f_2(x) = 4x - 4x^2 - x^3,$$
$$f_3(x) = (x^2 - 4x + 4)^{\frac{1}{4}},$$
$$f_4(x) = \cos(x)(\sin(x))^{\frac{1}{3}},$$
$$f_5(x) = (\cos(x))^{\frac{1}{4}},$$
$$f_6(x) = 2\cos(3x) - 1,$$
$$f_7(x) = -\sin(2x + \pi),$$
$$f_8(x) = 2x\,\mathrm{tg}(x/4),$$
$$f_9(x) = x^2 e^{2x+1} + 3,$$
$$f_{10}(x) = e^{3x^2} - 2,$$
$$f_{11}(x) = \log(5x + 1),$$
$$f_{12}(x) = 2\log(x) + 1,$$
$$f_{13}(x) = \log(x^3 - 9x^2).$$

3.2. Ugotovi, pod katerimi koti krivulja $y = x^2 + x - 2$ seka os x.

3.3. Ugotovi, pod katerimi koti krivulja $y = x^2 - x - 2$ seka os x.

3.4. Ugotovi, pod katerimi koti se sekata krivulji $y = x^2 - x - 2$ in $y = -x^2 + x + 2$.

4. Uporaba odvoda

1. Približno računanje

Naj bo funkcija f odvedljiva v okolici x. Po definiciji odvoda je

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \doteq f'(x)$$

za vsak x_1 blizu x. Iz te zveze dobimo formulo za računanje približkov

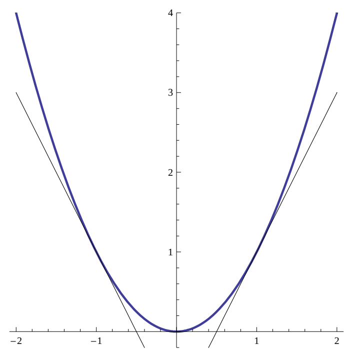
$$f(x_1) \doteq f(x) + f'(x)(x_1 - x).$$

Primer. Izračunajmo približek za $\sqrt{4.01}$. Zapišimo $f(x) = \sqrt{x}$. Po zgornjem je $f(4+0.01) = f(4)+f'(4)0.01 = 2+(1/4)0.01 = 2.0025$. Kalkulator da rezultat $\sqrt{4.01} = 2.002498439...$ Zmotili smo se za $R = 0.000001561$.

2. Naraščanje in padanje funkcij, ekstremi

Vemo, da je funkcija $f(x) = x^2$ na pozitivni strani osi x naraščajoča in da imajo za pozitivne x vse tangente na graf f pozitivne smerne koeficiente. Na negativni strani pa je funkcija padajoča, smerni koeficienti tangent pa so negativni (slika 4.1). Domnevamo lahko, da imajo funkcije na območju naraščanja pozitivne odvode, na območju padanja pa negativne odvode.

Izrek 4.1. *Naj bo $f\colon D \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija in $a \in D$ poljubna točka. Če je $f'(a) > 0$, je funkcija f v (dovolj majhni) okolici a strogo naraščajoča, če pa je $f'(a) < 0$, je f v dovolj majhni okolici strogo padajoča.*



Slika 4.1: Graf funkcije $f(x) = x^2$ z dvema tangentama

Dokaz. Naj bo $f'(a) > 0$. Po definiciji je

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

zato mora biti diferenčni kvocient za vse x dovolj blizu a tudi pozitiven. Za vsak x dovolj blizu a velja:

(a) če je $x > a$, mora biti tudi $f(x) > f(a)$, da bo kvocient pozitiven,

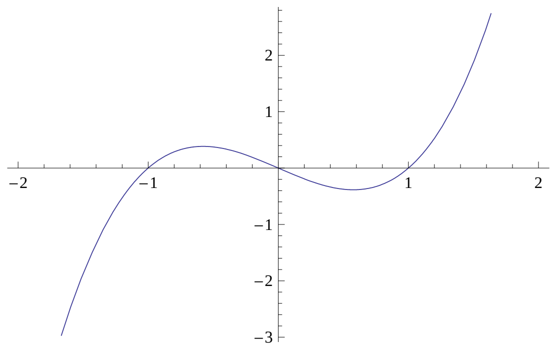
(b) če je $x < a$, mora biti tudi $f(x) < f(a)$.

Zaradi zveznosti odvoda lahko enak sklep naredimo, če namesto a vzamemo kako drugo točko b iz majhnega intervala okoli a, na katerem je f' pozitiven.

Na podoben način dokažemo, da je funkcija strogo padajoča, če je odvod negativen. $\diamondsuit$

Opomba. Izrek ne pravi, da ima funkcija, ki je naraščajoča, pozitiven odvod. Funkcija $f(x) = x^3$ je povsod strogo naraščajoča, vendar je $f'(0) = 0$.

Radi bi ugotovili, v katerih točkah ima funkcija lokalne ekstreme (lokalne minime in maksime), npr. funkcija $f(x) = x^3 - x$ (slika 4.2). Pri lokalnem minimu se vrednosti, če gremo malo levo ali desno od točke, kjer je lokalni minimum, kvečjemu zvečajo, pri lokalnem maksimu pa zmanjšajo. Funkcija ima v točki a **lokalni maksimum (minimum)**, če obstaja tak majhen interval okoli a, $I = (a-\delta, a+\delta)$, da velja $f(x) \leq f(a)$ za vsak $x \in I$ (oziroma $f(x) \geq f(a)$ za vsak $x \in I$ v primeru minima). Z grafa vidimo, da ima funkcija v lokalnih ekstremih vodoravne tangente, da je torej $f'(c) = 0$, če je v c lokalni minimum ali maksimum.



Slika 4.2: Graf funkcije $f(x) = x^3 - x$

Izrek 4.2. *Naj bo $f\colon D \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija in naj ima v točki a lokalni maksimum ali minimum. Potem je $f'(a) = 0$.*

Dokaz. Recimo, da je $f'(a) \neq 0$. Če je $f'(a) > 0$, je funkcija v okolici a strogo naraščajoča, če je $f'(a) < 0$, pa strogo padajoča, zato ne more imeti lokalnega ekstrema. $\diamondsuit$

Opomba. Če je $f'(a) = 0$, ni nujno, da ima f v a ekstrem. Funkcija $f(x) = x^3$ ima v $a = 0$ odvod 0, pa je povsod naraščajoča.

Ali lahko iz odvodov funkcije ugotovimo, ali imamo v točki a, kjer je $f'(a) = 0$, lokalni maksimum ali minimum? Recimo, da ima funkcija f v a lokalni maksimum. Potem je $f'(a) = 0$, in ker imamo opravka z maksimom, je f levo od a naraščajoča, desno od a pa padajoča. To pa nam da informacijo o prvem odvodu: prvi odvod je levo od a pozitiven, desno od a negativen, v a pa ima ničlo. To pa pomeni, da je funkcija $f'(x)$ padajoča v dovolj majhni okolici a. Vemo, da so funkcije z negativnim odvodom padajoče, zato bi pričakovali, da mora biti $f''(a) < 0$.

Izrek 4.3. *Naj bo f dvakrat zvezno odvedljiva in naj ima v a lokalni ekstrem. Če je $f''(a) < 0$, ima funkcija lokalni maksimum, če pa je $f''(a) > 0$, ima funkcija lokalni minimum.*

Dokaz. Naj bo $f''(a) < 0$. To pomeni, da je $f'(x)$ v okolici a strogo padajoča, in ker je $f'(a) = 0$, mora biti $f'(x) > 0$ za $x < a$ in $f'(x) < 0$ za $x > a$. Z drugimi besedami: funkcija f najprej narašča, potem pa pada, zato je lokalni ekstrem maksimum. Če pa je $f''(a) > 0$, je $f'(x)$ v okolici a strogo naraščajoča, in ker je $f'(a) = 0$, mora biti $f'(x) < 0$ za $x < a$ in $f'(x) > 0$ za $x > a$. Z drugimi besedami: funkcija f najprej pada, potem pa narašča, zato je lokalni ekstrem minimum. $\diamondsuit$

Trditev 4.4. *Zvezno odvedljiva funkcija $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ zavzame ekstreme ali v krajiščih intervala ali pa v točkah na (a, b), kjer je odvod enak* 0.

Primeri.
1. Določi ekstreme funkcije $f(x) = x^3 - x$ na intervalu $[-2, 1]$.
Rešitev. Vrednosti v krajiščih: $f(-2) = -6$, $f(1) = 0$. Kandidatke za lokalne ekstreme so: $f'(x) = 3x^2 - 1 = 0$, torej $x = \pm\sqrt{3}/3$; $f(\sqrt{3}/3) = -2\sqrt{3}/9$ in $f(-\sqrt{3}/3) = 2\sqrt{3}/9$. Minimum je -6, maksimum pa $2\sqrt{3}/9$.

2. Skozi točko $(1, 2)$ v ravnini potegni premico, ki od prvega kvadranta odreže trikotnik. Med vsemi premicami take vrste poišči tisto, pri kateri je ploščina trikotnika najmanjša.
Rešitev. Očitno mora imeti premica negativni smerni koeficient: $y(x) = -kx + n, k > 0$. Ker gre skozi $(1, 2)$, mora biti $2 = -k + n$, torej je $y = -kx + 2 + k$. Odsek na osi x je dolg $a = 2/k + 1$, odsek na osi y pa $b = 2 + k$. Ploščina je zato funkcija smernega koeficienta:

$$P(k) = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(2/k + 1)(2 + k) = \frac{1}{2}\frac{(2 + k)^2}{k}.$$

Izračunajmo odvod:

$$\begin{aligned}
P'(k) &= \frac{1}{2}\frac{2(2+k)k-(2+k)^2}{k^2} \\
&= \frac{1}{2}(2+k)\frac{2k-(2+k)}{k^2} \\
&= \frac{1}{2}(2+k)\frac{k-2}{k^2} = 0.
\end{aligned}$$

Ker je funkcija definirana le za $k > 0$, dobimo rešitev $k = 2$. Prepričajmo se, da ima funkcija v tej točki res minimum:

$$\lim_{k\to\infty} P(k) = \lim_{k\to 0} P(k) = \infty,$$

funkcija ima en sam lokalni ekstrem, ki mora biti minimum, $P(2) = 4$.

3. Konveksnost in konkavnost, prevojne točke, skiciranje grafov

Definicija 4.5. *Naj bo $f\colon D \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Pravimo, da je f* **konveksna na intervalu** $[a, b]$, *če za vsak par točk $c, d \in [a, b]$ velja: daljica od $(c, f(c))$ do $(d, f(d))$ leži nad grafom funkcije f. Funkcija f je* **konkavna na intervalu** $[a, b]$, *če za vsak par točk $c, d \in [a, b]$ velja: daljica od $(c, f(c))$ do $(d, f(d))$ leži pod grafom funkcije f. Funkcija f ima* **prevoj** *v točki c, če je levo od c konveksna, desno od c pa konkavna ali obratno.*

Primer. Funkcija $f(x) = x^2$ je konveksna; funkcija $f(x) = x^3$ je konveksna na $[0, \infty)$, konkavna na $(-\infty, 0]$, točka 0 pa je prevojna točka.

Podobno sklepanje, kot smo ga uporabili za klasifikacijo ekstremnih točk, lahko uporabimo za ugotavljanje, kje je funkcija konveksna ali konkavna. Funkcija $f(x) = x^2$ je konveksna, drugi odvod ima povsod pozitiven. Funkcija $f(x) = x^3$ pa ima drugi odvod pozitiven na $(0, \infty)$, negativen je na $(-\infty, 0)$, v prevojni točki pa je $f''(0) = 0$.

Izrek 4.6. *Naj bo $f\colon D \to \mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljiva. Če je $f''(x) > 0$ na intervalu (a,b), je f na (a,b) konveksna; če je $f''(x) < 0$ na intervalu (a,b), je f na (a,b) konkavna. Če $f''(x)$ v točki a spremeni znak, ima f v a prevoj.*

Primer. Funkcija $f(x) = x^4$ ima drugi odvod enak $f''(x) = 12x^2$. V točki 0 ima drugi odvod ničlo, vendar ne spremeni znaka, zato 0 ni prevojna točka.

Primeri.
1. Skiciraj graf funkcije

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Rešitev. Izračunati je treba ničle, ekstreme, prevojne točke, območja naraščanja in padanja, območja konveksnosti in konkavnosti ter asimptote, če so. Ničla je le $x = 0$. Za ekstreme in območja naraščanja in padanja potrebujemo prvi odvod:

$$f'(x) = \frac{(1+x^2) - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Kandidatki za ekstreme sta $x = \pm 1$. Funkcija narašča na $[-1, 1]$, sicer pa pada. Prevoj in območja konveksnosti in konkavnosti:

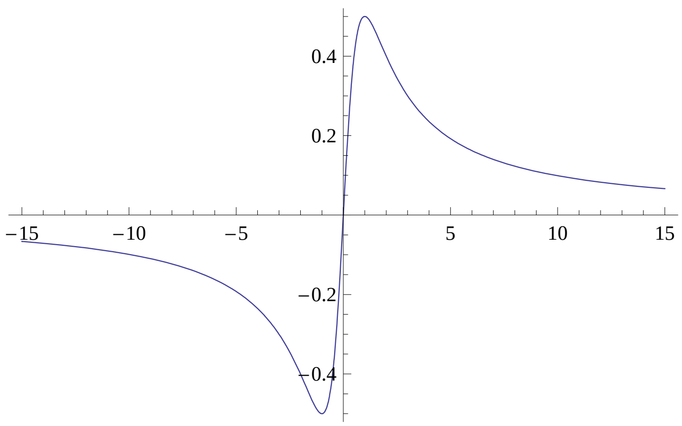
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1-x^2)(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} \\ &= -2x\frac{3-x^2}{(1+x^2)^3}. \end{aligned}$$

Prevojne točke so $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$. Funkcija f je na $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$ konkavna, na $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ pa konveksna. Asimptota je $y = 0$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

2. Skiciraj graf funkcije

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} + x.$$



Slika 4.3: Graf funkcije $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

Rešitev. Ničla je $x = 0$,

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} + 1 = \frac{2 + x^2 + x^4}{(1 + x^2)^2}.$$

Takoj se prepričamo, da je $f'(x) > 0$ povsod, torej je f naraščajoča.

$$f''(x) = -2x \cdot \frac{3 - x^2}{(1 + x^2)^3},$$

zato so prevojne točke $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$, f pa je na $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ konveksna in na $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$ konkavna. Izračunajmo še asimptoto. Premica $y = kx + n$ je asimptota, če je

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - (kx + n) = 0.$$

To pomeni, da se za velike x funkcija približuje premici. Če zgornjo limito delimo z x, dobimo

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} - \left(k + \frac{n}{x}\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} - k = 0.$$

Za smerni koeficient tako dobimo formulo

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k.$$

Če to vstavimo v prvo limito, dobimo

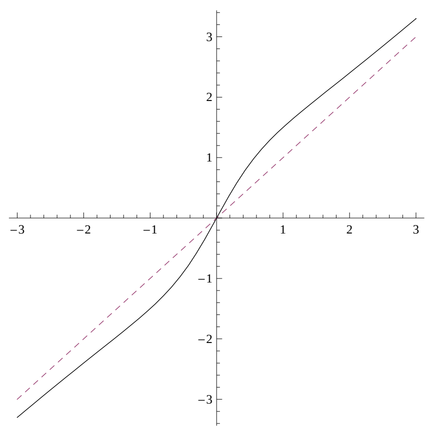
$$n = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - kx.$$

V našem primeru je

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1+x^2} + 1 = 1,$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0.$$

Asimptota je $y = x$.



Slika 4.4: Graf funkcije $f(x) = x + \frac{x}{x^2+1}$ in njegova asimptota $y = x$

4. L'Hôspitalovo pravilo

Izrek 4.7. *Naj bosta f in g odvedljivi na (a, b), $g'(x) \neq 0$ na (a, b). Privzemimo, da obstaja limita*

$$L = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Če je

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0 \text{ ali } \lim_{x \to a} |f(x)| = \lim_{x \to a} |g(x)| = \infty,$$

potem je

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Opomba. Lahko vzamemo tudi $a = -\infty, b = \infty$ ali $x \to b$ namesto $x \to a$. Lahko vzamemo tudi desno ali levo limito.

Primeri.

1. Izračunaj limito

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^3}.$$

Rešitev. Uporabimo zgornje pravilo, saj imamo izraz tipa $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^3} &= \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{6x} \\ &= \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{6} = \infty. \end{aligned}$$

Na enak način dokažemo, da je

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$

za vsako naravno število n. Eksponentna funkcija narašča hitreje od vseh polinomov.

2. Izračunaj limito

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}.$$

Rešitev. Opravka imamo z nedoločenim izrazom tipa $\frac{0}{0}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} &= \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{2x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. Izračunaj limito
$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1-\log(2)x}{x^2}.$$
Rešitev.
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1-\log(2)x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{2^x\log(2)-\log(2)}{2x} = \\ &= \lim_{x\to}\frac{\log(2)}{2}\frac{2^x-1}{x} = \lim_{x\to}\frac{\log(2)}{2}\frac{2^x\log(2)}{1} \\ &= \frac{(\log(2))^2}{2}.\end{aligned}$$

5. Naloge

4.1. Določi minimum in maksimum funkcije
$$f(x)=(x^2+4x+4)e^{-2x}$$
na intervalu $[-2,4]$.

4.2. Določi minimum in maksimum funkcije
$$f(x)=17\sin^2(x)+16\sin(x)\cos(x)+17\cos^2(x)$$
na intervalu $[0,\pi]$.

4.3. Določi minimum in maksimum funkcije
$$f(x)=13\sin^2(x)+15\sin(x)\cos(x)+13\cos^2(x)$$
na intervalu $[0,2\pi]$.

4.4. Z uporabo prvega in drugega odvoda skiciraj graf funkcije
$$f(x)=\frac{3x^2+6}{x^2+4}.$$
Poišči tudi asimptoto, če obstaja.

4.5. Z uporabo prvega in drugega odvoda skiciraj graf funkcije

$$f(x) = \frac{4x^2+1}{x^2+9}.$$

Poišči tudi asimptoto, če obstaja.

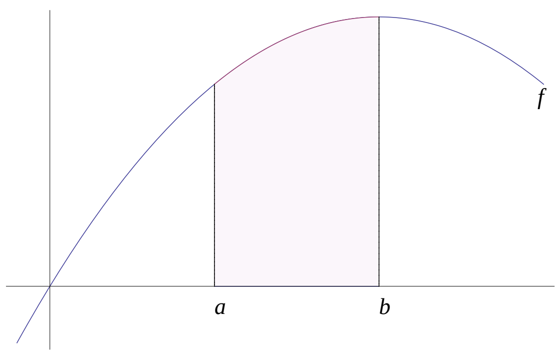
4.6. Z uporabo L'Hôspitalovega pravila izračunaj limite

$$\lim_{x\to 3} \frac{\arcsin(x-3)}{x^2-3x},$$
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)+x-\pi/2}{(x-\pi/2)^3,}$$
$$\lim_{x\to 2} \frac{2x-x^2}{\operatorname{arctg}(x-2),}$$
$$\lim_{x\to \pi} \frac{\sin(x)+(x-\pi)}{(x-\pi)^3}.$$

5. Integral

1. Določeni integral

Dana je pozitivna in zvezna funkcija f nad intervalom $[a, b]$. Zanima nas ploščina območja med osjo x in grafom funkcije. Območje je prikazano na sliki 5.1.



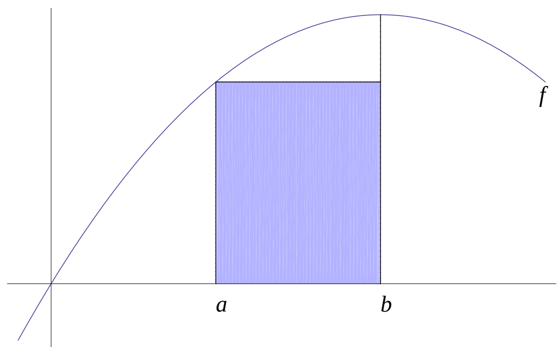
Slika 5.1: Območje med grafom f in osjo x

Prvi približek za ploščino je kar pravokotnik, ki ga določata interval in leva stranica. Njegova ploščina je p_1,

$$p_1 = (b - a)f(a).$$

Prikazana je na sliki 5.2. Naslednji približek p_2 dobimo tako, da interval razdelimo na pol in narišemo dva pravokotnika. Širina intervala je

$$\Delta x = \frac{b - a}{2}.$$

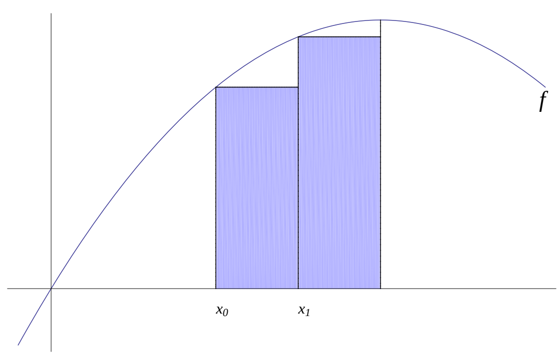


Slika 5.2: Prvi približek ploščine

Označimo $x_0 = a$ in $x_1 = a + \Delta x$.

$$p_2 = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x$$

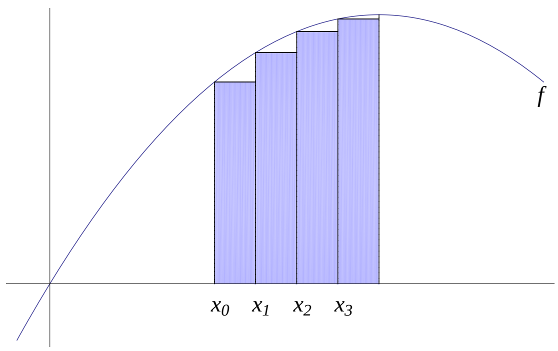
5.3. V naslednjem koraku približek za ploščino p_3 dobimo tako, da interval



Slika 5.3: Drugi približek ploščine

razdelimo na štiri dele in v lik vrišemo pravokotnike (slika 5.4). Označimo z $\Delta x = (b - a)/4$ širino pravokotnikov, delitev intervala pa z $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x$, $x_2 = a + 2\Delta x$ in $x_3 = a + 3\Delta x$. Približek za ploščino je

$$p_3 = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x.$$



Slika 5.4: Tretji približek ploščine

V naslednjem koraku razdelimo območje na osem delov, vrišemo pravokotnike (slika 5.5) in dobimo približek p_4 za ploščino. Z oznako $\Delta x = (b-a)/8$ za širimo in oznako $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x$, $x_2 = a + 2\Delta x$, $x_3 = a + 3\Delta x$, $x_4 = a + 4\Delta x$, $x_5 = a + 5\Delta x$, $x_6 = a + 6\Delta x$, $x_7 = a + 7\Delta x$ za delitev je približek enak

$$p_4 = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + f(x_4)\Delta x + \\ + f(x_5)\Delta x + f(x_6)\Delta x + f(x_7)\Delta x$$

ali krajše

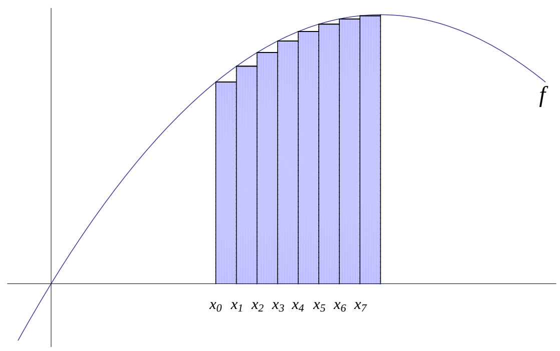
$$p_4 = \sum_{i=0}^{7} f(x_i)\Delta x.$$

Na n-tem koraku imamo

$$p_n = \sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} f(x_i)\Delta x.$$

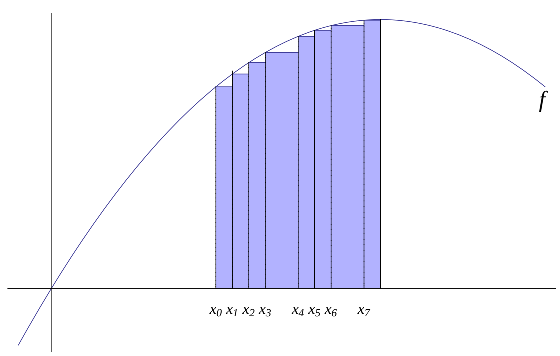
Če to ponavljamo v neskončnost, gre širina intervala Δx proti nič in dobimo pravo ploščino. To limito označimo s sorodnimi oznakami. Namesto črke sigma za vsoto vzamemo (malo razpotegnjen) veliki S, ki ima spodaj spodnjo mejo območja, zgoraj pa zgornjo, oznaka Δx pa preide v dx :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} f(x_i)\Delta x \rightsquigarrow \int_a^b f(x)\,dx.$$



Slika 5.5: Četrti približek ploščine

Izrazu $\int_a^b f(x)\,dx$ pravimo določeni integral in predstavlja ploščino pod grafom funkcije. V resnici se ne smemo omejiti le na ekvidistantne delitve, ampak moramo dopuščati tudi delitve, kjer so širine pravokotnikov različne: (slika 5.6).



Slika 5.6: Približek ploščine pri pravokotnikih različne širine

Definicija 5.1. *Naj bo dan interval* $[a, b]$. *Označimo z*

$$\rho = \{a = x_0, \ldots, x_{n(\rho)} = b\}$$

delitev intervala in z $\delta_{k,\rho} = x_{k+1} - x_k$ *širino* k*-tega podintervala delitve* ρ. *Naj bo* $\mu(\rho) = \max\{\delta_k,\ k = 0, \ldots, n(\rho)\}$ *maksimalna širina podintervalov* *delitve ρ.* **Določeni integral** *funkcije f na intervalu $[a,b]$ je limita*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\mu(\rho)\to 0} \sum f(t_k)\delta_k,$$

po vseh mogočih delitvah ρ, če ta limita obstaja.

Opomba. Ploščine območij pod osjo x je treba šteti z negativnim znakom.

Izrek 5.2. *Vsaka funkcija f, ki je na intervalu $[a,b]$ zvezna, je integrabilna.*

Dokaz izpustimo.

Primeri.
1. Izračunajmo prve štiri približke za ploščine za funkcijo

$$f(x) = -(x-3)^2 + 4$$

nad intervalom $[2,3]$. Po zgornji formuli je $a = 2$, $b = 3$ in $\Delta x = 1$. Prvi približek je $p_1 = 1$. Drugi približek je

$$p_2 = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x = 0.5(f(2) + f(2.5)) = 3.375,$$

kjer je $\Delta x = 0.5$. Tretji približek ($\Delta x = 0.25$) je

$$\begin{aligned} p_3 &= f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x \\ &= 0.25(f(2) + f(2.25) + f(2.5) + f(2.75)) = 3.53125 \end{aligned}$$

in četrti ($\Delta x = 0.125$)

$$p_4 = \Delta x \sum_{i=0}^{7} f(x_i) = 0.125 \sum_{i=0}^{7} f(2 + i \cdot 0.125) = 3.60156.$$

Pravi rezultat je $11/3$, kar je približno 3.6667.

2. Naj bo $f(x) = e^x$. Izračunajmo

$$\int_0^t e^x dx$$

po definiciji.
Rešitev.

$$\begin{aligned}
\int_0^t f(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \sum e^{\frac{kt}{n}} \frac{t}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{t}{n} \sum e^{\frac{kt}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{t}{n} \sum \left(e^{\frac{t}{n}}\right)^k \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{t}{n} e^{\frac{t}{n}} \frac{e^t-1}{e^{\frac{t}{n}}-1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{t}{n}}{e^{\frac{t}{n}}-1}(e^t-1) = e^t-1
\end{aligned}$$

Vrnimo se še enkrat k prvemu primeru. Če pišemo x namesto b in x spreminjamo, se tudi ploščina pod grafom nad intervalom $[a, x]$ spreminja. Označimo jo s $P(x)$. Zanima nas, kaj lahko povemo o tej funkciji. Poglejmo najprej, kako se spreminja. Spreminjanje funkcije opisuje odvod, ki je limita diferenčnega kvocienta funkcije:

$$P'(x) = \lim_{x_1\to x} \frac{P(x_1)-P(x)}{x_1-x}.$$

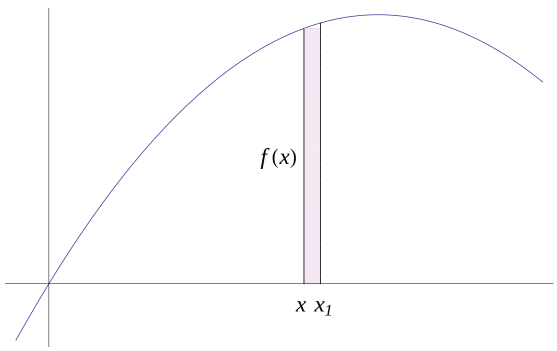
Narišimo razliko $P(x_1) - P(x)$. Za $x_1 > x$ je to ploščina nad intervalom $[x, x_1]$, ki pa je, če je x_1 blizu x, skoraj pravokotnik (slika 5.7). Njegova ploščina je približno enaka ploščini pravokotnika, ki ima za spodnjo stranico interval $[x, x_1]$, za višino pa $f(x)$. Diferenčni kvocient je potem približno

$$\frac{P(x_1)-P(x)}{x_1-x} \doteq \frac{(x_1-x)f(x)}{x_1-x} = f(x).$$

Ko pošljemo x_1 proti x, je razlika med $P(x_1)-P(x)$ in $(x_1-x)f(x)$ vedno manjša, zato je

$$P'(x) = \lim_{x_1\to x} \frac{P(x_1)-P(x)}{x_1-x} = f(x).$$

Dokazali smo osnovni izrek analize.



Slika 5.7: Razlika $P(x_1) - P(x)$

Izrek 5.3. *(Osnovni izrek analize) Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija in*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Funkcija $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je zvezna in odvedljiva in velja

$$F'(x) = f(x).$$

Definicija 5.4. *Naj bo $(a,b) \subset \mathbb{R}$ in $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Funkcija $F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ z lastnostjo*

$$F'(x) = f(x)$$

se imenuje **primitivna funkcija** *(ali* **nedoločeni integral***). To zapišemo v obliki*

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

Opomba. Primitivna funkcija je določena do konstante natančno. Vsaki dve funkciji $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, ki imata enaka odvoda, se razlikujeta za konstanto.

Naj bo F primitivna funkcija funkcije f in $P(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ ploščina pod grafom f nad intervalom $[a,x]$. Funkciji F in P sta obe primitivni funkciji f, le da ima P še dodatno lastnost, da je $P(a) = 0$, saj je ploščina nad intervalom $[a, a]$ enaka 0. Ker se primitivne funkcije razlikujejo le za konstanto, je $P(x) = F(x) - F(a)$.

Posledica 5.5. *Naj bo F primitivna funkcija funkcije f. Potem je*

$$P(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Posledica 5.6.

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a) = -(F(a) - F(x)) = -\int_x^a f(t)\,dt$$

Za razliko $F(x) - F(a)$ pogosto uporabljamo oznako

$$F(x) - F(a) = F(t)\Big|_a^x.$$

Lastnosti integrala.

(a) $\int_a^x cf(t)\,dt = c\int_a^x f(t)\,dt$

(b) $\int_a^x (f(t) + g(t))\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_a^x g(t)\,dt$

(c) $\left|\int_a^x f(t)\,dt\right| \leq \int_a^x |f(t)|\,dt$

(d) $\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$

(e) $\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$

(f) $\int_a^a f(t)\,dt = 0$

Primeri. Izračunajmo primitivne funkcije naslednjih funkcij:

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + c,$$
$$\int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3} + c,$$
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log(x) + c,\ x > 0.$$

Za $x < 0$ pišemo

$$\int \frac{1}{x}\,dx = -\int \frac{1}{-x} = \log(-x) + c = \log(|x|) + c.$$

Konstanto c pogosto izpuščamo.

Tabela nekaterih primitivnih funkcij

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
x^a	$\frac{x^{a+1}}{a+1},\ a \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\log x$
$\frac{1}{x-a}$	$\log(x-a)$
e^{ax}	$\frac{e^{ax}}{a},\ a \neq 0$
$\sin ax$	$-\frac{\cos ax}{a},\ a \neq 0$
$\cos ax$	$\frac{\sin ax}{a},\ a \neq 0$
$\operatorname{sh} ax$	$\frac{\operatorname{ch} ax}{a},\ a \neq 0$
$\operatorname{ch} ax$	$\frac{\operatorname{sh} ax}{a},\ a \neq 0$
$\operatorname{tg} ax$	$-\frac{\ln(\cos ax)}{a},\ a \neq 0$
$\operatorname{ctg} ax$	$\frac{\ln(\sin ax)}{a},\ a \neq 0$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin(x/a)$
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{\operatorname{arctg}(x/a)}{a}$

Kaj pa je primitivna funkcija za funkcijo $h(x) = xe^x$? To ni več tako očitno, zato si pomagamo s trikom. Poglejmo si pravilo za računanje odvoda produkta:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + v(x)u'(x).$$

Ker sta leva in desna stran enaki, imata enak nedoločeni integral:

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)\,dx + \int u(x)v'(x)\,dx.$$

Če člene v enačbi premečemo, dobimo pravilo za **integracijo po delih** ali **integracijo per partes**:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

Za našo funkcijo $h(x) = xe^x$ vzemimo

$$v' = e^x,\ u(x) = x$$

in upoštevajmo, da je $v(x) = e^x$ in $u'(x) = 1$. Dobimo:

$$\int e^x x\,dx = e^x x - \int e^x \cdot 1\,dx = xe^x - e^x + c.$$

Primeri. Izračunajmo naslednje integrale.
1. V prvem koraku vzamemo $u(x) = x^2$ in $v'(x) = \sin(x)$, v drugem pa $u(x) = x$ in $v'(x) = \cos(x)$.

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sin(x)\,dx &= x^2(-\cos(x)) - \int 2x(-\cos(x))\,dx \\
&= x^2(-\cos(x)) + 2\int x\cos(x)\,dx \\
&= x^2(-\cos(x)) + 2x\sin(x) - \int 2\sin(x) \\
&= x^2(-\cos(x)) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) + c
\end{aligned}$$

2. V prvem koraku vzamemo $u(x) = \sin(2x)$ in $v'(x) = e^x$, v drugem pa $u(x) = \cos(2x)$ in $v'(x) = e^x$.

$$\begin{aligned}
I = \int e^x \sin(2x)\,dx &= e^x \sin(2x) - \int e^x 2\cos(2x)\,dx \\
&= e^x \sin(2x) - (2e^x \cos(2x) - \int e^x 4(-\sin(2x))\,dx \\
&= e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) - 4\int e^x \sin(2x)\,dx \\
&= e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) - 4I
\end{aligned}$$

Dobimo enačbo za I. Izrazimo I :

$$I = \frac{1}{5}(e^x \sin(2x) - e^x 2\cos(2x)).$$

3.

$$\begin{aligned}\int x\log(x)\,dx &= \frac{x^2}{2}\log(x) - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2}\log(x) - \int \frac{x}{2}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2}\log(x) - \frac{x^2}{4}\end{aligned}$$

Primer. Izračunajmo ploščino lika, ki ga omejujejo premice $x = 0$, $x = 3\pi$, $y = 0$ in graf funkcije $f(x) = x\sin(x)$.
Rešitev. Najprej izračunajmo primitivno funkcijo:

$$F(x) = \int x\sin(x)\,dx = -x\cos(x) + \int \cos(x) = \sin(x) - x\cos(x).$$

Integracijski interval razdelimo na tri dele: na $[0, \pi]$ in $[2\pi, 3\pi]$ je f pozitivna, na $[\pi, 2\pi]$ pa negativna. Ploščina je enaka

$$P = F(\pi) - F(0) - (F(2\pi) - F(\pi)) + F(3\pi) - F(2\pi) = 9\pi.$$

Napišimo še pravilo za uvedbo nove spremenljivke v določeni integral. V tem primeru 'nazaj' preberemo pravilo za odvod sestavljene funkcije. Naj bo f dana funkcija, F njena primitivna funkcija. Uvedimo v integral

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

novo spremenljivko $x = \varphi(t)$. Napišimo $G(t) = F(\varphi(t))$. Potem je

$$\begin{aligned}&F(a) = G(\varphi^{-1}(a)),\ F(b) = G(\varphi^{-1}(b)) \text{ in} \\ &G'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).\end{aligned}$$

Ker sta funkciji $G'(t)$ in $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ enaki, je

$$G(\varphi^{-1}(b)) - G(\varphi^{-1}(a)) = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Po drugi strani pa je

$$G(\varphi^{-1}(b)) - G(\varphi^{-1}(a)) = F(b) - F(a)$$

in

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

zato je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Na tihem smo upoštevali, da ima funkcija φ inverzno funkcijo, definirano na $[a, b]$:

$$\varphi^{-1}\colon [a, b] \to [\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)].$$

Zato moramo privzeti, da je funkcija φ na $[a, b]$ injektivna. Dokazali smo naslednji izrek.

Izrek 5.7. *(Izrek o substituciji) Naj bo f zvezna funkcija in $\varphi\colon [\alpha, \beta] \to [a, b]$ bijektivna funkcija. Potem velja formula za uvedbo nove spremenljivke:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Če je φ naraščajoča, je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt,$$

če pa je padajoča, je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\beta^\alpha f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Primeri.

1. Izračunajmo integral

$$\int_0^1 \frac{x}{3x^2+5}\,dx$$

z uvedbo nove spremenljivke $x = \sqrt{(u-5)/3}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x}{3x^2+5}\,dx &= \int_5^8 \frac{\sqrt{(u-5)/3}\frac{1}{\sqrt{(u-5)/3}}}{3(u-5)/3+5}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}du \\
&= \int_5^8 \frac{1}{6}\frac{du}{u} = \frac{1}{6}\log(u)\Big|_5^8 \\
&= \frac{1}{6}\log(8/5).
\end{aligned}$$

Kako bi ugotovili, kaj je treba vzeti za novo spremenljivko? Ker je v števcu skoraj odvod imenovalca (do konstantnega faktorja), poskusimo izbrati kar števec za novo spremenljivko, $3x^2 + 5 = u$. Ta funkcija pa ima inverzno funkcijo $x = \sqrt{(u-5)/3}$.

2. Izračunajmo integral

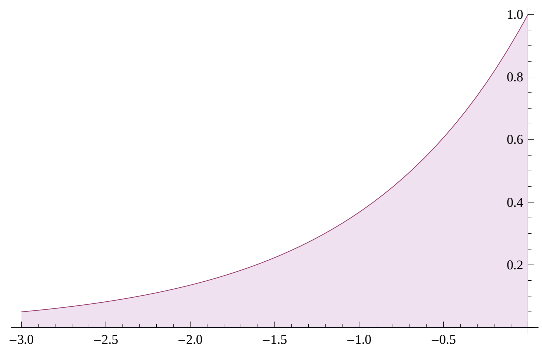
$$\int_1^2 e^{x^2} x\,dx.$$

Za funkcijo e^{x^2} ne znamo poiskati primitivne funkcije (njena primitivna funkcija ni elementarna). Veliko manj težav bi imeli, če bi bil eksponent brez kvadrata. Zato poskusimo z novo spremenljivko $t = x^2$ oziroma $x = \sqrt{t} = \varphi(t)$; $\varphi'(t) = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$. Vstavimo v integral in dobimo

$$\begin{aligned}
\int_1^2 e^{x^2} x\,dx &= \int_1^4 e^t t^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\,dt \\
&= \int_1^4 e^t \frac{1}{2}\,dt \\
&= \frac{1}{2}e^t\Big|_1^4 \\
&= \frac{1}{2}(e^4 - e).
\end{aligned}$$

2. Izlimitirani integral

Radi bi izračunali ploščino pod grafom funkcije $f(x) = e^x$ na negativni strani osi (slika 5.8).



Slika 5.8: Ploščina pod grafom funkcije e^x

Vemo, da je za $x < 0$ ploščina lika nad intervalom $[x, 0]$ enaka

$$F(x) = \int_x^0 e^t \, dt = 1 - e^x.$$

Ko pošiljamo $x \to -\infty$, gre ploščina proti 1. To limito razglasimo za ploščino.

Poskusimo izračunati ploščino pod grafom funkcije $f(x) = x^{-1}$ nad $[1, \infty)$. Nad intervalom $[1, x]$ dobimo

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} = \log(x).$$

Tu pa je $\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$, torej ima lik neskončno ploščino. Ploščino pod grafom iste funkcije nad intervalom $(0, 1]$ dobimo na podoben način:

$$F(x) = \int_x^1 \frac{dt}{t} = 1 - \log(x).$$

Spet je $\lim_{x\to 0} F(x) = \infty$. Kaj pa, če za funkcijo vzamemo $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$? V tem primeru je

$$F(x) = \int_x^1 t^{-\frac{1}{2}} \, dt = [2\sqrt{t}]_x^1 = 2(1 - \sqrt{x})$$

in $\lim_{x\to 0} F(x) = 2$.

Definicija 5.8. *Naj bo* $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ *zvezna funkcija in naj bo ali* $b = \infty$ *ali* $b < \infty$ *in* $\lim_{x\to b} |f(x)| = \infty$. *Če obstaja limita*

$$\lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,dt$$

jo imenujemo **izlimitirani integral** f *na* $[a,b)$, *označimo pa jo enako kot običajni integral:*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,dt.$$

Primeri.

1. Integral

$$\int_0^\infty \sin(t)\,dt$$

ne obstaja; funkcija $F(x) = \int_0^x f(x) = 1 - \cos(x)$ namreč nima limite, ko gre $x \to \infty$.

2. Izračunajmo

$$\int_0^\infty e^{-t}t^4\,dt.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-t}t^4\,dt &= -e^{-t}t^4\Big|_0^\infty + 4\int_0^\infty e^{-t}t^3\,dt \\
&= 4(-e^{-t}t^3\Big|_0^\infty + 3\int_0^\infty e^{-t}t^2\,dt) \\
&= 4\cdot 3(-e^{-t}t^2\Big|_0^\infty + 2\int_0^\infty e^{-t}t\,dt) \\
&= 4\cdot 3\cdot 2(-e^{-t}t\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}\,dt) \\
&= 4!(-e^{-t}\Big|_0^\infty) = 4!
\end{aligned}$$

Dokažimo, da je

$$\int_0^\infty e^{-t}t^n\,dt = n!.$$

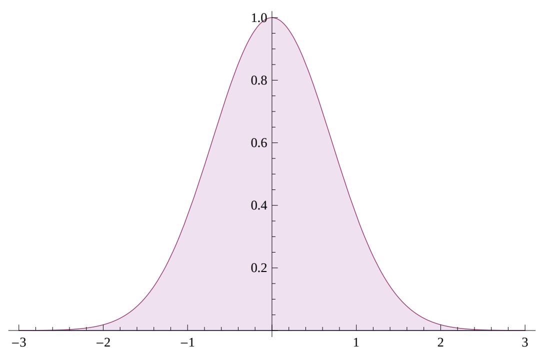
Ta integral se imenuje funkcija gama in ga označimo z

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^n \, dt.$$

Zadošča rekurzivni formuli

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n).$$

S pomočjo rekurzivne formule lahko funkcijo gama razširimo na vsa realna števila, razen na negativna cela števila. V statistiki je posebno pomembna ploščina pod grafom funkcije (zvončaste krivulje) $f(x) = e^{-x^2}$ (slika 5.9).



Slika 5.9: Ploščina pod grafom funkcije e^{-x^2}

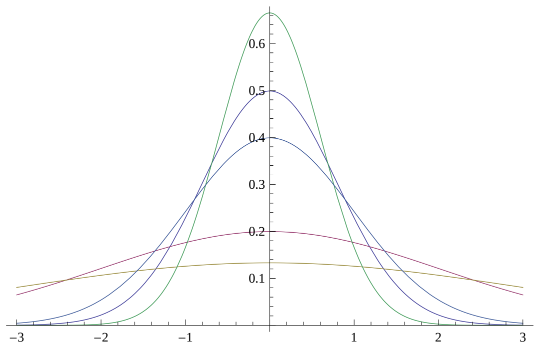
Izkaže se, da je ploščina enaka $\sqrt{\pi}$ in da se z uvedbo spremenljivke $x^2 = u$ prevede na funkcijo gama:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \, dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2} \, dx = 2\int_0^\infty e^{-u} \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \, du = \Gamma(1/2).$$

V statistiki nas zanimajo predvsem družine zvončastih krivulj, pri katerih je ploščina pod grafom enaka 1, npr.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

Ploščina se ne spremeni, če funkcijo premaknemo levo ali desno; funkcija



Slika 5.10: Gaussove krivulje $N(0, \sigma)$ za $\sigma = 0.6, 0.8, 1, 2, 3$

$$f(x, \mu) : = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-\mu)^2}$$

ima enako ploščino kot funkcija $f(x, 0) = f(x)$. Če pa argument pomnožimo s kakim številom, se ploščina spremeni. Izračunajmo ploščino pod grafom

$$f(x, \mu, \sigma) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-\mu)^2/\sigma^2}$$

z uvedbo nove spremenljivke $(x - \mu)^2/\sigma^2 = u$. Dobimo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x-\mu)^2/\sigma^2}}{\sqrt{\pi}} \, dx \quad = \quad 2\sigma \int_0^{\infty} e^{-u} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} u^{-\frac{1}{2}} \, du = \sigma.$$

V statistiki imajo radi malce drugače označene funkcije:

$$N(\mu, \sigma)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Velja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} N(\mu, \sigma)(x) \, dx = 1, \quad E(N(\mu, \sigma)) = \int_{-\infty}^{\infty} x N(\mu, \sigma) \, dx = \mu.$$

Na sliki 5.10 je prikazanih nekaj Gaussovih krivulj pri različnih parametrih; $\mu = 0$, tako da imajo vsi zvonci vrh pri $x = 0$, σ pa se spreminja. Večja ko je σ, bolj sploščen in nižji je zvonec.

3. Naloge

5.1. Izračunaj integrale na intervalu $[1, 2]$ za funkcije:

$$f_1(x) = x^3 - 9x^2,$$
$$f_2(x) = 4x - 4x^2 - x^3,$$
$$f_3(x) = (2x + 4)/x^2,$$
$$f_4(x) = (x^2 + 3x + 4)/x,$$
$$f_5(x) = x\cos(x),$$
$$f_6(x) = 2\cos(3x) - 1,$$
$$f_7(x) = -\sin(2x),$$
$$f_8(x) = (2x + 1)e^{-3x},$$
$$f_9(x) = x^2e^{2x+1} + 3,$$
$$f_{10}(x) = e^{3x} - 2,$$
$$f_{11}(x) = \log(5x + 1),$$
$$f_{12}(x) = 2\log(x) + 1,$$

5.2. Izračunaj integrale:

$$\int_0^{20} xe^{x-1}\,dx,$$
$$\int_{-20}^{0} (x^3 + 2x)e^{x^2}\,dx,$$
$$\int_0^{5} xe^{-x}\,dx,$$
$$\int_{-3}^{0} xe^{2x-4}\,dx,$$
$$\int_0^{100} x^4e^{-x}\,dx,$$
$$\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx,$$

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx,$$
$$\int_0^1 \frac{x+1}{1+2x+x^2}\,dx.$$

5.3. Izračunaj integrala:

$$\int_{-\infty}^0 (x^3+2x)e^x\,dx \text{ in } \int_0^\infty xe^{-x-1}dx.$$

6. Uporaba integrala

1. Računanje ploščin ravninskih likov

Vemo že, da integral $\int_a^b f(t)\,dt$ pomeni ploščino lika med grafom f in osjo x, pri čemer štejemo ploščino pod osjo x z negativnim znakom. Ploščino celotnega območja, ki ga omejujejo $x = a$, $x = b$, $y = 0$ in graf f dobimo z integralom:

$$P = \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Primer. Izračunajmo ploščino lika, ki ga omejujejo $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ in graf funkcije $f(x) = 1 - x^2$.

$$\begin{aligned}
P &= \int_0^2 |f(t)|\,dt \\
&= \int_0^2 |1 - t^2|\,dt \\
&= \int_0^1 (1 - t^2)\,dt + \int_1^2 (t^2 - 1)\,dt \\
&= t - \frac{t^3}{3}\bigg|_0^1 + \left(\frac{t^3}{3} - t\right)\bigg|_1^2 \\
&= 1 - \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 2 - (\frac{1}{3} - 1) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Izračunajmo še integral

$$\int_0^2 (1 - t^2)\,dt = t - \frac{t^3}{3}\bigg|_0^2 = 2 - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}.$$

To nam pove, da je nad intervalom $[0,2]$ večji del ploščine med grafom in osjo x pod osjo x kot nad osjo x.

Definicija 6.1. Parametrično podana krivulja *v ravnini je zvezna preslikava* $\vec{s}\colon (a,b) \to \mathbb{R}$,

$$\vec{s}\colon t \mapsto (x(t), y(t)).$$

Krivulja je **gladka***, če sta preslikavi $x(t), y(t)$ odvedljivi.*

Naj bo dana parametrično podana krivulja $\vec{s}(t) = (x(t), y(t))$. Izračunajmo ploščino izseka, ki ga določa krivulja $\vec{s}$ za parametre $t \in [t_1, t_2]$. To je območje, ki ga omejujejo krivulja $\vec{s}$, daljica od $(0,0)$ do $\vec{s}(t_1)$ in daljica od $(0,0)$ do $\vec{s}(t_2)$ in mu pravimo krivočrtni trikotnik. Izračunajmo, koliko se spremeni ploščina, ko gre parameter od t do $t + \Delta t$. Izračunati moramo ploščino lika, ki ga omejujejo krivulja $\vec{s}$, daljica od $(0,0)$ do $\vec{s}(t)$ in daljica od $(0,0)$ do $\vec{s}(t+\Delta t)$. Označimo jo z $\delta P(t)$. Za zelo majhne Δt je lik skoraj trikotnik (slika 6.1), ki ga napenjata vektorja $\vec{s}(t) = (x(t), y(t))$ in

$$\vec{s}(t + \Delta t) - \vec{s}(t) \doteq (x'(t), y'(t))\Delta t.$$

Njegova ploščina je polovica ploščine paralelograma,

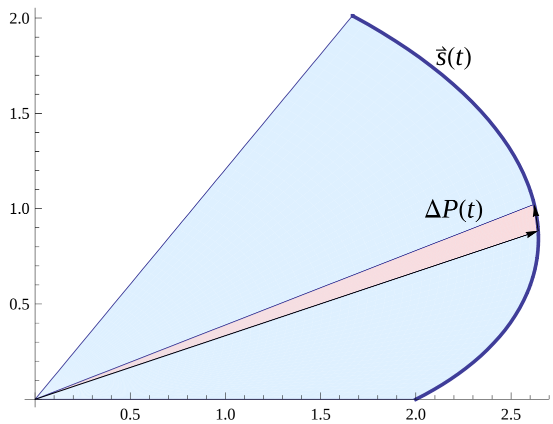
$$\begin{aligned} \Delta P(t) &\doteq \frac{1}{2}|(x(t), y(t)) \times (x'(t), y'(t))|\,\Delta t \\ &\doteq \frac{1}{2}|x(t)y'(t) - x'(t)y(t)|\,\Delta t. \end{aligned}$$

Ko gre $\Delta t \to 0$, gre $\Delta P(t) \to dP(t)$, ploščina celotnega lika pa je enaka

$$P = \int_{t_1}^{t_2} dP(t) = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} |x(t)y'(t) - x'(t)y(t)|\,dt.$$

Če je krivulja podana v polarnih koordinatah $r = r(\varphi)$, to pomeni, da na poltrak pod kotom φ odmerimo dolžino $r(\varphi)$. V kartezičnih koordinatah je to

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= r(\varphi)\cos(\varphi), \\ y(\varphi) &= r(\varphi)\sin(\varphi). \end{aligned}$$



Slika 6.1: Krivočrtni trikotnik

Za odvode dobimo

$$\begin{aligned} x'(\varphi) &= -r(\varphi)\sin(\varphi) + r'(\varphi)\cos(\varphi), \\ y'(\varphi) &= r(\varphi)\cos(\varphi) + r'(\varphi)\sin(\varphi). \end{aligned}$$

Izračunajmo $x'y - xy'$:

$$\begin{aligned} & x'(\varphi)y(\varphi) - x(\varphi)y'(\varphi) = (-r(\varphi)\sin(\varphi) + r'(\varphi)\cos(\varphi))r(\varphi)\sin(\varphi) - \\ & -(r(\varphi)\cos(\varphi) + r'(\varphi)\sin(\varphi))r(\varphi)\cos(\varphi) \\ & = r^2(\varphi)(-\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)) \\ & = -r^2(\varphi). \end{aligned}$$

Od tod sledi formula za izsek pod krivuljo, ki je določen s kotoma φ_1, φ_2 :

$$P = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi.$$

Primeri.

1. Izračunaj ploščino izseka, ki ga določa krivulja $\vec{s}(t) = (t\cos(t), t\sin(t))$ za $t \in [0, \pi/2]$.

Rešitev.

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} t(\cos(t)(\sin(t) + t\cos(t)) - \sin(t)(\cos(t) - t\sin(t))\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} t(t\cos^2(t) + t\sin^2(t))\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} t^2\,dt = \frac{\pi^3}{48} \end{aligned}$$

2. Izračunaj ploščino lika, ki ga določa sklenjena krivulja

$$\vec{s}(t) = (3\cos(t), 4\sin(t)).$$

Rešitev. Ker je parametrizacija periodična, je treba izračunati naslednji integral:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(3\cos(t)4\cos(t) - 3\sin(t)(-4\sin(t))\right)\,dt = 12\pi.$$

Lik je elipsa s polosema 3 in 4.

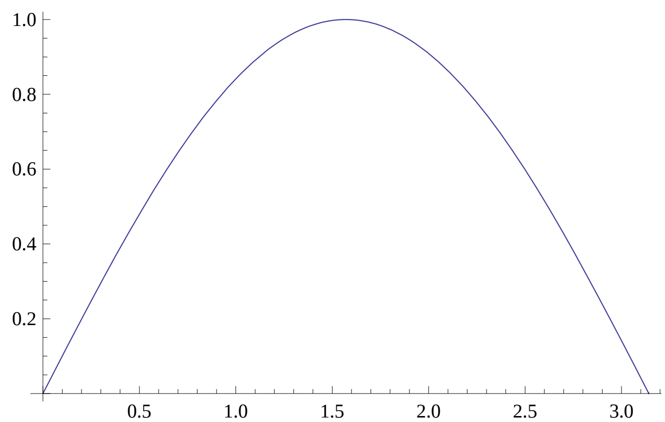
3. Izračunaj ploščino lika, ki ga objema krivulja, podana v polarnih koordinatah s predpisom $r(\varphi) = 1 - \cos(\varphi)$.
Rešitev. Po formuli je

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \cos(\varphi))^2\,d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - 2\cos(\varphi) + \cos^2(\varphi))\,d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{\cos(2\varphi) + 1}{2}\right)\,d\varphi = \frac{3\pi}{2}, \end{aligned}$$

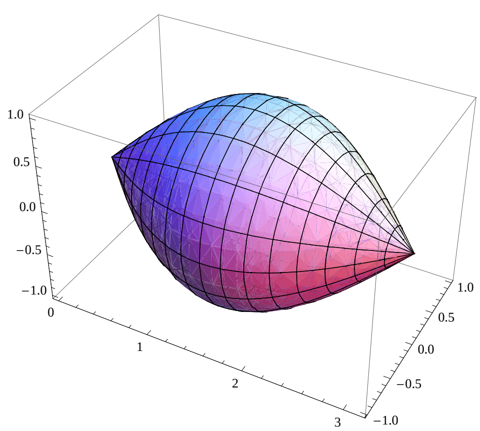
saj je integral kosinusa po vsakem intervalu, dolgem 2π, enak 0.

2. Računanje volumnov vrtenin

Vzemimo območje med grafom funkcije $f(x) = \sin(x)$ na $[a, b] = [0, \pi]$ in osjo x ter ga zavrtimo okoli osi x (sliki 6.2 in 6.3).



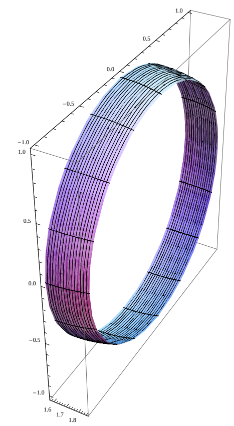
Slika 6.2: Graf sinusa



Slika 6.3: Graf rotacijskega telesa

Rezultat je telo, ki mu pravimo **vrtenina**, dobljena z rotacijo okoli osi x. Poskusimo izračunati njegov volumen. Razrežimo telo na drobne rezine z ravninami, vzporednimi yz-ravnini (slika 6.4). Za preseke dobimo tanke valje. Nad točko x dobimo valj, debel dx in s polmerom osnovne ploskve $|f(x)|$; volumen takega valja je $dV_y(x) = \pi f^2(x)\,dx$. Celoten volumen je

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx,$$



Slika 6.4: Rezina

kjer je $[a, b]$ interval, nad katerim smo zavrteli območje pod grafom. V našem primeru je

$$V_x = \pi \int_0^\pi \sin^2(x)\,dx = \pi \int_0^\pi \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))\,dx = \frac{\pi^2}{2},$$

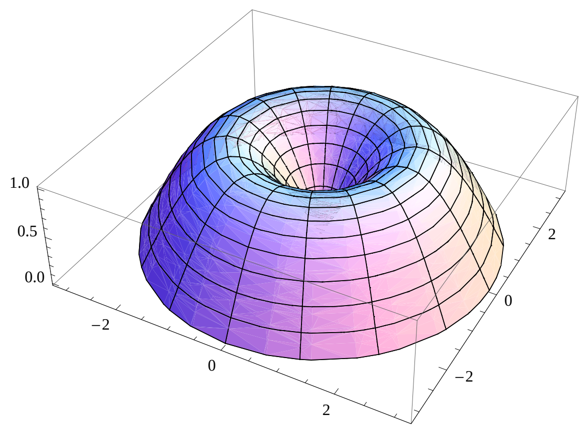
saj ima $\cos(2\varphi)$ periodo π.

Izračunajmo še volumen vrtenine, ki jo dobimo z rotacijo območja pod grafom funkcije $f(x) = \sin(x)$ na $[a, b] = [0, \pi]$ okoli osi y (slika 6.5). Če nad točko x vzamemo stebriček, debel dx, bomo po rotaciji dobili plašč valja, ki ima debelino dx, višino $|f(x)|$ in polmer osnovne ploskve x (slika 6.6). Volumen takega plašča je $dV_y(x) = 2\pi x|f(x)|\,dx$, volumen celotne vrtenine pa dobimo s formulo

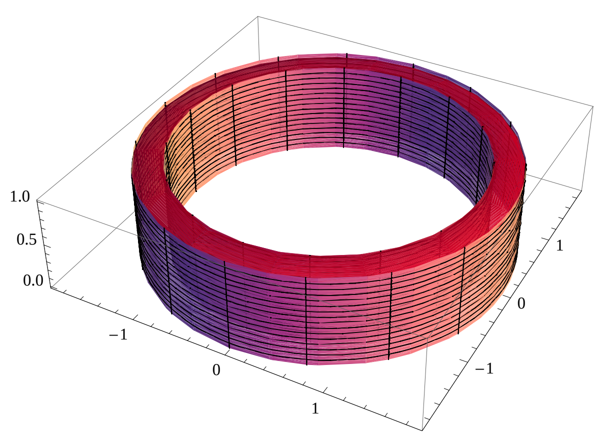
$$V_y = 2\pi \int_a^b x|f(x)|\,dx.$$

V našem primeru je

$$\begin{aligned} V_y &= 2\pi \int_0^\pi x\sin(x)\,dx \\ &= 2\pi \left(x(-\cos(x))\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos(x)\,dx \right) \\ &= 2\pi^2. \end{aligned}$$



Slika 6.5: Graf rotacijskega telesa



Slika 6.6: Rezina

Primeri.
1. Izračunaj volumen telesa, ki ga dobiš z rotacijo območja, ki ga omejuje krivulja

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

okoli osi x.
Rešitev. Območje je elipsa s polosema a in b; dobljeno telo bo rotacijski elipsoid z enačbo

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1.$$

Zaradi simetrije dobimo

$$\begin{aligned}
V_x &= \pi\int_{-a}^{a} y^2\,dx\\
&= 2\pi\int_0^a y^2\,dx\\
&= 2\pi\int_0^a b^2(1-x^2a^{-2})\,dx\\
&= 2\pi b^2\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_0^a\\
&= 2b^2\pi(a-\frac{a}{3})\\
&= \frac{4\pi ab^2}{3}.
\end{aligned}$$

Če je $a=b$, dobimo volumen krogle z radijem a :

$$V=\frac{4\pi a^3}{3}.$$

2. Izračunaj volumen vrtenine, ki jo dobiš z rotacijo območja pod grafom funkcije $f(x)=e^{-x}$ na $[0,\infty)$ okoli osi x in okoli osi y.

$$\begin{aligned}
V_x &= \pi\int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx\\
&= \lim_{R\to\infty}\pi\int_0^R e^{-2x}\,dx\\
&= -\pi\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty} e^{-2x}\Big|_0^R\\
&= -\pi\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}(e^{-2R}-1)=\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
V_y &= 2\pi \int_0^\infty x e^{-x}\, dx \\
&= \lim_{R\to\infty} 2\pi \int_0^R x e^{-x}\, dx \\
&= 2\pi \lim_{R\to\infty} \left(-x e^{-x}\Big|_0^R + \int_0^R e^{-x}\, dx\right) \\
&= 2\pi \lim_{R\to\infty} \left(R e^{-R} - \frac{1}{2}(e^{-2R} - 1)\right) = \pi
\end{aligned}
$$

3. Izračunaj volumen vrtenine, ki jo dobiš z rotacijo omočja pod grafom funkcije $f(x) = x^2$ nad $[1, 2]$ okoli osi x in okoli osi y.

$$
\begin{aligned}
V_x &= \pi \int_1^2 x^2\, dx \\
&= \pi \frac{1}{3} x^3 \Big|_1^2 \\
&= \pi \frac{1}{3}(8 - 1) \\
&= \frac{7\pi}{3}
\end{aligned}
$$

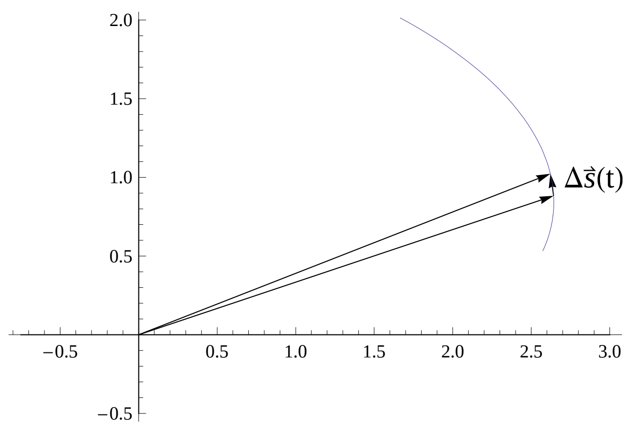
$$
\begin{aligned}
V_y &= 2\pi \int_1^2 x \cdot x^2\, dx \\
&= 2\pi \frac{1}{4} x^4 \Big|_1^2 \\
&= \frac{\pi}{2}(16 - 1) = \frac{15\pi}{2}
\end{aligned}
$$

3. Računanje dolžin krivulj

Naj bo $\vec{s}(t) = (x(t), y(t))$ parametrično podana krivulja. Zanima nas dolžina krivulje med točkama $\vec{s}(a)$ in $\vec{s}(b)$, $a < b$. Izračunajmo, koliko se poveča dolžina, ko se parameter premakne od t do $t_1 = t + \Delta t$ (slika 6.7). Označimo ta vektor z $\Delta\vec{s}(t)$, njegovo dolžino pa z $\Delta s(t)$.

$$\begin{aligned}
\Delta\vec{s}(t) &= \vec{s}(t+\Delta t) - \vec{s}(t)\\
\Delta s(t) &= |\vec{s}(t+\Delta t) - \vec{s}(t)|\\
&= |(x(t+\Delta t) - x(t), y(t+\Delta t) - y(t)|\\
&\doteq |(\dot{x}(t)\,\Delta t, \dot{y}(t)\,\Delta t)|\\
&\doteq (\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{\frac{1}{2}}\,\Delta t
\end{aligned}$$

Ko gre δ proti 0, gre t_1 proti t in



Slika 6.7: Vektor $\Delta\vec{s}(t)$

$$\Delta s(t) \to\ ds(t) = (\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{\frac{1}{2}}\,dt.$$

Od tod zlahka dobimo formulo za dolžino krivulje med točkama $\vec{s}(a)$ in $\vec{s}(b)$:

$$s = \int_a^b (\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{\frac{1}{2}}\,dt.$$

Primeri.

1. Izračunaj dolžino implicitno podane krivulje

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Zaradi simetrije je dovolj izračunati dolžino krivulje v prvem kvadrantu; celotna dolžina je štirikratnik dolžine dela v prvem kvadrantu. Izrazimo y z x :

$$y(x) = (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

Krivulja je parametrizirana s $\vec{s}(x) = (x, y(x))$. Izračunati je treba odvoda obeh komponent: odvod prve komponente je 1, odvod druge pa

$$y'(x) = \frac{3}{2}(1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}(-\frac{2}{3})x^{-\frac{1}{3}}.$$

Izračunajmo posebej še izraz pod korenom:

$$1 + y'(x)^2 = 1 + (1 - x^{\frac{2}{3}})x^{-\frac{2}{3}} = x^{-\frac{2}{3}}.$$

Dolžina krivulje je

$$4\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}}\,dx = 4\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_0^1 = 4\frac{3}{2}.$$

2. Izračunaj dolžino krivulje $\vec{s}(t) = (2t, t^2)$ med točkama $(0, 0)$ in $(10, 25)$. Ker parameter teče med 0 in 5, je dolžina enaka

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^5 \sqrt{4 + 4t^2}\,dt \\
&= 2\int_0^5 \sqrt{1 + t^2}\,dt \\
&= 2\int_0^{\mathrm{arsh}(5)} \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(u)}\,\mathrm{ch}(u)\,du \\
&= 2\int_0^{\mathrm{arsh}(5)} \mathrm{ch}^2(u)\,du \\
&= 2\int_0^{\mathrm{arsh}(5)} \frac{1}{2}(\mathrm{ch}(2u) - 1)\,du \\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{sh}(2u) - u\Big|_0^{\mathrm{arsh}(5)} \\
&= \frac{1}{2}2\,\mathrm{sh}(u)\,\mathrm{ch}(u) - u\Big|_0^{\mathrm{arsh}(5)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \operatorname{sh}(u)\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(u)} - u\Big|_0^{\operatorname{arsh}(5)} \\
&= 5\sqrt{1+25} - \log(5+\sqrt{1+25}).
\end{aligned}
$$

3. Izračunaj dolžino krivulje, podane v polarnih koordinatah

$$r = r(\varphi) = e^{-\varphi}$$

za $\varphi \in [0, \infty)$. V običajnih koordinatah dobimo

$$\vec{s}(\varphi) = (x(\varphi), y(\varphi)) = (r(\varphi)\cos(\varphi), r(\varphi)\sin(\varphi)).$$

Izračunajmo odvoda:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(\varphi) &= \dot{r}(\varphi)\cos(\varphi) - r(\varphi)\sin(\varphi), \\
\dot{y}(\varphi) &= \dot{r}(\varphi)\sin(\varphi) + r(\varphi)\cos(\varphi).
\end{aligned}
$$

Izraz pod korenom je:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(\varphi)^2 + \dot{y}(\varphi)^2 &= \dot{r}(\varphi)^2\cos^2(\varphi) + r^2(\varphi)\sin^2(\varphi) - \\
&\quad -2\dot{r}(\varphi)\cos(\varphi)r(\varphi)\sin(\varphi) + \\
&\quad +\dot{r}(\varphi)^2\sin^2(\varphi) + r(\varphi)^2\cos^2(\varphi) + \\
&\quad +2\dot{r}(\varphi)\sin(\varphi)r(\varphi)\cos(\varphi) \\
&= \dot{r}(\varphi)^2 + r(\varphi)^2.
\end{aligned}
$$

Sledi formula za dolžino krivulj, podanih z $r = r(\varphi)$ v polarnih koordinatah:

$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r(\varphi)^2 + \dot{r}(\varphi)^2}d\varphi.$$

V našem primeru je $\dot{r}(\varphi) = -e^{-\varphi}$, zato dobimo

$$
\begin{aligned}
s &= \int_0^\infty \sqrt{e^{-2\varphi} + e^{-2\varphi}}d\varphi \\
&= \int_0^\infty \sqrt{2}e^{-\varphi}d\varphi \\
&= \sqrt{2}(-e^{-\varphi}\Big|_0^\infty) \\
&= \sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

4. Izračunaj dolžino krivulje, podane v polarnih koordinatah $r = R$.

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + 0}\, d\varphi = 2\pi R$$

4. Računanje površin vrtenin

Vzemimo funkcijo

$$y = f(x) = (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}},\ x \in [-1, 1]$$

in izračunajmo površino vrtenine, ki jo dobimo z rotacijo grafa okoli osi x. Po rotaciji okoli osi x bo iz dela grafa med točkama x in $x + dx$ nastal plašč tankega valja s polmerom osnovne ploskve $|f(x)|$ in višino ds, kjer je ds dolžina grafa nad intervalom $[x, x + dx]$ (slika 6.4). Njegova površina je

$$dS_x = 2\pi |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Celotna površina na intervalu $[-1, 1]$ je potem

$$S_x = 2\pi \int_{-1}^{2} |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

V našem primeru je

$$f'(x) = \frac{3}{2}(1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}(-\frac{2}{3})x^{-\frac{1}{3}}.$$

Izračunajmo posebej še izraz pod korenom:

$$1 + \dot{y}(x)^2 = 1 + (1 - x^{\frac{2}{3}})x^{-\frac{2}{3}} = x^{-\frac{2}{3}}.$$

Zaradi simetrije je površina vrtenine enaka

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot 2\pi \int_0^1 (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} x^{-\frac{1}{3}}\, dx \\ &= 4\pi \int_1^0 u^{\frac{3}{2}} (-\frac{3}{2})\, du \\ &= 4\pi \frac{3}{2} \int_0^1 u^{\frac{3}{2}}\, du \\ &= 6\pi \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 = \frac{12\pi}{5}. \end{aligned}$$

V integral smo uvedli spremenljivko $1 - x^{\frac{2}{3}} = u$.

Podobno formulo za izračun površine dobimo za parametrično podane krivulje $\vec{s}(t) = (x(t), y(t))$:

$$S = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} |y(t)| \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt.$$

Za krivulje, podane v polarnem zapisu z $r = r(\varphi)$, dobimo

$$S = 2\pi \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r(\varphi) |\sin(\varphi)| \sqrt{r(\varphi)^2 + \dot{r}(\varphi)^2}.$$

Na enak način pridemo do formule za površine vrtenin, dobljenih z rotacijo okoli osi y. Lok razrežemo na majhne loke, ki so skoraj ravni. Pri rotaciji iz lokov nastanejo plašči odsekanih stožcev, ki imajo širino ds in polmer osnovne ploskve x. Za parametrično podane krivulje dobimo formulo

$$S = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} |x(t)| \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt.$$

Primeri.

1. Izračunaj površino vrtenine spirale $r = e^{-\varphi}$ za $\varphi \in [0, \pi]$.

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^{2\pi} e^{-\varphi} \sin(\varphi) e^{-\varphi} \sqrt{2} d\varphi \\ &= 2\sqrt{2}\pi \int_0^{2\pi} \sin(\varphi) e^{-2\varphi} d\varphi \\ &= 2\sqrt{2}\pi (-\frac{1}{5} e^{-2\varphi} (2\sin(t) + \cos(t)) \Big|_0^{\pi} \\ &= -\frac{2\sqrt{2}\pi}{5} (e^{-2\pi}(-1) - 1) \\ &= \frac{2\sqrt{2}\pi}{5} (e^{-2\pi} + 1) \end{aligned}$$

2. Izračunaj površino sfere z radijem R. Sfero z radijem R dobimo, če zavrtimo krožnico okoli osi x (ali y); vrtimo torej graf funkcije $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$.

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$\sqrt{1+f'(x)^2} = \sqrt{\frac{R^2-x^2+x^2}{R^2-x^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx \\ &= 4\pi R \int_0^R dx \\ &= 4\pi R^2 \end{aligned}$$

Izračunajmo površino še z rotacijo okoli osi y.

$$\begin{aligned} S &= 4\pi \int_0^R x\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx \\ &= 4\pi R \int_0^R \frac{udu}{u} \\ &= 4\pi R^2. \end{aligned}$$

V integral smo uvedli spremenljivko $R^2 - x^2 = u^2$.

5. Naloge

6.1. Izračunaj ploščino območja med krivuljama:

$f(x) = 4 + x - x^2$ in $g(x) = 8 + 7x + x^2$,

$f(x) = 8 + 5x - x^2$ in $g(x) = 4 + 3x + x^2$,

$f(x) = 8 + x$ in $g(x) = 4 - x + 2x^2$.

6.2. Območje D je omejeno s krivuljama $y = 0$ in $y = x^2-2x-3$. Izračunaj ploščino D in volumen telesa, ki ga dobimo pri rotaciji območja D okoli osi x.

6.3. Območje D je omejeno s krivuljama $y = 0$ in $y = x^2 - 5x + 4$. Izračunaj ploščino D in volumna teles, ki ju dobimo pri rotaciji območja D okoli osi x oziroma y.

6.4. Območje D je omejeno s krivuljama $y = 2x^2 + x$ in $y = x^2 + x + 1$. Izračunaj ploščino D.

6.5. Območje D je omejeno s krivuljama $y = 0$ in $y = xe^{-x}$. Izračunaj ploščino D in volumen telesa, ki ga dobimo pri rotaciji območja D okoli osi x.

6.6. Območje D je omejeno s krivuljami $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$ in $y = \sin(x)$. Izračunaj ploščino D in volumen telesa, ki ga dobimo pri rotaciji območja D okoli osi x.

6.7. Območje D je omejeno s krivuljami $x = 0$, $y = 0$ in $y = xe^{x-1}$ in leži v območju $x \leq 0$. Izračunaj ploščino D in volumen telesa, ki ga dobimo pri rotaciji območja D okoli osi x.

7. Rešitve nalog

1. Števila

1.1.

$$
\begin{aligned}
&(2+3i)(4+5i) = 8-15+i(12+10)\\
&(4+3i)^{-1}(2+2i) = (8+6+i(-6+8))/25\\
&(2+2i)\overline{(3+3i)} = 12\\
&(1+i)^6 = -8i
\end{aligned}
$$

1.2.

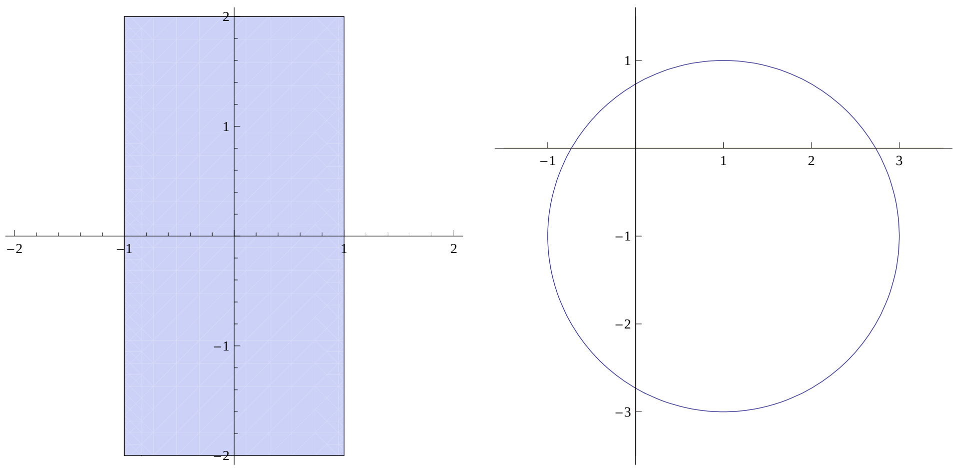
$$
\begin{aligned}
&z_1 = 1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}\\
&z_2 = -i = e^{-i\pi/2}\\
&z_3 = 1+\sqrt{3}i = 2e^{i\pi/3}\\
&z_4 = 5 = 5e^0
\end{aligned}
$$

1.3.

$$
\begin{aligned}
&z^3 = 1+i \;\; z_k = 2^{1/6}e^{i\pi(1/12+2k/3)},\; k=0,1,2\\
&z^2 = -i, \;\; z_k = e^{i\pi(-1/4+k)},\; k=0,1\\
&z^6 = 1+\sqrt{3}i = 21/6e^{i\pi(1/18+2k/6)},\; k=0,\ldots,5\\
&z^5 = 5z, \;\; z_k = 5^{1/4}e^{i\pi 2k/4},\; k=0,1,2,3, z_5 = 0
\end{aligned}
$$

Prva rešitev so oglišča enakostraničnega trikotnika, včrtanega krožnici z radijem $2^{1/6}$ in enim ogliščem pri kotu $\pi/12$. Druga rešitev sta nasprotni točki na krožnici z radijem 1, $(1+i)/\sqrt{2}$ in $(-1-i)/\sqrt{2}$. Tretja rešitev so oglišča pravilnega šestkotnika, včrtanega krožnici z radijem $2^{1/6}$ in enim

oglišče m pri kotu $\pi/18$. Četrta rešitev so oglišča kvadrata, včrtanega krožnici z radijem $5^{1/4}$, z oglišči na koordinatnih oseh skupaj s koordinatnim izhodiščem.
1.4. Prva množica je pas nad intervalom $[-1, 1]$ na realni osi, druga množica je krožnica s središčem $(1, -1)$ in polmerom 2, tretja pa je os y. Prvi dve množici sta prikazani na sliki 7.1.



(a) $|\operatorname{Re} z| \leq 1$ (b) $|z - 1 + i| = 2$

Slika 7.1: Množici iz naloge 1.3

1.5. Točka $A = (2, 4)$, ploščina je 3, obseg je $2(\sqrt{2} + \sqrt{5})$, en notranji kot je $\varphi = \arccos(1/\sqrt{10}) \doteq 71.5651^0$. Drugi kot je $180^0 - \varphi$.
1.6. Iz skalarnega produkta dobimo $(a, 2)(2, 2 + a) = 2a + 4 + 2a = 0$. Rešitev je $a = -1$.
1.7. Naj bo $A = (4, 5)$ in $B = (1, 4)$. Smerni vektor je $\overrightarrow{AB} = (-3, -1)$, enačba pa je

$$(x, y) = (4, 5) + t(-3, -1).$$

1.8. Naj bo $A = (1, 2, 3)$ in $B = (2, 1, 1)$. Smerni vektor je $\overrightarrow{AB} = (1, -1, -2)$, enačba pa je

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(1, -1, -2).$$

1.9. Rešitev prvega sistema je $x = 1, y = 2, z = 3$. Drugi sistem ima rang 2 in rešitev $y = 4 + 2x$, $z = -4 - 5x$. Rešitev tretjega sistema je $x = 1$, $y = 1$ in $z = 1$.

2. Funkcije

2.1. Funkcija je bijektivna z inverzom

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x}+1, & x \geq 0, \\ x+1, & x \leq 1. \end{cases}$$

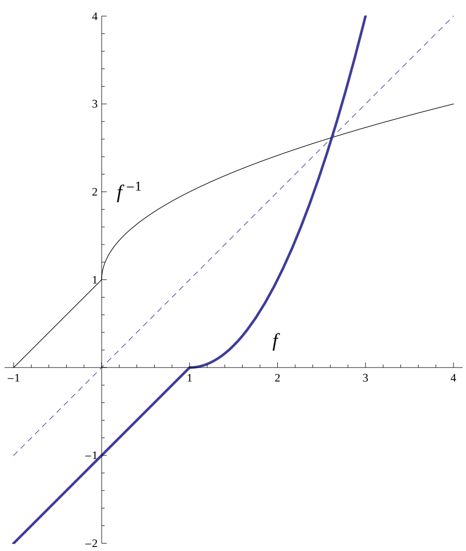
Grafa funkcije in inverza prikazuje slika 7.2.

2.2. Funkcija je bijektivna z inverzom

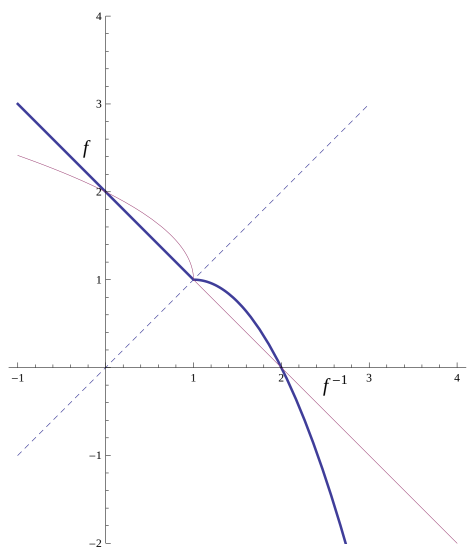
$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 1+\sqrt{1-x}, & x \leq 1, \\ -x+2, & x \geq 1. \end{cases}$$

Grafa funkcije in inverza prikazuje slika 7.2.

2.3. Presečišča so $p_1 \cap p_4 = (-14/13, -8/13)$, $p_2 \cap p_4 = (0, 1)$ in $p_3 \cap p_4 = (6, 10)$. Grafi so na sliki 7.3.



(a) Grafa iz naloge 2.1

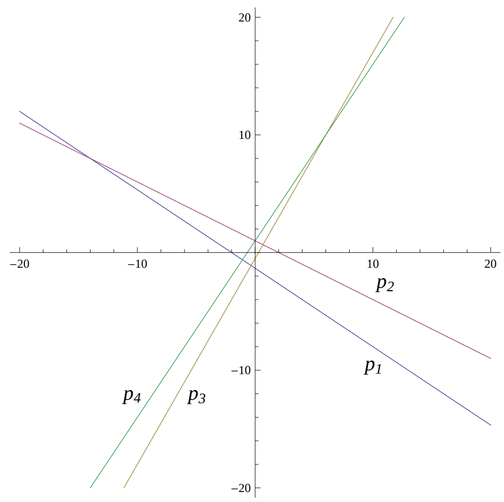


(b) Grafa iz naloge 2.2

Slika 7.2

2.4. Asimptote so: za f_1, f_2 in f_3 je $A = 1$, za f_4 je $A = 0$, ko gre $x \to -\infty$. Grafi so na sliki 7.4.

2.5. Grafi so na slikah 7.5 in 7.6.



Slika 7.3: Premice iz naloge 2.3.

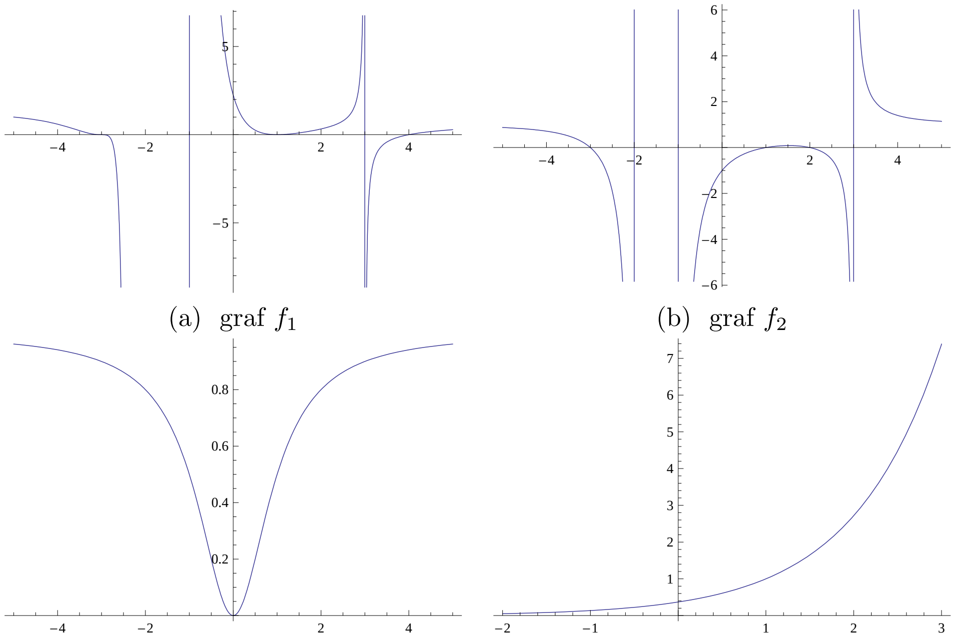
2.6. Rešitve enačb so

$$2^{3x-4} = 4^{x+2},\ x = 8,$$
$$4 \cdot 5^{2x} = 25^x 6^x, x = \log 4/(\log 2 + \log 3),$$
$$\log(2x-4) = 3,\ x = (4 + e^3)/2,$$
$$\log_2(3x+2) = 0,\ x = -(1/3),$$
$$\log_2(3x+2) = 2,\ x = 2/3.$$

2.7. Ničle so: -1 (enkratna), 2 (dvakratna) in 3 (trikratna).
2.8. Ničle so: -3 (trikratna), 1 in 2 (enkratni) in konjugirano kompleksni ničli $\pm 2i$ (enkratni).
2.9. Binomski koeficienti so:

$$\binom{50}{48} = 1225, \binom{50}{2} = 1225, \binom{10}{5} = 252,$$
$$\binom{60}{1} = 60, \binom{60}{59} = 60.$$

2.10. Ničla je 0.258652. Preostali ničli sta -1.52569 in 1.26704.
2.11. Iščemo ničlo funkcije $x \sin x - 10$. Z bisekcijo dobimo 13.4081.



(a) graf f_1 (b) graf f_2

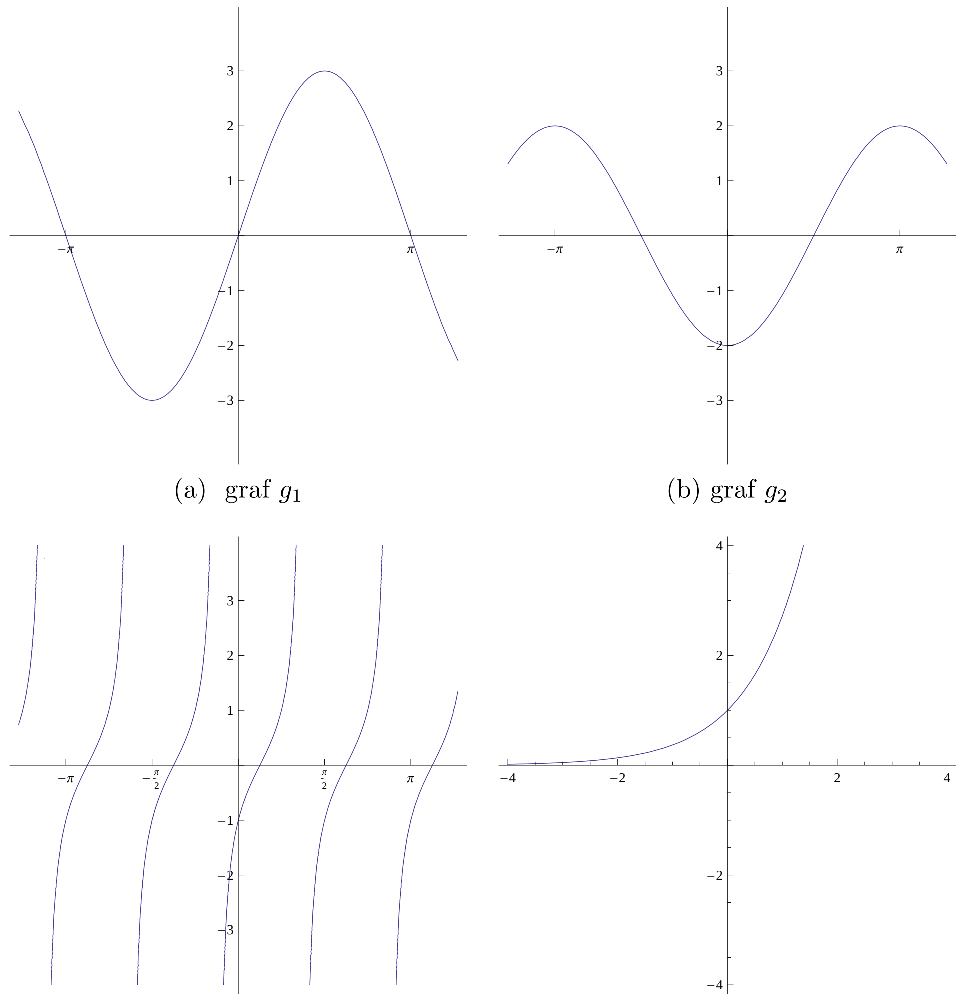
(c) graf f_3 (d) graf f_4

Slika 7.4: Grafi iz naloge 2.4.

3. Odvod

3.1. Definicijska območja za funkcije so:

$$
\begin{aligned}
&D_{f_5} = \cup_{k=-\infty}^{\infty}[2k\pi - \pi/2, 2k\pi + \pi/2],\\
&D_{f_8} = \mathbb{R} \setminus \{2\pi(2k+1)\},\\
&D_{f_{11}} = (-\frac{1}{5}, \infty),\\
&D_{f_{12}} = (0, \infty),\\
&D_{f_{13}} = (9, \infty).
\end{aligned}
$$



(a) graf g_1 (b) graf g_2

(c) graf g_3 (d) graf g_4

Slika 7.5: Grafi iz naloge 2.5.

Druge funkcije so definirane na $\mathbb{R}$. Odvodi so:

$f_1(x) = x^3 - 9x^2, \quad f_1'(x) = 3x^2 - 18,$

$f_2(x) = 4x - 4x^2 - x^3, \quad f_2'(x) = 4 - 8x - 3x^2,$

$f_3(x) = (x^2 - 4x + 4)^{\frac{1}{4}}, \quad f_3'(x) = (1/4)(x^2 - 4x + 4)^{-\frac{3}{4}}(2x - 4),$

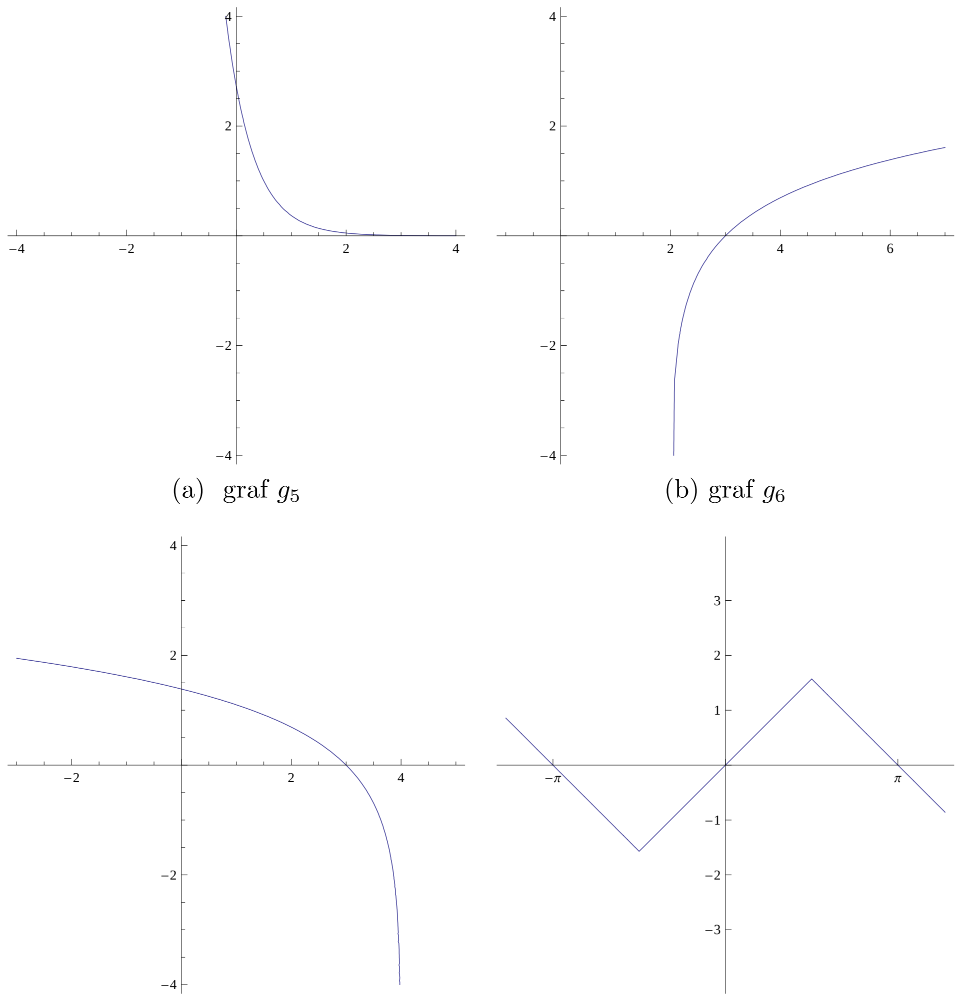
$f_4(x) = \cos(x)(\sin(x))^{\frac{1}{3}}, \quad f_4'(x) = -\sin(x)^{\frac{4}{3}} + (1/3)\cos^2 x(\sin(x))^{-\frac{2}{3}},$

$f_5(x) = (\cos(x))^{\frac{1}{4}}, \quad f_5'(x) = -(1/4)\sin x(\cos x)^{-\frac{1}{4}},$

$f_6(x) = 2\cos(3x) - 1, \quad f_6'(x) = -2\sin x,$

$f_7(x) = -\sin(2x + \pi), \quad f_7'(x) = -2\cos(2x + \pi),$

$f_8(x) = 2x\,\mathrm{tg}(x/4), \quad f_8'(x) = 2\,\mathrm{tg}(x/4) + (2x)/(4 + x^2),$



(a) graf g_5 (b) graf g_6

(c) graf g_7 (d) graf g_8

Slika 7.6: Grafi iz naloge 2.5.

$f_9(x) = x^2e^{2x+1} + 3, \quad f_9'(x) = 2xe^{2x+1} + 2x^2e^{2x+1},$
$f_{10}(x) = e^{3x^2} - 2, \quad f_{10}'(x) = e^{3x^2}6x,$
$f_{11}(x) = \log(5x + 1), \quad f_{11}'(x) = 5/(5x + 1),$
$f_{12}(x) = 2\log(x) + 1, \quad f_{12}'(x) = 2/x,$
$f_{13}(x) = \log(x^2(x - 9)), \quad f_{13}'(x) = 1/(x - 9) + 2/x.$

3.2. Presečišči sta pri $x = -2$ in $x = 1$, kota pa $\varphi_1 = \operatorname{arctg} y'(-2) = -\operatorname{arctg} 3$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg} y'(1) = \operatorname{arctg} 3$.
3.3. Presečišči sta pri $x = 2$ in $x = -1$, kota pa $\varphi_1 = \operatorname{arctg} y'(2) = \operatorname{arctg} 3$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg} y'(-1) = -\operatorname{arctg} 3$.
3.4. Presečišči sta pri $x = 2$ in $x = -1$. Prvi smerni vektor je $\vec{s}_1(2) = (1, 3)$, drugi $\vec{s}_2(2) = (1, -3)$, kot pa

$$\varphi_1 = \arccos \frac{(1,3)(1,-3)}{10} = \arccos -\frac{8}{10} \doteq 143.13^0.$$

Drugi kot je enak.

4. Uporaba odvoda

4.1. Odvod je

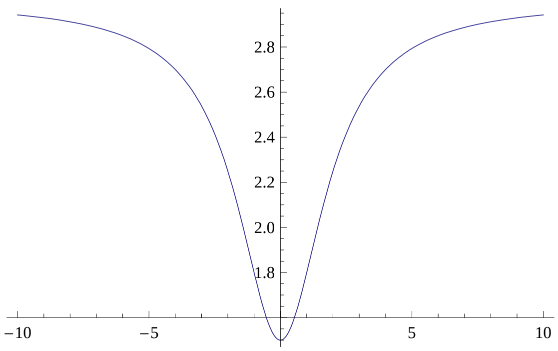
$$f'(x) = e^{-2x}(4 + 2x) - 2e^{-2x}(4 + 4x + x^2) = -2e^{-2x}(x^2 + 3x + 2),$$

ki ima ničli $x = -2$ in -1. Vrednosti v kandidatkah za ekstreme so $f(-2) = 0$, $f(-1) = e^2$, $f(4) = 36e^{-8}$. Minimum je 0, maksimum je e^2.
4.2. Odvod je $f'(x) = 16 \cos 2x$ ki ima ničli $\pi/4, 3\pi/3$. Vrednosti v kandidatkah so $f(0) = 17$, $f(\pi) = 17$, $f(\pi/4) = 25$, $f(3\pi/4) = 9$. Maksimum je 25, minimum pa 9.
4.3. Odvod je $f'(x) = 15 \cos 2x$ ki ima ničli $\pi/4, 3\pi/4$. Vrednosti v kandidatkah so $f(0) = 13$, $f(\pi) = 13$, $f(\pi/4) = 20.5$, $f(3\pi/4) = 5.5$. Maksimum je 20.5, minimum pa 5.5
4.4. Asimptota je 3, polov in ničel ni, odvodi so

$$f'(x) = \frac{12x}{(x^2 + 4)^2}, \quad f''(x) = 12\frac{(x^2 + 4) - 4x^2}{(x^2 + 4)^3} = 12\frac{4 - 3x^2}{(x^2 + 4)^3}.$$

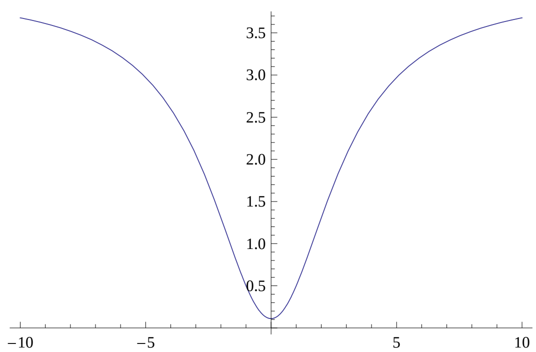
Stacionarna točka je $x = 0$, funkcija narašča za $x > 0$, sicer pada. Prevojne točke so $\pm 2/\sqrt{3}$. Funkcija je na območju $(-2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3})$ konveksna, sicer je konkavna. Graf je na sliki 7.7.
4.5. Asimptota je 4, odvoda sta

$$f'(x) = \frac{70}{(x^2 + 9)^2}, \; f''(x) = 70\frac{(x^2 + 9) - 4x^2}{(x^2 + 9)^3} = 70\frac{9 - 3x^2}{(x^2 + 9)^3}.$$



Slika 7.7: Graf iz naloge 4.4.

Stacionarna točka je $x = 0$, funkcija narašča za $x > 0$, sicer pada. Prevojne točke so $\pm\sqrt{3}$. Funkcija je na območju $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ konveksna, sicer je konkavna. Graf je na sliki 7.8.



Slika 7.8: Graf iz naloge 4.5.

4.6. Z L'Hôspitalovim pravilom izračunamo:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\arcsin(x-3)}{x^2 - 3x} = \lim_{x\to 3} \frac{(1-(x-3)^2)^{-1/2}}{2x-3} = \frac{1}{3};$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos(x)+x-\pi/2}{(x-\pi/2)^3} &= \lim_{x\to\pi/2}\frac{-\sin(x)+1}{3(x-\pi/2)^2}\\ &= \lim_{x\to\pi/2}\frac{-\cos(x)}{6(x-\pi/2)}\\ &= \lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin(x)}{6}\\ &= \frac{1}{6};\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x-x^2}{\operatorname{arctg}(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{2-2x}{(1+(x-2)^2)^{-1}} = -2;$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x)+(x-\pi)}{(x-\pi)^3} &= \lim_{x\to\pi}\frac{\cos(x)+1}{3(x-\pi)^2}\\ &= \lim_{x\to\pi}\frac{-\sin(x)}{6(x-\pi)}\\ &= \lim_{x\to\pi}\frac{-\cos(x)}{6}\\ &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

5. Integral

5.1.

$$\int_1^2 f_1(x)\,dx = -3x^3 + x^4/4\Big|_1^2 = -\frac{69}{4}$$

$$\int_1^2 f_2(x)\,dx = 2x^2 - (4x^3)/3 - x^4/4\Big|_1^2 = -\frac{85}{12}$$

$$\int_1^2 f_3(x)\,dx = -(4/x) + 2\log x\Big|_1^2 = 2 + \log 4$$

$$\int_1^2 f_4(x)\,dx = 3x + x^2/2 + 4\log x\Big|_1^2 = 9/2 + \log 16$$

$$\int_1^2 f_5(x)\,dx = x\sin x\Big|_1^2 - \int_1^2 \sin x\,dx = 2\sin 2 - \sin 1 + \cos 2 - \cos 1$$

$$\int_1^2 f_6(x)\,dx = (-x + 2/3\sin(3x))\Big|_1^2 = -1 + 2/3(-\sin 3 + \sin 6)$$

$$\int_1^2 f_7(x)\,dx = -(1/2)\cos 2x\Big|_1^2 = -(1/2)(\cos 4 - \cos 2)$$

$$\int_1^2 f_8(x)\,dx = \frac{2x+1}{-3}e^{-3x}\Big|_1^2 + \frac{2}{3}\int_1^2 e^{-3x}\,dx =$$
$$= -\frac{5}{3}e^{-6} + e^{-3} - \frac{2}{9}(e^{-6} - e^{-3})$$

$$\int_1^2 f_9(x)\,dx = \left(\frac{x^2}{2}e^{2x+1} + 3x\right)\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 2xe^{2x+1}\,dx =$$
$$= \frac{4}{2}e^5 - \frac{1}{2}e^3 + 3 - \frac{1}{2}\int_1^2 2xe^{2x+1}\,dx =$$
$$= \frac{4}{2}e^5 - \frac{1}{2}e^3 + 3 - \frac{1}{2}xe^{2x+1}\Big|_1^2 + \frac{1}{2}\int_1^2 e^{2x+1}\,dx =$$
$$= 3 + 2e^5 - \frac{e^3}{2} - e^5 + \frac{e^3}{2} + \frac{1}{4}(e^5 - e^3) = 3 + \frac{5}{4}e^5 - \frac{e^3}{4}$$

$$\int_1^2 f_{10}(x)\,dx = \left(\frac{1}{3}e^{3x} - 2x\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{3}(e^6 - e^3) - 2$$

$$\int_1^2 f_{11}(x)\,dx = \left(\frac{1}{5}(-1-5x) + \frac{1}{5}(1+5x)\log(1+5x)\right)\Big|_1^2 =$$
$$= -1 - \frac{6\log 6}{5} + \frac{11\log 11}{5}$$

$$\int_1^2 f_{12}(x)\,dx = -x + 2x\log(x)\Big|_1^2 = -1 + \log 16$$

5.2.

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{20} xe^{x-1}\,dx = \frac{1}{e} + 19e^{19}\\
&\int_{-20}^{0} (x^3+2x)e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}(1-401e^{400})\\
&\int_0^{5} xe^{-x}\,dx = 1 - \frac{6}{e^5}\\
&\int_{-3}^{0} xe^{2x-4}\,dx = -\frac{-7+e^6}{4e^{10}}\\
&\int_0^{100} x^4e^{-x}\,dx = 24 - \frac{104122424}{e^{100}}\\
&\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\\
&\int_0^{1} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{\log 2}{2}\\
&\int_0^{1} \frac{x+1}{1+2x+x^2}\,dx = \log 2
\end{aligned}
$$

5.3.

$$\int_{-\infty}^{0} (x^3+2x)e^{x}\,dx = -8, \quad \int_0^{\infty} xe^{-x-1}\,dx = \frac{1}{e}.$$

6. Uporaba integrala

6.1.

1. Presečišči f_1 in g_1 sta -1 in -2, ploščina pa

$$\int_{-2}^{-1} f_1(x) - g_1(x)\,dx = \left(-4x - 3x^2 - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{-1} = \frac{1}{3}.$$

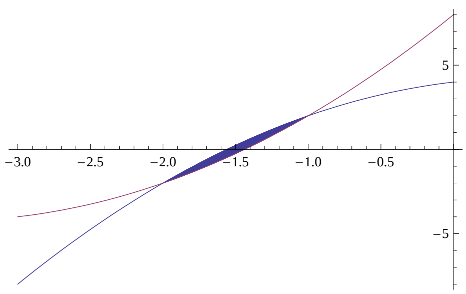
2. Presečišči f_2 in g_2 sta -1 in 2, ploščina pa

$$\int_{-1}^{2} f_2(x) - g_2(x)\,dx = \left(4x + x^2 - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2} = 9.$$

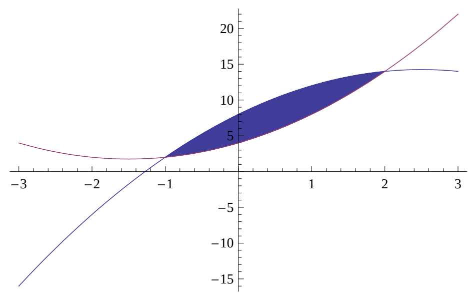
3. Presečišči f_3 in g_3 sta -1 in 2, ploščina pa

$$\int_{-1}^{2} f_3(x) - g_3(x)\,dx = \left(4x + x^2 - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2} = 9.$$

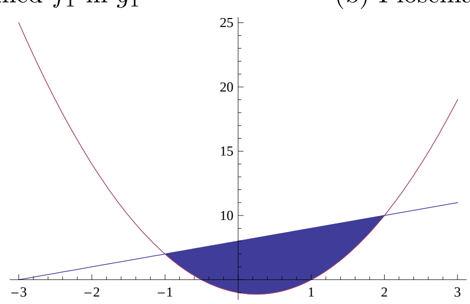
Grafi funkcij so na sliki 7.9.



(a) Ploščina med f_1 in g_1



(b) Ploščina med f_2 in g_2



(c) Ploščina med f_3 in g_3

Slika 7.9

6.2.

$$\begin{aligned} P &= -\int_{-1}^{3} x^2 - 2x - 3\,dx = \frac{32}{3} \\ V_x &= \pi \int_{-1}^{3} (x^2 - 2x - 3)^2\,dx = \frac{512\pi}{15} \end{aligned}$$

6.3. $P = 9/2$, $V_x = 81\frac{\pi}{10}$, $V_y = 2\pi \int_1^4 x(x^2 - 5x + 4)\, dx = 45\pi/2$
6.4. $P = \frac{4}{3}$
6.5. $P = 1$, $V_x = \pi/4$, $V_y = 4\pi$
6.6. $P = 2$, $V_x = \pi^2/2$
6.7. $P = 1/e$, $V_x = \pi/(4e^2)$