# Matematika 1

Jaka Cimprič

# Predgovor

Pričujoči učbenik je namenjen študentom tistih univerzitetnih programov, ki vključujejo samo eno leto matematike. Nastala je na podlagi izkušenj, ki jih imam s poučevanjem tekstilcev in lesarjev. Prvi trije deli so posvečeni funkcijam ene spremenljivke, zadnji trije pa linearni algebri, funkcijam več spremenljivk in diferencialnim enačbam. Na programih, kjer poučujem, je statistiki namenjen poseben predmet, zato vsebin iz verjetnostnega računa in statistike nisem vključil. Vsako poglavje se konča s primeri izpitnih vprašanj, ki so namenjena utrjevanju snovi. Posebna pozornost je namenjena skicam. Matematika namreč ne zahteva samo računskih spretnosti, ampak tudi dobro geometrijsko predstavo.

# Logični simboli in uporabljene oznake

| | |
|---|---|
| $\forall$ | za vsak |
| $\exists$ | obstaja |
| $\Longrightarrow$ | sledi |
| $\Longleftrightarrow$ | je ekvivalentno |
| $:$ | tako da |
| $\{x\colon L\}$ | množica vseh $x$, ki zadoščajo $L$ |
| $\{a, b\}$ | množica z elementoma $a$ in $b$ |

# Kazalo

# Del 1

# Limite

POGLAVJE 1

# Zaporedja realnih števil

## 1.1. Osnovne lastnosti realnih števil

Naravna števila so nastala iz potrebe po preštevanju. Množico naravnih števil označujemo z $\mathbb{N}$. Določajo jo Peanovi aksiomi. Eden od njih je **princip popolne indukcije**, ki pravi: *Podmožica v* $\mathbb{N}$*, ki vsebuje število* 1 *in ki poleg vsakega števila, ki ga vsebuje, vsebuje tudi za ena večje število, je enaka* $\mathbb{N}$. Ker razlika dveh naravnih števil ni nujno naravno število, je smiselno, da k množici naravnih števil dodamo število nič in negativna cela števila. Tako dobimo množico celih števil. Oznaka zanjo je $\mathbb{Z}$. Ker kvocient dveh neničelnih celih števil ni nujno celo število, je smiselno, da k množici celih števil dodamo ulomke. Tako dobimo množico racionalnih števil. Oznaka zanjo je $\mathbb{Q}$. Z racionalnimi števili se ne da opisati nekaterih geometrijskih količin, na primer dolžine diagonale kvadrata s stranico 1 ali obsega kroga s polmerom 1, zato uvedemo tudi realna števila. Oznaka za množico realnih števil je $\mathbb{R}$.

Množico $\mathbb{Z}$ si predstavljamo kot v obe smeri neskončno množico točk na premici z razmikom 1 med sosedama. Množico $\mathbb{Q}$ si predstavljamo kot "gosto"množico točk na premici (to pomeni, da med poljubnima dvema različnima točkama na premici leži kako racionalno število). Vemo, da ima množica $\mathbb{Q}$ "luknje", saj ne vsebuje niti $\sqrt{2}$ niti $\pi$. Če "zakrpamo" te luknje, dobimo množico $\mathbb{R}$. Množico realnih števil si torej predstavljamo kot premico (pravimo ji realna os), realna števila pa kot točke na tej premici.

Naštejmo sedaj osnovne računske operacije z realnimi števili in njihove temeljne lastnosti. Če sta $x$ in $y$ realni števili, potem sta tudi njuna **vsota** $x+y$ in **produkt** $xy$ realni števili. 0 in 1 sta realni števili. Če je $x$ realno število, potem je tudi njegovo **nasprotno število** $-x$ realno število. Če je $x$ neničelno realno število, potem je tudi njegova **obratna vrednost** $x^{-1}$ realno število. Odštevanje lahko izrazimo s pomočjo seštevanja ($x - y = x + (-y)$) in deljenje lahko izrazimo s pomočjo množenja ($x/y = xy^{-1}$). Za poljubne $x, y, z$ iz $\mathbb{R}$ velja:

A1) $x + y = y + x$,
A2) $(x + y) + z = x + (y + z)$,

A3) $x + 0 = 0 + x = x$,
A4) $x + (-x) = (-x) + x = 0$,
A5) $xy = yx$,
A6) $(xy)z = x(yz)$,
A7) $x1 = 1x = x$,
A8) če $x \neq 0$, potem $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$,
A9) $(x + y)z = xz + yz$.

V nadaljevanju bo zelo pomembno vlogo igrala **relacija urejenosti** realnih števil. Naštejmo njene temeljne lastnosti:

A10) Za poljubni števili $x, y \in \mathbb{R}$ velja bodisi $x < y$ bodisi $x = y$ bodisi $y < x$.
A11) Za poljubni števili $x, y \in \mathbb{R}$, ki zadoščata $x < y$, velja $x + z < y + z$ za vsak $z \in \mathbb{R}$ ter $xz < yz$ za vsak $z > 0$.

Poleg tega ima relacija urejenosti realnih števil **Dedekindovo lastnost**. Preden povemo, kaj je to, potrebujemo nekaj definicij.

Naj bo $\mathcal{A}$ neprazna podmnožica v $\mathbb{R}$. Pravimo, da je število $c \in \mathbb{R}$ **gornja meja** množice $\mathcal{A}$, če za vsak $a \in \mathcal{A}$ velja $a \leq c$. Če množica $\mathcal{A}$ nima nobene gornje meje, potem pravimo, da je **navzgor neomejena**, sicer pa, da je **navzgor omejena**. Sedaj lahko formuliramo Dedekindovo lastnost:

A12) Vsaka neprazna navzgor omejena množica realnih števil ima najmanjšo gornjo mejo.

Vsaka navzgor omejena množica ima neskončno mnogo gornjih meja, saj je vsako število, ki je večje od kake gornje meje, spet gornja meja. Dedekindova lastnost pravi, da med vsemi gornjimi mejami obstaja taka, ki je najmanjša. Označimo jo s $\sup \mathcal{A}$ in ji pravimo **supremum** množice $\mathcal{A}$. Kadar množica $\mathcal{A}$ ni navzgor omejena, pišemo $\sup \mathcal{A} = +\infty$, kadar pa je prazna, pišemo $\sup \mathcal{A} = -\infty$. Dedekindova lastnost torej pravi, da ima vsaka navzgor omejena podmnožica v $\mathbb{R}$ končen supremum.

Navzgor omejena množica nima nujno največjega elementa. Kadar pa ga ima, ga označimo z $\max \mathcal{A}$ in mu pravimo **maksimum** množice $\mathcal{A}$. Kadar množica ima maksimum, je ta enak supremumu.

Če v definiciji gornje meje obrnemo neenačaj, dobimo definicijo **spodnje meje**. Množica je **navzdol omejena**, če ima kako spodnjo mejo, sicer pa je **navzdol neomejena**. Iz Dedekindove lastnosti sledi, da ima vsaka navzdol omejena množica največjo spodnjo mejo, ki se imenuje **infimum**. Dogovorimo se, da je infimum navzdol neomejene množice $-\infty$, prazne pa $+\infty$. Navzdol omejena množica nima nujno najmanjšega elementa, ko pa ga ima, ga označimo z $\min \mathcal{A}$ in mu pravimo **minimum** množice $\mathcal{A}$. Kadar množica ima minimum, je ta enak infimumu.

Vse ostale lastnosti osnovnih računskih operacij in relacije urejenosti se da izpeljati iz lastnosti A1 do A12, zato so te lastnosti **aksiomi realnih števil**.

## 1.2. Povezane množice, absolutna vrednost, okolice

Pravimo, da je podmnožica v $\mathbb{R}$ **povezana**, če je vsako število, ki leži med dvema številoma iz te množice tudi število iz te množice. Krajši premislek z gornjimi in spodnjimi mejami pokaže, da imamo devet tipov povezanih podmnožic v $\mathbb{R}$ in sicer:

(1) **zaprti intervali** so oblike $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}\colon\ a \leq x \leq b\}$,
(2) **odprti intervali** so oblike $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}\colon\ a < x < b\}$,
(3) **levo polodprti intervali** so $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}\colon\ a < x \leq b\}$,
(4) **desno polodprti intervali** so $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}\colon\ a \leq x < b\}$,
(5) **zaprti desni poltraki** so oblike $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}\colon\ a \leq x\}$,
(6) **odprti desni poltraki** so oblike $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}\colon\ a < x\}$,
(7) **zaprti levi poltraki** so oblike $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}\colon\ x \leq a\}$,
(8) **odprti levi poltraki** so oblike $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}\colon\ x < b\}$,
(9) $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Prvi primer vključuje tudi množice z eno samo točko, velja namreč $[a, a] = \{a\}$.

Za vsako realno število $x$ definiramo njegovo **absolutno vrednost**

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

V nadaljevanju bomo pogosto uporabljali naslednje lastnosti absolutne vrednosti:

(1) $|ab| = |a|\ |b|$,
(2) $|a + b| \leq |a| + |b|$ in
(3) $|a - b| \geq ||a| - |b||$

za poljubna $a$ in $b$. Dokaz prvih dveh je tako preprost, da ga prepustimo bralcu. Dokažimo tretjo lastnost. Prepričati se moramo, da za poljubna $a$ in $b$ velja tako $|a| - |b| \leq |a - b|$ kot tudi $|b| - |a| \leq |a - b|$. Prva neenakost sledi iz $|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$, druga pa iz $|b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a|$. Obakrat smo uporabili lastnost (2).

Definirajmo **razdaljo** med dvema realnima številoma kot absolutno vrednost njune razlike. Razdalja med številoma $u$ in $v$ je torej $|u - v|$. Asolutna vrednost realnega števila je tako ravno njegova razdalja do števila 0.

Za poljubno realno število $a$ in poljubno strogo pozitivno realno število $\epsilon$ označimo z $O(a, \epsilon)$ množico vseh realnih števil, ki so od $a$ oddaljena za manj kot $\epsilon$. S formulo:

$$O(a, \epsilon) = \{x \colon |x - a| < \epsilon\}.$$

Množici $O(a, \epsilon)$ pravimo $\epsilon$-**okolica** števila $a$. Vsaka $\epsilon$-okolica je odprti interval, velja namreč $O(a, \epsilon) = (a - \epsilon, a + \epsilon)$. Velja tudi obratno: vsak odprt interval je $\epsilon$-okolica svojega središča, kjer je $\epsilon$ polovica razdalje med krajiščema intervala.

## 1.3. Decimalni zapis

Najprej si oglejmo, kako strogo pozitivnemu realnemu številu $c$ priredimo njegov decimalni zapis. Naj bo $k$ najmanjše celo število, ki zadošča $c < 10^k$. (Število $k$ obstaja zaradi Dedekindove lastnosti.) Polodprti interval

$$I_k = [0, 10^k)$$

razdelimo na deset enakih delov: $[0, 10^{k-1}), \ldots, [9 \cdot 10^{k-1}, 10^k)$. Natanko eden od teh desetih delov vsebuje $c$, recimo

$$I_{k-1} = [n_{k-1} \cdot 10^{k-1}, (n_{k-1} + 1) \cdot 10^{k-1}).$$

Prva števka v decimalnem zapisu je potem $n_{k-1}$. (Zakaj je $n_{k-1} \neq 0$?) Polodprti interval $I_{k-1}$ spet razdelimo na deset enakih delov. Natanko eden od njih vsebuje $c$, recimo

$$I_{k-2} = [n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + n_{k-2} \cdot 10^{k-2}, n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + (n_{k-2} + 1) \cdot 10^{k-2}).$$

Druga števka v decimalnem zapisu je potem $n_{k-2}$. Če s tem postopkom nadaljujemo, potem za vsako celo število $j$, ki je manjše od $k$, dobimo tak $n_j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, da interval

$$I_j = [\sum_{i=j}^{k-1} n_i \cdot 10^i, 10^j + \sum_{i=j}^{k-1} n_i \cdot 10^i)$$

vsebuje $c$. Če je $k > 0$, potem je decimalni zapis števila $c$

$$n_{k-1} n_{k-2} \ldots n_1 n_0 . n_{-1} n_{-2} n_{-3} \ldots$$

če pa je $k \leq 0$, potem je decimalni zapis števila $c$

$$0.00 \ldots 0 n_{k-1} n_{k-2} n_{k-3} \ldots$$

kjer je med decimalno piko in $n_{k-1}$ ravno $|k|$ ničel.

Številu 0 pripada decimalni zapis $0.000\ldots$. Če je $c$ strogo negativno realno število, potem njegov decimalni zapis dobimo tako, da vzamemo decimalni zapis realnega števila $-c$ in mu dodamo predznak $-$.

Sedaj si oglejmo še obratni postopek, namreč, kako decimalnemu zapisu priredimo realno število. Za realno število, ki ustreza decimalnemu zapisu

$$n_{k-1}n_{k-2}\ldots n_1 n_0.n_{-1}n_{-2}n_{-3}\ldots$$

vzamemo kar supremum množice

$$\{\sum_{i=j}^{k-1} n_i \cdot 10^i\colon\ \ j \in \mathbb{Z}, j < k\}.$$

To deluje tudi za decimalni zapis oblike $0.00\ldots 0n_{k-1}n_{k-2}n_{k-3}\ldots$.

Decimalna zapisa

$$1.000\ldots \text{ in } 0.999\ldots$$

sta različna, vendar jima pripada isto realno število, namreč 1. V splošnem so za poljubno realno število $c$ ekvivalentne naslednje trditve:

(1) $c$ ustreza dvema različnima decimalnima zapisoma,
(2) $c$ ustreza decimalnemu zapisu, ki se konča s samimi ničlami,
(3) $c$ ustreza decimalnemu zapisu, ki se konča s samimi devetkami,
(4) $c$ se da zapisati kot ulomek, katerega imenovalec je potenca števila 10.

Če se decimalni zapis konča s samimi ničlami, teh ničel običajno ne pišemo in pravimo, da gre za **končen** decimalni zapis.

## 1.4. Periodični decimalni zapisi

Vsako racionalno število ima periodičen decimalni zapis. Na primer, racionalno število $\frac{31}{7}$ ima decimalni zapis

$$4.428571428571428571428571428571428571428571428571428571\ldots\ .$$

Opazimo, da se decimalni zapis začne s 4, nato pa se skupina števk 428571 ponavlja v neskončnost. Pravimo, da je 4 **neperiodični del**, 428571 pa **periodični del** decimalnega zapisa in pišemo

$$\frac{31}{7} = 4.\overline{428571}.$$

Dokažimo, da je tako tudi pri drugih racionalnih številih.

Dokaz: Vzemimo racionalno število $\frac{m}{n}$ in določimo njegov decimalni zapis. Izrek o deljenju z ostankom pravi, da obstajata tako celo število $k_0$ in tako naravno število $r_0 \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, da velja

$$m = k_0 n + r_0.$$

Sedaj lahko izberemo take $k_1, k_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ in take $r_1, r_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, da velja

$$\begin{aligned}
10r_0 &= k_1 n + r_1,\\
10r_1 &= k_2 n + r_2,\\
10r_2 &= k_3 n + r_3,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Potem je decimalni zapis števila $\frac{m}{n}$ enak $\frac{m}{n} = K.k_1k_2\ldots$, kjer je $K$ decimalni zapis števila $k_0$. Sedaj se prepričajmo, da se števila $r_1, r_2, \ldots$ od nekod naprej začnejo ponavljati. Obravnavajmo najprej primer, ko je $r_i = 0$ za nek $i$. Potem je tudi $k_j = 0$ in $r_j = 0$ za vsak $j > i$, torej ima $\frac{m}{n}$ končen decimalni zapis. V tem primeru je periodični del decimalnega zapisa enak 0. Obravnavajmo še primer, ko je $r_i \neq 0$ za vsak $i = 1, 2, \ldots$. Ker števila $r_1, \ldots, r_n$ lahko zavzamejo le $n-1$ različnih vrednosti, ne morejo biti vsa različna, saj jih je skupaj več kot $n-1$. Torej obstajata taka $s, t$ med 1 in $n$, da je $s \neq t$ in $r_s = r_t$. Iz $10r_s = k_{s+1}n + r_{s+1}$ in $10r_t = k_{t+1}n + r_{t+1}$ potem sledi $k_{s+1} = k_{t+1}$ in $r_{s+1} = r_{t+1}$. Sedaj iz $10r_{s+1} = k_{s+2}n + r_{s+2}$ in $10r_{t+1} = k_{t+2}n + r_{t+2}$ sledi $k_{s+2} = k_{t+2}$ in $r_{s+2} = r_{t+2}$. Z nadaljevanjem tega postopka dobimo, da je $k_{s+i} = k_{t+i}$ in $r_{s+i} = r_{t+i}$ za vsak $i = 0, 1, 2, \ldots$. Torej je dolžina periodičnega dela v decimalnem zapisu $\frac{m}{n}$ največ $s - t$, neperiodični del pa ima lahko največ $s - 1$ decimalk. Velja $s - t \leq n - 1$ in $s - 1 \leq n - 2$. Seveda je neperiodični del lahko poljubne (a vedno končne) dolžine, saj ni nobene omejitve na dolžino $K$ (to je decimalnega zapisa od $k_0$). $\square$

Pokažimo še, da je vsako realno število, ki ima periodičen decimalni zapis, racionalno. Recimo, da ima realno število $x$ decimalni zapis, katerega periodični del ima dolžino $l$. Tudi realno število $10^l x$ ima periodičen decimalni zapis, in ta decimalni zapis se od nekod naprej ujema z decimalnim zapisom števila $x$. Ko ju odštejemo, dobimo, da je decimalni zapis števila $10^l x - x$ končen. Vemo, da končen decimalni zapis ustreza racionalnemu številu oblike $\frac{m}{10^k}$. Torej je $x = \frac{m}{10^k(10^l - 1)}$.

Podkrepimo to s primerom. Recimo, da je

$$x = 0.3171717\ldots\ .$$

Perioda je dolžine 2, zato pomnožimo obe strani z $10^2 = 100$, dobimo

$$100x = 31.71717\ldots\ .$$

Sedaj obe enakosti odštejemo in dobimo

$$99x = 31.4 = \frac{314}{10}.$$

Torej je

$$x = \frac{314}{10 \cdot 99} = \frac{314}{990} = \frac{157}{495}.$$

## 1.5. Zaporedja realnih števil

**Zaporedje** je predpis, ki vsakemu naravnemu številu $n$ priredi neko realno število $a_n$. Številu $a_n$ pravimo ***n*-ti člen** zaporedja $a$.

Zaporedja podajamo na dva načina: **eksplicitno** ali **rekurzivno**. Prvi način je, da $n$-ti člen izrazimo z $n$.

**Primer.** Primeri eksplicitno podanih zaporedij so:

$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$,
$b_n = 2$,
$c_n =$ decimalni zapis števila $\sqrt{2}$ odrezan za n−to decimalko.

Oglejmo si nekaj začetnih členov teh zaporedij:

$$a_1 = -1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = -\frac{1}{3},\ a_4 = \frac{1}{4},\ \ldots$$

$$b_1 = 2,\ b_2 = 2,\ b_3 = 2,\ b_4 = 2,\ b_5 = 2,\ \ldots$$

$$c_1 = 1.4,\ c_2 = 1.41,\ c_3 = 1.414,\ c_4 = 1.4142,\ \ldots$$

Drugi način, kako podamo zaporedje, je, da podamo nekaj začetnih členov in pa formulo, ki pove, kako se $n$-ti člen izraža s prejšnjimi členi. Na ta način lahko dobimo vse člene zaporedja, ne moremo pa vedno določiti formule za $n$-ti člen.

**Primer.** Primeri rekurzivno podanih zaporedij so:

$$a_1 = 2,\ a_n = a_{n-1} + 3,$$

$$b_1 = 4,\ b_n = b_{n-1}/2,$$

$$c_1 = 1,\ c_2 = 1, c_n = c_{n-1} + c_{n-2}.$$

Tudi tu si oglejmo nekaj začetnih členov:

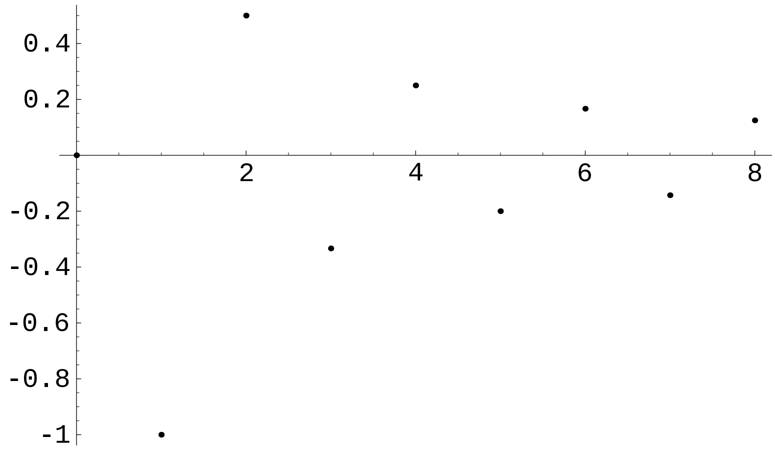
$$a_1 = 2,\ a_2 = a_1 + 3 = 5,\ a_3 = a_2 + 3 = 8,\ a_4 = a_3 + 3 = 11,\ \ldots$$

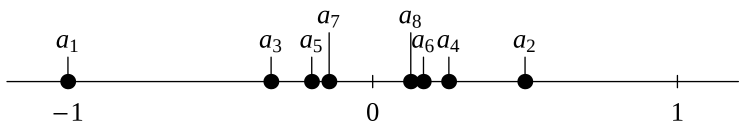
$$b_1 = 4,\ b_2 = b_1/2 = 2,\ b_3 = b_2/2 = 1,\ b_4 = b_3/2 = 1/2, \ldots$$

$$c_1 = 1,\ c_2 = 1,\ c_3 = c_2 + c_1 = 2,\ c_4 = c_3 + c_2 = 3,\ c_5 = c_4 + c_3 = 5, \ldots$$

Zaporedje geometrijsko ponazorimo na dva načina: z grafom ali s sliko. **Graf** zaporedja $a_n$ je množica točk $(n, a_n)$ v ravnini $\mathbb{R}^2$, kjer je $n = 1, 2, \ldots$. (Na os $x$ nanašamo naravna števila $n = 1, 2, \ldots$, na os $y$ pa ustrezne vrednosti $a_n$.) **Slika** zaporedja $a_n$ je množica točk $\{a_n\colon\ n = 1, 2, \ldots\}$ na realni osi $\mathbb{R}$.

**Primer.** Narišimo graf in sliko zaporedja $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$:




## 1.6. Limite zaporedij

Pravimo, da je število $L$ **limita** zaporedja $a_n$, če vsaka $\epsilon$-okolica števila $L$ vsebuje skoraj vse člene zaporedja $a_n$. To pomeni, da je zunaj vsake $\epsilon$-okolice le končno členov zaporedja. Povejmo sedaj to definicijo bolj na dolgo. Število $L$ je limita zaporedja $a_n$, če za vsako strogo pozitivno realno število $\epsilon$ obstaja tako naravno število $n_\epsilon$, da za vsako naravno število $n$, ki je večje ali enako $n_\epsilon$, velja, da sta $a_n$ in $L$ oddaljena za manj kot $\epsilon$. Z matematičnimi simboli to zapišemo takole:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \iff \forall\epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\colon n \geq n_\epsilon \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon.$$

Če je zaporedje $a_n$ podano z grafom, potem si limito $L$ predstavljamo kot vodoravno premico $y = L$, h kateri se graf približuje, ko se gibljemo proti desni. Če je zaporedje $a_n$ podano s sliko, potem si limito $L$ predstavljamo kot edino točko na realni osi, okrog katere se slika zaporedja gosti, ko $n$ narašča.

Najpreprostejši način določanja limite je, da iz grafa ali slike zaporedja uganemo, katero število naj bi bilo limita, in nato dokažemo, da to število res ustreza definiciji limite zaporedja.

**Primer.** Dokažimo, da je število $L = 0$ limita zaporedja $a_n = \frac{1}{n}$. Vzemimo poljubno število $\epsilon > 0$. Poiskati moramo tak $n_\epsilon$, da za vsak $n$, ki je večji ali enak $n_\epsilon$, velja $|a_n - L| < \epsilon$. Ker je $|a_n - L| = \frac{1}{n}$, moramo ugotoviti, od katerega $n_\epsilon$ naprej bo za vse $n$ veljalo $\frac{1}{n} < \epsilon$.

Če to neenakost obrnemo, dobimo $n > \frac{1}{\epsilon}$. Torej lahko za $n_\epsilon$ vzamemo najmanjše naravno število, ki je strogo večje od $\frac{1}{\epsilon}$.

**Primer.** Dokažimo, da je število $c$ limita konstantnega zaporedja $a_n = c$. Za vsak $\epsilon > 0$ vzemimo kar $n_\epsilon = 1$. Očitno za vsak $n$, ki je večji ali enak $n_\epsilon$, velja $|a_n - c| = |c - c| = 0 < \epsilon$.

Seveda se lahko zgodi, da zaporedje sploh nima limite.

**Primer.** Vzemimo, recimo, zaporedje $a_n = (-1)^n$. Potem za poljubno realno število $L$ velja, da je izven intervala $(L-1, L+1)$ neskončno členov zaporedja $a_n$.

**Trditev. Vsako zaporedje ima kvečjemu eno limito.**

Dokaz: Recimo, da bi neko zaporedje $a_n$ imelo dve različni limiti $L_1$ in $L_2$. Vzemimo $\epsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{2}$. Po definiciji limite bi obstajali taki naravni števili $k_\epsilon$ in $l_\epsilon$, da bi veljalo $a_n \in (L_1 - \epsilon, L_1 + \epsilon)$ za vsak $n \geq k_\epsilon$ in $a_n \in (L_2 - \epsilon, L_2 + \epsilon)$ za vsak $n \geq l_\epsilon$. Naj bo $n_\epsilon = \max\{k_\epsilon, l_\epsilon\}$. Potem bi za vsak $n \geq n_\epsilon$ veljalo, da $a_n$ leži v preseku intervalov $(L_1 - \epsilon, L_1 + \epsilon)$ in $(L_2 - \epsilon, L_2 + \epsilon)$, kar pa ni možno, saj smo $\epsilon$ izbrali tako, da je ta presek prazen. $\square$

Pravimo, da je limita zaporedja $a_n$ enaka $+\infty$, če vsak desni poltrak vsebuje skoraj vse člene zaporedja. Z drugimi besedami: za vsako realno število $M$ mora obstajati tako naravno število $n_M$, da za vsako naravno število $n$, ki je večje ali enako $n_M$, velja $a_n \geq M$. Z matematičnimi simboli to zapišemo takole:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_M \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \geq n_M \Rightarrow a_n \geq M.$$

Podobno rečemo, da je limita zaporedja $a_n$ enaka $-\infty$, če vsak levi poltrak vsebuje skoraj vse člene zaporedja. Velja

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_M \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \geq n_M \Rightarrow a_n \leq M.$$

Ker $-\infty$ in $+\infty$ nista realni števili, ju seveda ne smatramo za pravi limiti. Da to razliko poudarimo, pravimo, da so zaporedja, ki imajo končno limito, **konvergentna**, vsa ostala zaporedja pa so **divergentna**.

**Primer.** Dokažimo, da je $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$. Za vsak $M$ moramo najti tak $n_M$, da iz $n \geq n_M$ sledi $n^2 \geq M$. Očitno lahko vzamemo kar $n_M = \sqrt{|M|}$.

## 1.7. Operacije in neenakosti z limitami

Drugi način določanja limite je, da nalogo s pomočjo naslednjih formul prevedemo na iskanje več preprostejših limit.

**Trditev.** **Če velja $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = K}$ in $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = L}$, potem**

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = K + L, \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = K \cdot L,}$$

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = K - L, \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n / b_n) = K/L.}$$

**Pri zadnji formuli moramo paziti, da ne delimo z nič.**

Dokaz: Dokazali bomo samo prvo formulo, ker je dokaz preostalih treh podoben. Recimo, da je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = K \quad \text{in} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = L.$$

Vzemimo poljuben $\epsilon > 0$. Po definiciji limite obstaja tako naravno število $k_{\epsilon/2}$, da velja $|a_n - K| < \epsilon/2$ za vsak $n \geq k_{\epsilon/2}$. Podobno, obstaja tako naravno število $l_{\epsilon/2}$, da velja $|b_n - L| < \epsilon/2$ za vsak $n \geq l_{\epsilon/2}$. Naj bo $n_\epsilon = \max\{k_{\epsilon/2}, l_{\epsilon/2}\}$. Potem za vsak $n \geq n_\epsilon$ velja tako $|a_n - K| < \epsilon/2$ kot $|b_n - L| < \epsilon/2$. Zaradi trikotniške neenakosti za vsak $n$ velja

$$|(a_n + b_n) - (K + L)| \leq |a_n - K| + |b_n - L|.$$

Torej za vsak $n \geq n_\epsilon$ velja $|(a_n + b_n) - (K + L)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$, kar smo želeli dokazati. □

**Primer.** Velja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + n - 7}{3n^2 - 2n + 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{1}{n} - \frac{7}{n^2}}{3 - 2\frac{1}{n} + \frac{4}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty}(2 + \frac{1}{n} - \frac{7}{n^2})}{\lim_{n\to\infty}(3 - 2\frac{1}{n} + \frac{4}{n^2})} =$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{7}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 3 - \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^2}} = \frac{2 + 0 - 0}{3 - 0 + 0} = \frac{2}{3}.$$

Pri predzadnjem enačaju smo upoštevali formuli

$$\lim_{n\to\infty} L = L \quad \text{in} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

ter pravilo, da je limita produkta produkt limit.

Omenimo tudi zvezo med limitami in neenakostmi:

**Trditev. Predpostavimo, da je $\lim_{n\to\infty} a_n = K$ in $\lim_{n\to\infty} b_n = L$. Če velja $K > L$, potem obstaja tak $n_0$, da je $a_n > b_n$ za vsak $n \geq n_0$. Če je $a_n \geq b_n$ za neskončno različnih $n$, potem je $K \geq L$.**

Dokaz: Po predpostavki obstajata limiti

$$K = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{in} \quad L = \lim_{n\to\infty} b_n$$

in zanju velja $K > L$. Za $\epsilon = \frac{K-L}{2} > 0$ imata okolici $O(K,\epsilon)$ ter $O(L,\epsilon)$ prazen presek. Ker prva okolica vsebuje skoraj vse člene zaporedja $a_n$, druga pa skoraj vse člene zaporedja $b_n$, je $a_n > b_n$ za skoraj vsak $n$. Druga trditev je samo drugače povedana prva trditev. □

**Primer.** Recimo, da za vse razen končno mnogo členov zaporedja $a_n$ velja $m \leq a_n \leq M$. Če je zaporedje $a_n$ konvergentno, potem je tudi njegova limita med številoma $m$ in $M$, tj. $m \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq M$.

Tretji način določanja limite zaporedja je, da naše zaporedje $a_n$ vkleščimo med dve zaporedji, ki imata isto limito $L$. Potem ima tudi zaporedje $a_n$ limito $L$. Temu pravimo **metoda sendviča**. Pravimo, da je zaporedje $a_n$ vkleščeno med zaporedji $b_n$ in $c_n$, če velja $b_n \leq a_n \leq c_n$ za vsak $n$. Natančneje:

**Trditev. Naj za zaporedji $b_n$ in $c_n$ velja, da imata isto limito $L$. Če je $b_n \leq a_n \leq c_n$ pri vseh $n$ od nekod naprej, potem ima tudi zaporedje $a_n$ limito $L$.**

Dokaz: Recimo, da za vsak $n \geq m$ velja $b_n \leq a_n \leq c_n$ in da je $\lim_{n\to\infty} b_n = L$, $\lim_{n\to\infty} c_n = L$. Trdimo, da je tudi $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Vzemimo poljuben $\epsilon > 0$. Po definiciji limite obstaja tak $k_\epsilon$, da velja $b_n \in (L-\epsilon, L+\epsilon)$ za vsak $n \geq k_\epsilon$. Prav tako obstaja tak $l_\epsilon$, da velja $c_n \in (L-\epsilon, L+\epsilon)$ za vsak $n \geq l_\epsilon$. Naj bo $n_\epsilon = \max\{m, k_\epsilon, l_\epsilon\}$. Potem sta za vsak $n \geq n_\epsilon$, tako $b_n$ kot $c_n$ v $(L-\epsilon, L+\epsilon)$ ter $a_n$ leži med njima. Zato je tudi $a_n$ v $(L-\epsilon, L+\epsilon)$ pri vseh $n \geq n_\epsilon$, kar smo želeli pokazati. □

Oglejmo si delovanje te metode na dveh primerih.

**Primer.** Poiščimo limito zaporedja

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

Očitno je $-\frac{1}{n} \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ za vsak $n$. Ker je $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, je tudi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

**Primer.** Določimo limito zaporedja

$$a_n = \frac{2^n}{n!}.$$

Očitno je $a_n \geq 0$ za vsak $n$. S popolno indukcijo dokažemo, da je $a_n \leq \frac{1}{n}$ za vsak $n \geq 6$. Ker je $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, je tudi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

## 1.8. Omejena in monotona zaporedja

Zaporedje $a_n$ je **naraščajoče**, če je $a_n \leq a_{n+1}$ za vsak $n$. Podobno definiramo **padajoče** zaporedje. Zaporedje je **monotono**, če je bodisi naraščajoče bodisi padajoče. Pravimo, da je zaporedje $a_n$ **navzgor omejeno**, če je množica $\{a_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ navzgor omejena. Podobno definiramo **navzdol omejeno** zaporedje. Zaporedje je **omejeno**, če je navzgor in navzdol omejeno.

**Primer.** Zaporedje $a_n = \frac{1}{n}$ je padajoče, ker $a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$ za vsak $n$. Pri vseh naravnih številih velja $0 < a_n \leq 1$, zato je zaporedje tudi omejeno.

Pri računanju limit je zelo koristen naslednji izrek.

**Izrek. Vsako monotono zaporedje ima (končno ali neskončno) limito. Če je zaporedje $a_n$ naraščajoče, velja**

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\colon n \in \mathbb{N}\},$$

**če pa je padajoče, potem je**

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\colon n \in \mathbb{N}\}.$$

**Prva limita je končna, če je zaporedje $a_n$ navzgor omejeno, druga pa, če je navzdol omejeno.**

Dokaz: Naj bo $a_n$ naraščajoče zaporedje. Obravnavajmo najprej primer, ko je zaporedje $a_n$ navzgor omejeno. Tedaj je $L := \sup\{a_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ realno število. Vzemimo poljuben $\epsilon > 0$. Ker je $L$ najmanjša gornja meja zaporedja $a_n$, število $L - \epsilon$ ni gornja meja zaporedja $a_n$. Zato obstaja tak $n_\epsilon$, da velja $a_{n_\epsilon} > L - \epsilon$. Odtod sledi, da je $a_n > L - \epsilon$ za vsak $n \geq n_\epsilon$, saj je zaporedje

$a_n$ naraščajoče. Ker je $L$ gornja meja zaporedja $a_n$, je $a_n \leq L$ za vsak $n$. Torej je $a_n \in (L-\epsilon, L+\epsilon)$ za vsak $n \geq n_\epsilon$, kar smo želeli pokazati. Obravnavajmo še primer, ko zaporedje $a_n$ ni navzgor omejeno. Tedaj je $\sup\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\} = +\infty$. Dokažimo, da je tudi $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Vzemimo poljubno število $M$. Ker zaporedje $a_n$ ni navzgor omejeno, obstaja tak $n_M$, da velja $a_{n_M} \geq M$. Kot zgoraj, odtod sledi, da je $a_n \geq M$ za vsak $n \geq n_M$. Za padajoča zaporedja je dokaz podoben. □

**Primer.** Ker je zaporedje $a_n = \frac{1}{n}$ padajoče in navzdol omejeno, je konvergentno. Njegova limita je enaka $L = \inf\{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\}$. Ker je 0 spodnja meja množice $\{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\}$, je $L \geq 0$. Poleg tega noben $\epsilon > 0$ ni spodnja meja množice $\{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\}$, saj za vsak $n > \frac{1}{\epsilon}$ velja $\frac{1}{n} < \epsilon$. Torej je $L = 0$.

**Primer.** Naj bo $q$ realno število z intervala $(0,1)$. Potem je

$$a_n = q^n$$

padajoče zaporedje in je navzdol omejeno z 0. Po gornjem izreku ima zaporedje limito $L = \inf\{q^n \colon \ n = 1, 2, \ldots\} \geq 0$. Če bi bilo število $L$ pozitivno, bi veljalo $\frac{L}{q} > L$. To bi seveda pomenilo, da $\frac{L}{q}$ ni spodnja meja zaporedja in da torej obstaja takšno naravno število $k$, da velja $a_k < \frac{L}{q}$. Toda od tod bi sledilo, da je $a_{k+1} = qa_k < L$, kar je v nasprotju s tem, da je $L$ spodnja meja zaporedja $a_n$. To protislovje pove, da ne more biti $L > 0$, zato je pač $L = 0$.

**Primer.** Zaporedje $a_n$ je podano rekurzivno z

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{3}{a_n}).$$

Pokažimo najprej, da je $a_n \geq \sqrt{3}$ za vsak $n$. Pomagamo si s popolno indukcijo. Očitno je $a_1 \geq \sqrt{3}$. Privzemimo sedaj, da je $a_n \geq \sqrt{3}$ za nek $n$. Potem je tudi $a_{n+1} \geq \sqrt{3}$, saj je $a_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{3}{a_n}) - \sqrt{3} = \frac{1}{a_n}(a_n^2 + 3 - 2\sqrt{3}a_n) = \frac{1}{a_n}(a_n - \sqrt{3})^2$, kar je večje ali enako nič. Pokažimo sedaj, da je $a_n \geq a_{n+1}$ za vsak $n$. Velja $a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}(a_n + \frac{3}{a_n})$ $= \frac{1}{2}(a_n - \frac{3}{a_n}) = \frac{1}{2a_n}(a_n - \sqrt{3})(a_n + \sqrt{3})$, kar je (zaradi $a_n \geq \sqrt{3}$) večje ali enako nič. Prepričali smo se, da je zaporedje $a_n$ padajoče in navzdol omejeno, torej ima neko limito, recimo $L$. Preostane nam še, da ugotovimo, koliko je $L$. Iz formule $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{3}{a_n})$ sledi, da je

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(a_n + \frac{3}{a_n}).$$

Ker je graf zaporedja $b_n = a_{n+1}$ samo v levo zamaknjen graf zaporedja $a_n$, imata ti zaporedji isto limito. Torej je leva stran v gornji enačbi enaka $L$. S pomočjo formul za računanje z limitami dobimo, da je desna stran v gornji enačbi enaka $\frac{1}{2}(L + \frac{3}{L})$. Iz enačbe

$$L = \frac{1}{2}(L + \frac{3}{L})$$

izračunamo, da je $L = \sqrt{3}$ ali $L = -\sqrt{3}$. Druga rešitev ni največja spodnja meja, saj je strogo manjša od spodnje meje $\sqrt{3}$. Torej je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{3}.$$

Pri dokazovanju, da zaporedje ni konvergentno, je zelo koristen naslednji izrek.

**Izrek. Če zaporedje ni navzgor ali navzdol omejeno, potem ni konvergentno.**

Dokaz: Vzemimo namreč neko zaporedje $a_n$ z limito $L$. Če vzamemo $\epsilon = 1$, potem po definiciji limite obstaja tak $n_0$, da za vsak $n \geq n_0$ velja $a_n \in (L-1, L+1)$. Definirajmo sedaj

$$m = \min\{L-1, a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}\}, \quad M = \max\{L+1, a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}\}.$$

Potem za vsak $n$ velja $m \leq a_n \leq M$. (Preveri posebej za $n \geq n_0$ in $n < n_0$.) Torej je slika zaporedja $a_n$ navzgor in navzdol omejena. □

**Primer.** Zaporedje $a_n = n$ ni konvergentno, saj ni navzgor omejeno. Zaporedje $a_n = -n$ ni konvergentno, saj ni navzdol omejeno. Zaporedje $a_n = (-1)^n n$ ni konvergentno, saj ni niti navzgor niti navzdol omejeno.

## 1.9. Podzaporedja

Zaporedje $b_n$ je **podzaporedje** zaporedja $a_n$, če obstaja tako strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil $\phi_n$, da velja $b_n = a_{\phi_n}$.

**Primer.** Oglejmo si nekaj podzaporedij zaporedja $a_n = \frac{1}{n}$. Če vzamemo $\phi_n = n+1$, dobimo podzaporedje $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Za $\phi_n = 2n$ dobimo podzapredje $a_{2n} = \frac{1}{2n}$, za $\phi_n = n^2$ pa podzaporedje $a_{n^2} = \frac{1}{n^2}$. Bralec naj preveri, da je v vseh treh primerih zaporedje $\phi_n$ res strogo naraščajoče.

**Izrek. Vsako podzaporedje zaporedja z limito $L$ ima limito $L$.**

Dokaz: Denimo namreč, da je $a_n$ zaporedje z limito $L$ in $\phi_n$ strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil. Radi bi pokazali, da je $L$ tudi limita zaporedja $b_n = a_{\phi_n}$. Vzemimo poljuben $\epsilon > 0$. Po definiciji limite obstaja tak $n_\epsilon$, da za vsak $n \geq n_\epsilon$ velja $|a_n - L| < \epsilon$. S popolno indukcijo pokažemo, da je $\phi_n \geq n$ za vsak $n$. Torej, če je $n \geq n_\epsilon$, potem je tudi $\phi_n \geq n_\epsilon$ in zato $|a_{\phi_n} - L| < \epsilon$. S tem smo pokazali, da je res $\lim\limits_{n\to\infty} a_{\phi_n} = L$. V primeru, ko je $L = \pm\infty$, je dokaz podoben. □

**Primer.** Zaporedje $a_n = \frac{1}{n}$ ima limito 0. Zato ima tudi njegovo podzaporedje $b_n = a_{n^2+1} = \frac{1}{n^2+1}$ limito 0.

Z gornjim izrekom si lahko pomagamo pri dokazovanju, da nekatera zaporedja nimajo limite.

**Primer.** Zaporedje $a_n = (-1)^n$ nima nobene limite, saj imata njegovi podzaporedji $b_n = a_{2n-1} = -1$ in $c_n = a_{2n} = 1$ različni limiti.

V nadaljevanju nam bo koristila tudi tale lastnost omejenih zaporedij.

**Izrek. Vsako omejeno zaporedje ima konvergentno podzaporedje.**

Dokaz: Naj bo $a_n$ zaporedje, ki je navzdol omejeno z $m_1$, navzgor pa z $M_1$. Potem vsaj eden od podintervalov $[m_1, \frac{m_1+M_1}{2}]$, $[\frac{m_1+M_1}{2}, M_1]$ vsebuje neskončno mnogo členov zaporedja $a_n$. Izberimo en tak podinterval in ga označimo z $[m_2, M_2]$. Spet vsaj eden od podintervalov $[m_2, \frac{m_2+M_2}{2}]$, $[\frac{m_2+M_2}{2}, M_2]$ vsebuje neskončno členov zaporedja $a_n$. Izberimo en tak podinterval in ga označimo z $[m_3, M_3]$. Podobno konstruiramo intervale $[m_4, M_4]$, $[m_5, M_5]$ in tako dalje. Velja

(1) $[m_1, M_1] \supset [m_2, M_2] \supset [m_3, M_3] \supset [m_4, M_4] \supset [m_5, M_5] \supset \ldots$ ;
(2) vsak od intervalov $[m_i, M_i]$ vsebuje neskončno členov zaporedja $a_n$;
(3) presek vseh intervalov $[m_i, M_i]$ je enoelementna množica, recimo $\{L\}$.

Zaporedje $\phi_n$ definiramo rekurzivno. Najprej postavimo $\phi_1 = 1$, potem za vsak $i > 1$ vzamemo za $\phi_i$ najmanjše tako naravno število, da $\phi_i > \phi_{i-1}$ in $a_{\phi_i} \in [m_i, M_i]$. Število $\phi_i$ obstaja zato, ker $[m_i, M_i]$ vsebuje neskončno členov zaporedja $a_n$. Trdimo, da je

$$\lim_{n\to\infty} a_{\phi_n} = L.$$

Vzemimo poljuben $\epsilon > 0$. Izberimo tak $n_0$, da

$$\frac{M_1 - m_1}{2^{n_0}} < \epsilon.$$

Ker $L \in [m_{n_0}, M_{n_0}]$ in ker je $M_{n_0} - m_{n_0} = \frac{M_1 - m_1}{2^{n_0-1}}$, velja

$$[m_{n_0}, M_{n_0}] \subset (L - \epsilon, L + \epsilon).$$

Torej za vsak $n \geq n_0$ velja

$$a_{\phi_n} \in [m_n, M_n] \subseteq [m_{n_0}, M_{n_0}] \subseteq (L - \epsilon, L + \epsilon),$$

kar smo želeli pokazati. □

## 1.10. Neskončne vsote

Zaporedju $a_n$ lahko priredimo novo zaporedje

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ki mu pravimo **zaporedje delnih vsot** zaporedja $a_n$. Limito zaporedja $s_n$ označimo z

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

in ji pravimo **vsota** zaporedja $a_n$. Kadar je zaporedje $s_n$ konvergentno, je vsota $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ realno število. Tedaj pravimo, da je vsota **konvergentna**. Če pa je zaporedje $s_n$ divergentno, potem vsota $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ne obstaja. V tem primeru pravimo, da je vsota **divergentna**.

**Primer.** Vzemimo poljubno realno število $q$ in izračunajmo zaporedje delnih vsot zaporedja $a_n = q^{n-1}$. Če je $q \neq 1$, potem velja

$$s_n = 1 + q + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

če pa je $q = 1$, potem je

$$s_n = n.$$

Kadar je $q \in (-1, 1)$, velja $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$, zato je

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \lim_{n \to \infty} s_n = \frac{1}{1 - q}.$$

Krajši premislek pokaže, da $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ divergira, kadar $q \notin (-1, 1)$.

**Primer.** Izračunajmo zaporedje delnih vsot zaporedja $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Najprej opazimo, da je $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, odkoder sledi

$$s_n = \big(1 - \frac{1}{2}\big) + \big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\big) + \ldots + \big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\big) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Torej je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} s_n = 1.$$

Kadar za vsak $n$ velja $a_n \geq 0$, je zaporedje $s_n$ delnih vsot zaporedja $a_n$ naraščajoče. Za tako zaporedje je vsota $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentno natanko tedaj, ko je zaporedje $s_n$ navzgor omejeno.

**Primerjalni kriterij. Naj bosta $a_n$ in $b_n$ taki nenegativni zaporedji, da za vsak $n$ od nekod naprej velja $a_n \leq b_n$. Če je vsota $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna, potem je konvergentna tudi vsota $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.**

Dokaz: Naj bo $s_n$ zaporedje delnih vsot zaporedja $a_n$ in $t_n$ zaporedje delnih vsot zaporedja $b_n$. Po predpostavki obstaja tako naravno število $n_0$, da je $a_n \leq b_n$ za vsak $n > n_0$. Odtod sledi, da za vsak $n \geq n_0$ velja $s_n - s_{n_0} \leq t_n - t_{n_0}$. Če obstaja limita zaporedja $t_n$, potem je zaporedje $t_n$ navzgor omejeno. Iz ocene $s_n - s_{n_0} \leq t_n - t_{n_0}$ za vse $n \geq n_0$ sledi, da je tudi zaporedje $s_n$ navzgor omejeno. Toda zaporedje $s_n$ je naraščajoče, zato iz omejenosti navzgor sledi, da ima limito. $\square$

**Primer.** Dokažimo, da je vsota

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konvergentna. Zlahka se prepričamo, da je $\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}$ za vsak $n$. V prejšnjem primeru smo pokazali, da je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$, zato je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2$. Sedaj lahko uporabimo primerjalni kriterij z $a_n = \frac{1}{n^2}$ in $b_n = \frac{2}{n(n+1)}$.

Bolj kot primerjalni, je uporaben kvocientni kriterij.

**Kvocientni kriterij. Recimo, da je $a_n$ tako zaporedje, da je $a_n > 0$ za vsak $n$ in da obstaja limita $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$.**

- **Če je $L < 1$, je vsota $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna.**
- **Če je $L > 1$, je vsota $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentna.**

Dokaz: Naj bo $\epsilon = \frac{|1-L|}{2}$. Če $L \neq 1$, potem je $\epsilon > 0$, zato po definiciji limite obstaja tak $n_\epsilon$, da velja $L - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \epsilon$ za vsak $n \geq n_\epsilon$. Če namesto $n$ vstavimo $n_\epsilon, n_\epsilon + 1, \ldots, n-1$, in dobljenih $n - n_0$ ocen zmnožimo, dobimo, da je $(L-\epsilon)^{n-n_\epsilon} < \frac{a_n}{a_{n_\epsilon}} < (L+\epsilon)^{n-n_\epsilon}$ za vsak $n \geq n_\epsilon$. Če je $L < 1$, potem je tudi $L + \epsilon < 1$, zato je vsota

$$\sum_{n=1}^{\infty}(L+\epsilon)^{n-n_\epsilon} = (L+\epsilon)^{1-n_\epsilon}\sum_{n=1}^{\infty}(L+\epsilon)^{n-1} = \frac{(L+\epsilon)^{1-n_\epsilon}}{1-(L+\epsilon)}$$

konvergentna. Po primerjalnem kriteriju sklepamo, da je tudi vsota $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n_\epsilon}}$ konvergentna. Če to vsoto pomnožimo z $a_{n_\epsilon}$, dobimo, kar smo želeli dokazati. Če je $L > 1$, potem je tudi $L - \epsilon > 1$, zato je vsota

$$\sum_{n=1}^{\infty}(L+\epsilon)^{n-n_\epsilon} = (L-\epsilon)^{1-n_\epsilon}\sum_{n=1}^{\infty}(L-\epsilon)^{n-1}$$

divergentna. Iz primerjalnega kriterija sledi, da je tudi vsota $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n_\epsilon}}$ divergentna. □

Pozorni bralec bo opazil da primerjalni kriterij ne pove nič o primeru $L = 1$. Za to obstaja dober razlog. Če vzamemo $a_n = \frac{1}{n^2}$, potem je $L = 1$ in vsota $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentna. Če pa vzamemo $a_n = \frac{1}{n}$, potem je prav tako $L = 1$, vendar se izkaže, da je vsota $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentna.

Za konec brez dokaza omenimo tale pomemben izrek.

**Izrek. Če je vsota $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konvergentna, potem je konvergentna tudi vsota $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.**

Ta izrek uporabljamo v kombinaciji s kvocientnim kriterijem za dokazovanje konvergence vsot zaporedij, ki imajo tudi negativne člene. Obrat tega izreka ne velja, saj se izkaže, da je vsota $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ konvergentna, vsota $\sum_{n=1}^{\infty}|\frac{(-1)^n}{n}|$ pa ne.

## 1.11. Vprašanja za ponavljanje

(1) (Definicija realnih števil)
  (a) Naštej lastnosti seštevanja in množenja realnih števil!
  (b) Naštej lastnosti relacije urejenosti realnih števil!
  (c) Kaj pravi Dedekindova lastnost?
(2) (Omejene množice) Naj bo $\mathcal{A}$ podmnožica v $\mathbb{R}$.
  (a) Kaj je gornja meja množice $\mathcal{A}$?
  (b) Kaj je supremum množice $\mathcal{A}$?
  (c) Kaj je maksimum množice $\mathcal{A}$?
  (d) Na primeru razloži, v čem je razlika med maksimumom in supremumom!
(3) (Povezane množice)
  (a) Definiraj različne vrste intervalov in poltrakov ter jih grafično pojasni.
  (b) Definiraj povezane množice.

(c) Povej primer množice, ki ni povezana.

(4) (Absolutna vrednost)
   (a) Definiraj absolutno vrednost in naštej nekaj njenih lastnosti!
   (b) Kako je definirana $\epsilon$-okolica točke $a$? Izrazi jo z odprtim intervalom!
   (c) Kako definiramo odprti interval $(a, b)$ in zaprti interval $[a, b]$ s pomočjo absolutne vrednosti?
   (d) Reši neenačbo : $|5 - \frac{2}{x}| < 1$.

(5) (Decimalni zapis)
   (a) Grafično pojasni, kako realnemu številu priredimo njegov decimalni zapis.
   (b) Kakšnim številom ustrezajo končni decimalni zapisi?
   (c) Kakšnim številom ustrezajo periodični decimalni zapisi?
   (d) Na primeru pojasni, kako iz periodičnega decimalnega zapisa dobimo pripadajoče število.

(6) (Limita zaporedja)
   (a) Kaj je zaporedje realnih števil? Kako ga narišemo?
   (b) Kaj je limita zaporedja? Kaj je njen geometrijski pomen?
   (c) Povej primer zaporedja, ki ima limito in primer zaporedja, ki nima limite!

(7) (Limite in neenakosti)
   (a) Pokaži, da iz $a_n \leq b_n$ za vsak $n$ sledi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$!
   (b) S primerom pokaži, da iz $a_n < b_n$ za vsak $n$ ne sledi nujno $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$!
   (c) Kaj pravi metoda sendviča?
   (d) Uporabi metodo sendviča na primeru!

(8) (Monotona zaporedja)
   (a) Povej definicijo naraščajočega in definicijo navzgor omejenega zaporedja!
   (b) Kaj vemo o limitah navzgor omejenih naraščajočih zaporedij?
   (c) Kaj vemo o limitah navzgor neomejenih naraščajočih zaporedij?

(9) (Rekurzivna zaporedja)
   (a) Nariši graf zaporedja $a_0 = 2, a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$!
   (b) S popolno indukcijo dokaži, da je gornje zaporedje navzdol omejeno z $\sqrt{2}$!
   (c) S pomočjo točke (2) dokaži, da je gornje zaporedje padajoče!
   (d) Dokaži, da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$!

(10) (Neomejena zaporedja)
   (a) Kako je definirano neomejeno zaporedje?
   (b) Pokaži, da neomejeno zaporedje ne more imeti končne limite!
   (c) Kdaj pravimo, da je limita zaporedja enaka $+\infty$ ali $-\infty$?
   (d) Podaj primer zaporedja, katerega limita je $+\infty$.

(11) (Podzaporedje)
   (a) Kaj je podzaporedje danega zaporedja? Povej tudi primer!
   (b) Podaj primer omejenega zaporedja, ki nima limite, in poišči kako njegovo podzaporedje, ki pa ima limito!
   (c) Ali se lahko zgodi, da zaporedje ima limito, podzaporedje pa ne?

(12) (Vsota zaporedja)
   (a) Kaj je zaporedje delnih vsot danega zaporedja?
   (b) Kaj je vsota danega zaporedja?
   (c) Navedi primer zaporedja s konvergentno vsoto!
   (d) Navedi primer zaporedja z divergentno vsoto!

POGLAVJE 2

# Funkcije iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$

## 2.1. Osnovni pojmi

**Funkcijo** iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$ opišemo z dvema podatkoma:

- podmnožico $D \subseteq \mathbb{R}$ - **definicijskim območjem funkcije** - in
- predpisom, ki *vsakemu* številu iz $D$ priredi *natanko določeno* število iz $\mathbb{R}$.

Funkcije običajno poimenujemo z malimi tiskanimi črkami, najpogosteje $f, g, h$. Definicijsko območje funkcije $f$ označimo z $D(f)$, predpis pa z $x \mapsto f(x)$.

**Primer.** Funkcijo z definicijskim območjem $[-1, 1]$ in predpisom $x \mapsto 1 - x$ označimo z

$$x \mapsto 1 - x, \quad x \in [-1, 1].$$

Če bi radi povedali, da je tej funkciji ime $f$, potem pišemo

$$f\colon x \mapsto 1 - x, \quad x \in [-1, 1],$$

ali

$$f\colon x \mapsto 1 - x, \quad D(f) = [-1, 1].$$

**Primer.** Funkcije

$$f\colon x \mapsto x^2, \quad x \in (-\infty, 0],$$

$$g\colon x \mapsto x^2, \quad x \in [0, \infty),$$

$$h\colon x \mapsto x^2, \quad x \in \mathbb{R},$$

imajo isti predpis vendar različna definicijska območja, zato so $f$, $g$ in $h$ tri različne funkcije.

**Primer.** Zaporedja so ravno funkcije z definicijskim območjem $\mathbb{N}$.

Za vsak predpis obstaja **maksimalno definicijsko območje**, na katerem je predpis smiselno definiran. Vsa možna definicijska območja za dani predpis so vsebovana v maksimalnem definicijskem območju.

**Primer.** Maksimalno definicijsko območje predpisa $x \mapsto x^2$ je množica $\mathbb{R}$. Maksimalno definicijsko območje predpisa $x \mapsto 1/x$ je množica $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Pravimo, da je funkcija $f$ **definirana** na množici $E$, če velja $E \subseteq D(f)$.

**Primer.** Funkcija $f$ je definirana na okolici točke $a$, če obstaja tak $\epsilon > 0$, da velja $O(a, \epsilon) \subseteq D(f)$.

Če je funkcija $f$ definirana na množici $E$, potem lahko definiramo novo funkcijo $f|_E$, ki ji pravimo **skrčitev** funkcije $f$ na $E$. Njeno definicijsko območje je $E$, predpis pa je isti kot pri funkciji $f$, se pravi $f|_E(x) = f(x)$ za vsak $x \in E$.

**Primer.** Funkciji

$$f\colon x \mapsto x^2, \quad x \in (-\infty, 0], \quad \text{in} \quad g\colon x \mapsto x^2, \quad x \in [0, \infty),$$

sta skrčitvi funkcije

$$h\colon x \mapsto x^2, \quad x \in \mathbb{R},$$

na $(-\infty, 0]$ oziroma $[0, \infty)$, se pravi

$$f = h|_{(-\infty,0]}, \quad g = h|_{[0,\infty)}.$$

**Graf** funkcije $f$ je množica

$$\Gamma(f) = \{(x, y)\colon\ x \in D(f),\ y = f(x)\}$$

v $\mathbb{R}^2$. Definicijsko območje $D(f)$ je ravno projekcija grafa $\Gamma(f)$ na os $x$. Projekciji $\Gamma(f)$ na os $y$ pravimo **zaloga vrednosti** funkcije $f$ in jo označimo z $Z(f)$. Velja

$$Z(f) = \{y \in \mathbb{R}\colon\ \exists x \in D(f)\colon y = f(x)\}.$$

**Primer.** Zaloga vrednosti funkcije $x \mapsto x^2, x \in [-1, 1]$, je $[0, 1]$. Zaloga vrednosti funkcije $x \mapsto x^2, x \in \mathbb{R}$, je $[0, \infty)$.

Oglejmo si sedaj, kako iz grafa funkcije $f$ dobimo graf skrčitve $f|_E$. Projekcija $\Gamma(f|_E)$ na os $x$ je ravno $D(f|_E) = E$. Ker se predpisa za $f$ in $f|_E$ ujemata na $E$, se grafa $\Gamma(f)$ in $\Gamma(f|_E)$ ujemata na pasu $E \times \mathbb{R}$. Torej je

$$\Gamma(f|_E) = \Gamma(f) \cap (E \times \mathbb{R}).$$

Posebej je $\Gamma(f|_E) \subseteq \Gamma(f)$ in zato tudi $Z(f|_E) \subseteq Z(f)$.

Za poljubni funkciji $f$ in $g$ definiramo njun **kompozitum** $g \circ f$ z

$$g \circ f\colon x \mapsto g(f(x)), \quad D(g \circ f) = \{x \in D(f)\colon\ f(x) \in D(g)\}.$$

Pri komponiranju funkcij moramo paziti na vrstni red. Kompozituma $g \circ f$ in $f \circ g$ namreč nista nujno enaka, kot pokaže naslednji primer.

**Primer.** Vzemimo funkciji

$$f\colon x \mapsto x^2, \quad D(f) = \mathbb{R},$$

in

$$g\colon x \mapsto 1 + x, \quad D(g) = \mathbb{R}.$$

Potem je

$$g \circ f\colon x \mapsto 1 + x^2, \quad D(g \circ f) = \mathbb{R},$$

in

$$f \circ g\colon x \mapsto (1 + x)^2, \quad D(f \circ g) = \mathbb{R}.$$

Predpisa za $g \circ f$ in $f \circ g$ se ne ujemata, saj prvi preslika 1 v 2, drugi pa v 4. Torej je $g \circ f \neq f \circ g$.

Funkciji

$$\mathrm{id}\colon x \mapsto x, \quad D(\mathrm{id}) = \mathbb{R},$$

pravimo **identična funkcija**. Pomembna je zato, ker velja

$$f \circ \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ f = f$$

za vsako funkcijo $f$.

## 2.2. Inverzna funkcija

Funkcija $f$ je **injektivna**, če za poljubni števili $x, y \in D(f)$, ki zadoščata $x \neq y$, velja $f(x) \neq f(y)$. Kadar je funkcija $f$ injektivna, obstaja za vsako število $x \in Z(f)$ natanko eno število $x' \in D(f)$, ki zadošča $f(x') = x$. Torej lahko definiramo funkcijo

$$f^{-1}\colon x \mapsto x', \quad D(f^{-1}) = Z(f),$$

ki ji pravimo **inverzna funkcija** funkcije $f$. Kadar $f$ ni injektivna, nima inverzne funkcije. Za vsak $x \in D(f)$ velja $f^{-1}(f(x)) = x$ in za vsak $x \in Z(f)$ velja $f(f^{-1}(x)) = x$, torej je

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}\,|_{D(f)} \quad \text{in} \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}\,|_{Z(f)}.$$

Kako za dano funkcijo $f$ ugotovimo ali je injektivna?

**Računska metoda:** Kadar ima za nek $y$ enačba $y = f(x)$ vsaj dve različni rešitvi v $D(f)$, tedaj funkcija $f$ *ni* injektivna, in zato nima inverzne funkcije. Kadar pa ima za vsak $y$ enačba $y = f(x)$ kvečjemu eno rešitev v $D(f)$, potem $f$ *je* injektivna in njeno inverzno funkcijo dobimo tako, da iz enačbe $y = f(x)$ izrazimo $x$ kot funkcijo $y$, nato pa zamenjamo $x$ in $y$.

**Grafična metoda:** Kadar neka vodoravna premica seka graf $\Gamma(f)$ v vsaj dveh različnih točkah, funkcija $f$ *ni* injektivna. V tem primeru $f^{-1}$ ne obstaja. Kadar pa vsaka vodoravna premica seka graf $\Gamma(f)$ v kvečjemu eni točki, funkcija $f$ *je* injektivna. V tem primeru graf $\Gamma(f^{-1})$ dobimo tako, da graf $\Gamma(f)$ prezrcalimo preko premice $y = x$.

**Primer.** Pokažimo, da je funkcija

$$f\colon x \mapsto \frac{1}{x-1}, \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\},$$

injektivna in določimo njeno inverzno funkcijo.

Enačba $f(x) = 0$ ni rešljiva. Po drugi strani je za vsak neničeln $y$ enačba $f(x) = y$ rešljiva in njena edina rešitev je $x = 1 + \frac{1}{y}$. Torej je funkcija $f$ res injektivna in njena inverzna funkcija je

$$f^{-1}\colon x \mapsto 1 + \frac{1}{x}, \quad D(f^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

**Primer.** Funkcija

$$x \mapsto |x|, \quad x \in \mathbb{R},$$

ni injektivna, saj premica $y = 1$ seka njen graf v dveh različnih točkah. Torej nima inverzne funkcije.

Zelo pomemben primer injektivnih funkcij so strogo monotone funkcije. Pravimo, da je funkcija **strogo monotona**, kadar je bodisi strogo naraščajoča bodisi strogo padajoča. Funkcija $f$ je

- **strogo naraščajoča**, kadar za poljubni števili $x, y \in D(f)$, ki zadoščata $x < y$, velja $f(x) < f(y)$;
- **strogo padajoča**, kadar za poljubni števili $x, y \in D(f)$, ki zadoščata $x < y$, velja $f(x) > f(y)$.

Dokaz: Pokažimo, da je vsaka strogo monotona funkcija res injektivna. Vzemimo poljubno strogo monotono funkcijo $g$ in poljubni različni števili $u$ in $v$ iz $D(g)$. Potem velja bodisi $u < v$ bodisi $v < u$. Če je $g$ strogo naraščajoča, potem v prvem primeru dobimo $g(u) < g(v)$, v drugem pa $g(v) < g(u)$. Če je $g$ strogo padajoča, potem v prvem primeru dobimo $g(u) > g(v)$, v drugem pa $g(v) > g(u)$. V vseh štirih primerih torej velja $g(u) \neq g(v)$. S tem smo pokazali, da je funkcija $g$ res injektivna. □

**Primer.** Funkcija $f\colon x \mapsto 1/x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, je injektivna, ni pa strogo monotona. Injektivna je zato, ker vsaka vodoravna premica seka njen graf v kvečjemu eni točki. Strogo monotona ni zato, ker ni niti strogo naraščajoča (saj je na primer $f(1) > f(2)$) niti strogo padajoča (ker velja $f(-1) < f(1)$).

Kadar funkcija $f$ ni injektivna, lahko včasih njeno definicijsko območje razrežemo na take kose $I_1, \ldots, I_k$, da so skrčitve $f|_{I_1}, \ldots, f|_{I_k}$

injektivne funkcije. Tem skrčitvam pravimo **veje** funkcije $f$. Za posamezne veje lahko izračunamo njihove inverzne funkcije, za celo funkcijo pa ne. Ponavadi eni od vej pravimo **glavna veja**, stvar dogovora je kateri.

**Primer.** Funkcija $f\colon x \mapsto x^2$, $x \in \mathbb{R}$, ni injektivna, saj različna elementa $-1$ in $1$ preslika v isti element. Zato $f$ nima inverzne funkcije. Razrežimo njeno definicijsko območje $D(f) = \mathbb{R}$ na dva poltraka $I_1 = (-\infty, 0]$ in $I_2 = [0, \infty)$. Veji $f|_{I_1}$ in $f|_{I_2}$ sta injektivni funkciji. Glavna veja je $f|_{I_2}$, njenemu inverzu pa **kvadratni koren**. Velja

$$\bigl(f|_{I_1}\bigr)^{-1}\colon x \mapsto -\sqrt{x}, \quad D(\bigl(f|_{I_1}\bigr)^{-1}) = [0, \infty),$$

$$\bigl(f|_{I_2}\bigr)^{-1}\colon x \mapsto \sqrt{x}, \quad D(\bigl(f|_{I_2}\bigr)^{-1}) = [0, \infty).$$

Podobno lahko storimo pri vsaki **sodi potenci**

$$x \mapsto x^{2k}, \quad x \in \mathbb{R},$$

kjer je $k \in \mathbb{N}$. Skrčitev na $[0, \infty)$ je glavna veja, njena inverzna funkcija

$$x \mapsto \sqrt[2k]{x}, \quad x \in [0, \infty),$$

pa je $2k$-ti koren. Po drugi strani je vsaka **liha potenca**,

$$x \mapsto x^{2k-1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

injektivna funkcija. Njenemu inverzu,

$$x \mapsto \sqrt[2k-1]{x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

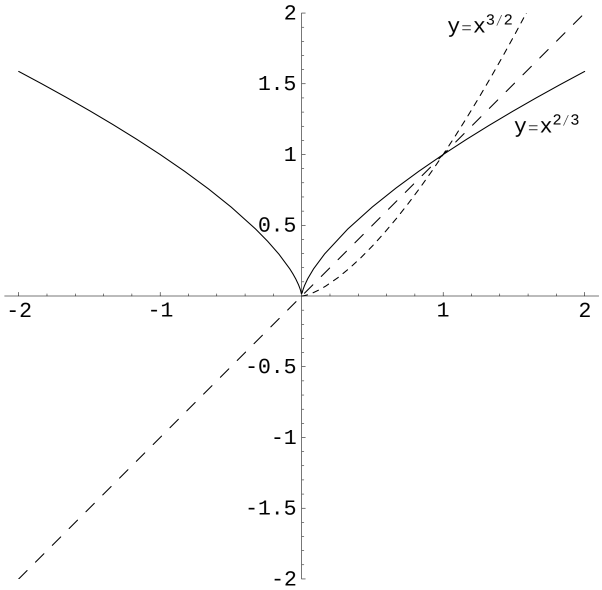
pravimo $(2k-1)$-ti koren. Za razliko od $2k$-tega korena je $(2k-1)$-ti koren definiran povsod. Gornji razmislek lahko ponovimo tudi pri negativnih potencah, samo ničlo moramo odstraniti iz definicijskih območij sodih in lihih korenov.

Potence lahko razširimo tudi na racionalne eksponente z $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$. V primeru $\frac{m}{n} \geq 0$ ločimo tri možnosti.

- Če sta $m$ in $n$ lihi, potem je definicijsko območje funkcije $x \mapsto x^{m/n}$ enako $\mathbb{R}$. Funkcija je injektivna in njena inverzna funkcija je $x \mapsto x^{n/m}$.
- Če je $m$ sodo in $n$ liho, potem je definicijsko območje funkcije $x \mapsto x^{m/n}$ enako $\mathbb{R}$. Funkcija ni injektivna. Njena glavna veja je njena skrčitev na $[0, \infty)$.
- Če je $m$ liho in $n$ sodo, potem je definicijsko območje funkcije $x \mapsto x^{m/n}$ enako $[0, \infty)$. Funkcija je injektivna in njena inverzna funkcija je glavna veja funkcije $x \mapsto x^{n/m}$.

Podobno je v primeru $\frac{m}{n} < 0$, samo ničle moramo odstraniti iz definicijskih območij.

**Primer.** Narišimo funkciji $y = x^{2/3}$ (polna črta) in $y = x^{3/2}$ (pikčasto). Premica $y = x$ je narisana črtkano.




## 2.3. Eksponentna funkcija in logaritem

Izkaže se, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ obstaja limita

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Funkciji $x \mapsto \exp(x)$ pravimo **eksponentna funkcija**. Brez dokaza naštejmo nekaj njenih osnovnih lastnosti.

- $D(\exp) = \mathbb{R}$,
- $Z(\exp) = (0, \infty)$,
- funkcija exp je strogo naraščajoča,
- $\exp(0) = 1$,
- število $e := \exp(1)$ je približno enako 2.7,
- $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$ za vse $x \in \mathbb{R}$ in $y \in \mathbb{R}$,
- $\exp(\frac{m}{n} x) = \exp(x)^{\frac{m}{n}}$ za vse $x \in \mathbb{R}$ in $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

Ker je funkcija exp strogo naraščajoča, je injektivna. Njeni inverzni funkciji pravimo **naravni logaritem** in jo označimo z ln. Naštejmo nekaj osnovnih lastnosti naravnega logaritma, ki sledijo iz ustreznih lastnosti eksponentne funkcije.

- $D(\ln) = (0, \infty)$,
- $Z(\ln) = \mathbb{R}$,

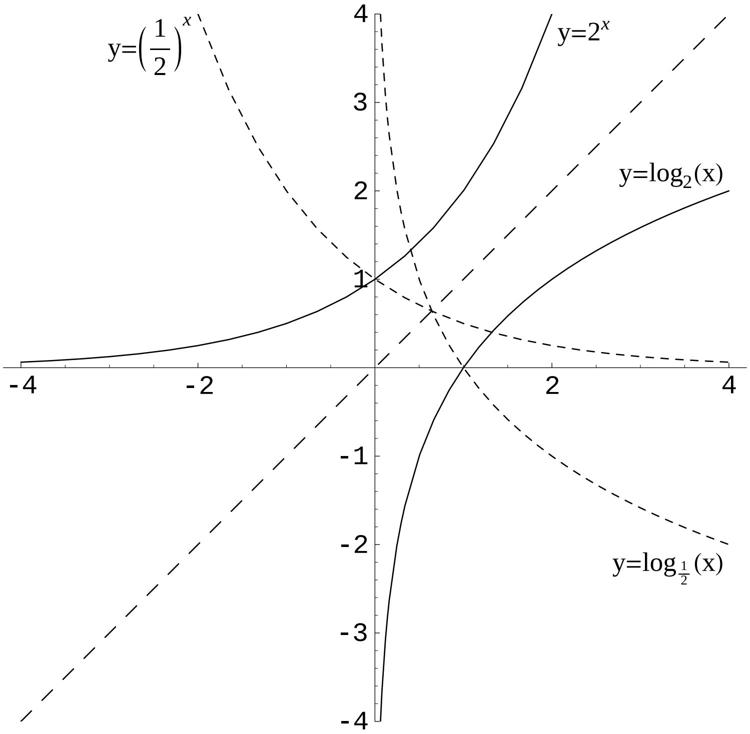
- funkcija ln je strogo naraščajoča,
- $\ln(1) = 0$,
- $\ln(e) = 1$,
- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ za vse $x \in (0, \infty)$ in $y \in (0, \infty)$,
- $\ln(x^{\frac{m}{n}}) = \frac{m}{n} \ln x$ za vse $x \in (0, \infty)$ in $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

Za vsak $a > 0$ lahko definiramo funkcijo

$$x \mapsto a^x := \exp(x \ln a), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ta funkcija je strogo naraščajoča, če je $a > 1$, strogo padajoča če je $0 < a < 1$ in konstantna, če je $a = 1$. V prvih dveh primerih je funkcija injektivna in njena inverzna funkcija je $x \mapsto \log_a(x) := \ln(x)/\ln(a)$, $x \in (0, \infty)$. V tretjem primeru seveda ni injektivna.

**Primer.** Narišimo funkciji $y = 2^x$ in $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ter njuni inverzni funkciji $y = \log_2(x)$ in $y = \log_{\frac{1}{2}}(x)$.




## 2.4. Dokaz osnovnih lastnosti eksponentne funkcije

Namen tega razdelka je dokazati šest od sedmih lastnosti eksponentne funkcije, ki smo jih omenili v prejšnjem razdelku. Lastnost $Z(\exp) = (0, \infty)$ bomo znali dokazati šele v naslednjem poglavju. Ta razdelek je namenjen samo najbolj zahtevnim bralcem.

**Trditev. Za vsak $x \geq 0$ je zaporedje $a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ naraščajoče in navzgor omejeno. Torej $\exp(x) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ obstaja za vsak $x \geq 0$.**

Dokaz: Če v Newtonovo binomsko formulo

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

vstavimo $a = 1$ in $b = \frac{x}{n}$ in upoštevamo, da je za vsak $k$ velja

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!},$$

dobimo

$$a_n = 1+\frac{n}{1!}\frac{x}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{x^2}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{x^3}{n^3}+\ldots+\frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}\frac{x^n}{n^n} =$$

$$= 1+x+\frac{1}{2!}\big(1-\frac{1}{n}\big)x^2+\frac{1}{3!}\big(1-\frac{1}{n}\big)\big(1-\frac{2}{n}\big)x^3+\ldots+\frac{1}{n!}\big(1-\frac{1}{n}\big)\big(1-\frac{2}{n}\big)\cdots\big(1-\frac{n-1}{n}\big)x^n.$$

Odtod sledi, da je

$$a_n \leq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Naj bo $m$ najmanjše naravno število, ki je večje ali enako $x$. Za vsak $n \geq m$ velja

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{x^m}{m!}\cdot\frac{x}{m+1}\cdot\frac{x}{m+2}\cdot\ldots\cdot\frac{x}{n} \leq \frac{x^m}{m!}\cdot\big(\frac{m}{m+1}\big)^{n-m}.$$

Odtod sledi, da je

$$a_n \leq 1 + x + \ldots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{x^m}{m!}\Big(1 + \frac{m}{m+1} + \ldots + \big(\frac{m}{m+1}\big)^{n-m}\Big)$$

Ker za $q = \frac{m}{m+1}$ velja $1+q+\ldots+q^{n-m} = \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} \leq \frac{1}{1-q} = m+1$, dobimo

$$a_n \leq 1 + x + \ldots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{x^m}{m!}(m+1).$$

Torej je zaporedje $a_n$ res navzgor omejeno. Pokažimo še, da velja $a_n \leq a_{n+1}$ za vsak $n$. Odštejmo formuli

$$a_{n+1} = 1 + x + \frac{1}{2!}\big(1-\frac{1}{n+1}\big)x^2 + \frac{1}{3!}\big(1-\frac{1}{n+1}\big)\big(1-\frac{2}{n+1}\big)x^3 + \ldots +$$

$$+\frac{1}{n!}\big(1-\frac{1}{n+1}\big)\cdots\big(1-\frac{n-1}{n+1}\big)x^n + \frac{1}{(n+1)!}\big(1-\frac{1}{n+1}\big)\cdots\big(1-\frac{n}{n+1}\big)x^{n+1}$$

in

$$a_n = 1+x+\frac{1}{2!}\big(1-\frac{1}{n}\big)x^2+\frac{1}{3!}\big(1-\frac{1}{n}\big)\big(1-\frac{2}{n}\big)x^3+\ldots+\frac{1}{n!}\big(1-\frac{1}{n}\big)\cdots\big(1-\frac{n-1}{n}\big)x^n.$$

Dobimo

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2!}\big[\big(1 - \frac{1}{n+1}\big) - \big(1 - \frac{1}{n}\big)\big]x^2 +$$
$$+\frac{1}{3!}\big[\big(1 - \frac{1}{n+1}\big)\big(1 - \frac{2}{n+1}\big) - \big(1 - \frac{1}{n}\big)\big(1 - \frac{2}{n}\big)\big]x^3 + \ldots +$$
$$+\frac{1}{n!}\big[\big(1 - \frac{1}{n+1}\big)\cdots\big(1 - \frac{n-1}{n+1}\big) - \big(1 - \frac{1}{n}\big)\cdots\big(1 - \frac{n-1}{n}\big)\big]x^n +$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\big[\big(1 - \frac{1}{n+1}\big)\cdots\big(1 - \frac{n}{n+1}\big)\big]x^{n+1}.$$

Če upoštevamo, da za vsak $k = 1, \ldots, n-1$ velja $1 - \frac{k}{n+1} > 1 - \frac{k}{n} > 0$, vidimo, da so vsi oglati oklepaji pozitivni. Torej je res $a_{n+1} - a_n \geq 0$ za vsak $n$. $\square$

**Trditev. Velja $\exp(0) = 1$ in $e = \exp(1) \in [2.71, 2.72]$.**

Dokaz: Za $x = 0$ je zaporedje $a_n = \big(1 + \frac{x}{n}\big)^n$ konstantno enako 1, zato velja

$$\exp(0) = \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Iz prejšnje trditve in njenega dokaza sledi, da za vsak $x \geq 0$ in vse $m, n \in \mathbb{N}$ velja

$$\big(1 + \frac{x}{n}\big)^n \leq \exp(x) \leq 1 + x + \ldots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{x^m}{m!}(m+1).$$

Ko vstavimo $x = 1$, $n = 164$ in $m = 7$, dobimo na levi več kot 2.71, na desni pa manj kot 2.72. Zato je $2.71 < \exp(1) < 2.72$. $\square$

**Pomožna trditev. Vzemimo poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ ter definirajmo $a_n = \big(1 + \frac{x}{n}\big)^n$, $b_n = \big(1 + \frac{y}{n}\big)^n$ in $c_n = \big(1 + \frac{x+y}{n}\big)^n$. Trdimo, da je $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n - c_n) = 0$.**

Dokaz: Pišimo $u_n = (1 + \frac{x}{n})(1 + \frac{y}{n})$ in $v_n = 1 + \frac{x+y}{n}$ in $w_n = (1 + \frac{|x|}{n})(1 + \frac{|y|}{n})$. Ker je $|u_n| \leq w_n$ in $|v_n| \leq w_n$ za vsak $n$, velja

$$|a_n b_n - c_n| = |u_n^n - v_n^n| = |u_n - v_n||u_n^{n-1} + u_n^{n-2}v_n + \ldots + u_n v_n^{n-2} + v_n^{n-1}| \leq$$
$$\leq |u_n - v_n|(|u_n|^{n-1} + |u_n|^{n-2}|v_n| + \ldots + |u_n||v_n|^{n-2} + |v_n|^{n-1}) \leq$$
$$\leq |u_n - v_n|\, n w_n^{n-1} = \frac{|xy|}{n^2}\, n w_n^{n-1} = \frac{|xy|}{n w_n}\, w_n^n \leq \frac{|xy|}{n}\, e^{|x|}\, e^{|y|}.$$

Ker zaporedje na skrajni desni limitira proti nič, limitira tudi zaporedje $|a_n b_n - c_n|$ proti nič. Odtod sledi, da je $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n - c_n) = 0$. $\square$

**Posledica. $\exp(x)$ obstaja tudi za vsak $x < 0$. Za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$. Za vse $x, y \in \mathbb{R}$ velja $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.**

Dokaz: Če uporabimo pomožno trditev z $x > 0$ in $y = -x$, dobimo, da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 1$. Vemo že, da $\exp(x) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ obstaja. Odtod sledi, da obstaja tudi

$$\exp(-x) = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n^{-1} \cdot \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \exp(x)^{-1}.$$

Odtod takoj sledita prva in druga trditev v posledici. Tretja trditev v posledici sledi iz pomožne trditve. Sedaj namreč vemo, da limiti $\exp(x) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ in $\exp(y) = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ obstajata za vse $x, y \in \mathbb{R}$. □

**Trditev. Funkcija exp je strogo pozitivna in strogo naraščajoča.**

Dokaz: Če $a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ razvijemo po binomski formuli kot v prvem koraku, dobimo, da je $a_n \geq 1 + x$ za vsak $x \geq 0$. Torej je $\exp(x) = \lim a_n \geq 1 + x$ za vsak $x \geq 0$. Odtod sledi, da je $\exp(x) > 1$ za vsak $x > 0$. Sedaj iz formule $\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$ sledi, da je $0 < \exp(x) < 1$ za vsak $x < 0$. S tem smo dokazali, da je funkcija exp res strogo pozitivna. Če je $y > x$, potem je $y - x > 0$. Po pravkar dokazanem odtod sledi, da je $\exp(y - x) > 1$. Če obe strani pomnožimo z $\exp(x)$ in upoštevamo, da je $\exp(y-x)\exp(x) = \exp(y-x+x) = \exp(y)$, dobimo, da je $\exp(y) > \exp(x)$. S tem smo dokazali, da je funkcija exp res strogo naraščajoča. □

**Trditev. Za vsako racionalno število $\frac{m}{n}$ velja**

$$\exp\left(\frac{m}{n}\right) = e^{\frac{m}{n}}.$$

Dokaz: Iz formule $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ sledi, da za vsako naravno število $n$ velja $\exp(nx) = \exp(x)^n$. Ko vstavimo $x = \frac{1}{n}$, dobimo $e = \exp(\frac{1}{n})^n$. Ker je $\exp(\frac{1}{n}) > 0$, odtod sledi, da je $\exp(\frac{1}{n}) = e^{\frac{1}{n}}$ Odtod sledi, da za poljubni naravni števili $m$ in $n$ velja $\exp(\frac{m}{n}) = \exp(\frac{1}{n})^m = \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^m = e^{\frac{m}{n}}$. Iz formule $\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$ sledi, gornja formula velja tudi za negativna racionalna števila. □

## 2.5. Hiperbolične in inverzne hiperbolične funkcije

Funkciji

$$\mathrm{ch}\colon x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

pravimo **hiperbolični kosinus**, funkciji

$$\mathrm{sh}\colon x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

pa **hiperbolični sinus**. Pogosto namesto $\mathrm{ch}(x)$ pišemo kar $\mathrm{ch}\, x$, namesto $\mathrm{sh}(x)$ pa $\mathrm{sh}\, x$. Za vsak $x$ velja

$$(\mathrm{ch}\, x)^2 - (\mathrm{sh}\, x)^2 = 1,$$

zato točka $(u, v) = (\mathrm{ch}\, x, \mathrm{sh}\, x)$ vedno leži na hiperboli $u^2 - v^2 = 1$. Odtod so hiperbolične funkcije dobile ime. Ker za vsak $x$ velja

$$\mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}\, x \quad \text{in} \quad \mathrm{sh}(-x) = -\,\mathrm{sh}\, x,$$

je graf $\Gamma(\mathrm{ch})$ simetričen glede na os $y$, graf $\Gamma(\mathrm{sh})$ pa je simetričen glede na izhodišče. Za poljubni števili $x, y \in \mathbb{R}$ velja

$$\mathrm{ch}(x + y) = \mathrm{ch}\, x\, \mathrm{ch}\, y + \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{sh}\, y,$$

$$\mathrm{sh}(x + y) = \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, y + \mathrm{ch}\, x\, \mathrm{sh}\, y.$$

Pokažimo, da je funkcija sh injektivna in izračunajmo njen inverz. Iz $y = \mathrm{sh}\, x$ sledi po množenju z $2e^x$, da velja $2ye^x = (e^x)^2 - 1$. To je kvadratna enačba za $e^x$ in njeni rešitvi sta

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

Ker je $e^x$ za vsak $x$ pozitivno število, je možna le rešitev $y + \sqrt{y^2 + 1}$, saj je $y - \sqrt{y^2 + 1}$ negativno število. Iz $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$ po logaritmiranju dobimo

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}),$$

kar je torej pri danem $y \in \mathbb{R}$ edina rešitev enačbe $2ye^x = (e^x)^2 - 1$. Pokazali smo, da je funkcija sh injektivna in da je njena zaloga vrednosti $Z(\mathrm{sh}) = \mathbb{R}$. Njena inverzna funkcija je

$$\mathrm{arsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad D(\mathrm{arsh}) = \mathbb{R}.$$

Funkcija ch ni injektivna, saj se števili $x$ in $-x$ vedno preslikata v isto število. Pokazali bomo, da je skrčitev $\mathrm{ch}\,|_{[0,\infty)}$ injektivna in izračunali njen inverz. Ker je

$$\mathrm{ch}\, x - 1 = 2\big(\mathrm{sh}\, \frac{x}{2}\big)^2 \geq 0,$$

ima enačba $y = \operatorname{ch} x$ rešitev le, če je $y \geq 1$. Tedaj iz $y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ dobimo rešitvi

$$x_1 = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

in

$$x_2 = \ln(y - \sqrt{y^2 - 1}) = -\ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) = -x_1.$$

Prva rešitev je vedno nenegativna. Skrčitev $\operatorname{ch}|_{[0,\infty)}$ je zato injektivna in njena zaloga vrednosti je $[1, \infty)$. Njena inverzna funkcija je

$$\operatorname{arch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad D(\operatorname{arch}) = [1, \infty).$$

Omenimo, da je tudi funkcija $\operatorname{ch}|_{(-\infty,0]}$ injektivna. Njena inverzna funkcija je $x \mapsto -\operatorname{arch}(x)$ pri čemer je $x \in [1, \infty)$.

Funkcija **hiperbolični tangens** je definirana z

$$\operatorname{th} x = \operatorname{sh} x / \operatorname{ch} x, \quad D(\operatorname{th}) = \mathbb{R},$$

funkcija **hiperbolični kotangens** pa z

$$\operatorname{cth} x = \operatorname{ch} x / \operatorname{sh} x, \quad D(\operatorname{cth}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Pokazati se da, da sta obe injektivni. Njuni inverzni funkciji sta

$$\operatorname{arth}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad D(\operatorname{arth}) = (-1, 1),$$

$$\operatorname{arcth}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, \quad D(\operatorname{arcth}) = \mathbb{R} \setminus [-1, 1].$$

## 2.6. Kotne in krožne funkcije

Naj bo $x$ poljubno realno število z intervala $[0, \frac{\pi}{2}]$. Narišimo pravokotni trikotnik $\triangle ABC$ s pravim kotom pri oglišču $C$ in kotom $x$ pri oglišču $B$. (Spomnimo, da kote merimo z radiani. Kotu enega radiana ustreza na enotski krožnici lok dolžine 1, tako da meri polni kot $2\pi$ radianov. S pomočjo enakosti $2\pi$ rad $= 360°$ lahko radiane hitro spremenimo v stopinje in obratno.) Vsi taki trikotniki so si podobni, zato so razmerja med njihovimi stranicami konstantna. Označimo dolžine stranic $AB$, $BC$ in $CA$ zaporedoma s $c$, $a$ in $b$. Definirajmo

$$\cos x = \frac{a}{c} \quad \text{in} \quad \sin x = \frac{b}{c}.$$

Kadar je $x = 0$, točki $A$ in $C$ sovpadeta, zato je $b = 0$ in $a = c$. Kadar je $x = \frac{\pi}{2}$, sovpadeta točki $B$ in $C$, tako da je $a = 0$ in $b = c$. Torej velja

$$\cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{in} \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

Razširimo sedaj definiciji kosinusa in sinusa z $[0, \frac{\pi}{2}]$ na $[0, \pi]$ tako, da za vsak $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ postavimo

$$\cos x = -\cos(\pi - x) \quad \text{in} \quad \sin x = \sin(\pi - x).$$

V naslednjem koraku razširimo definiciji z intervala $[0, \pi]$ na interval $[-\pi, \pi]$. Pri tem za vsak $x \in [-\pi, 0)$ definiramo

$$\cos x = \cos(-x) \quad \text{in} \quad \sin x = -\sin(-x).$$

Na koncu razširimo definiciji kosinusa in sinusa na ves $\mathbb{R}$. Za poljubno število $x \in \mathbb{R}$ poiščemo takšno celo število k, da je $x - 2k\pi \in [-\pi, \pi]$ in definiramo

$$\cos x = \cos(x - 2k\pi) \quad \text{in} \quad \sin x = \sin(x - 2k\pi).$$

Da se pokazati, da za poljubni števili $x, y \in \mathbb{R}$ veljata **adicijski formuli**

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Odtod takoj sledi, da veljajo **antifaktorizacijske formule**:

$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2 \cos x \cos y,$$

$$\cos(x + y) - \cos(x - y) = -2 \sin x \sin y,$$

$$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin x \cos y,$$

$$\sin(x + y) - \sin(x - y) = 2 \cos x \sin y.$$

S zamenjavo $x = \frac{u+v}{2}$ in $y = \frac{u-v}{2}$ dobimo **faktorizacijske formule**

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \tfrac{u+v}{2} \cos \tfrac{u-v}{2}, \quad \cos u - \cos v = -2 \sin \tfrac{u+v}{2} \sin \tfrac{u-v}{2},$$

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \tfrac{u+v}{2} \cos \tfrac{u-v}{2} \quad \text{in} \quad \sin u - \sin v = 2 \cos \tfrac{u+v}{2} \sin \tfrac{u-v}{2}.$$

Funkciji $x \mapsto \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, in $x \mapsto \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, nista injektivni. Vsaka vodoravna premica med $y = -1$ in $y = 1$ namreč seka njuna grafa v neskončno mnogo točkah. Lahko pa funkciji razrežemo na veje. Skrčitvi

$$\cos|_{[0,\pi]} \quad \text{in} \quad \sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}.$$

sta injektivni in pri obeh je zaloga vrednosti množica $[-1, 1]$. Prvi skrčitvi pravimo **glavna veja kosinusa**, njeni inverzni funkciji pa arccos (**arkus kosinus**). Drugi skrčitvi pravimo **glavna veja sinusa**, njeni inverzni funkciji pa arcsin (**arkus sinus**). Velja

$$D(\arccos) = [-1, 1], \quad Z(\arccos) = [0, \pi],$$

$$D(\arcsin) = [-1, 1], \quad Z(\arcsin) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Iz formule $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin\frac{\pi}{2}\cos x - \cos\frac{\pi}{2}\sin x = \cos x$ sledi, da za poljuben $x \in [-1, 1]$ velja

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

Funkciji **tangens** in **kotangens** sta definirani z

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad D(\operatorname{tg}) = \mathbb{R} \setminus \{(m + \frac{1}{2})\pi\colon\ m \in \mathbb{Z}\},$$
$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad D(\operatorname{ctg}) = \mathbb{R} \setminus \{m\pi\colon\ m \in \mathbb{Z}\}.$$

Ti funkciji nista injektivni. Njuni glavni veji sta $\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$ in $\operatorname{ctg}|_{(0,\pi)}$. Pri obeh je zaloga vrednosti enaka $\mathbb{R}$. Njunima inverznima funkcijama

$$\operatorname{arctg} = \big(\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}\big)^{-1} \quad \text{in} \quad \operatorname{arcctg} = \big(\operatorname{ctg}|_{(0,\pi)}\big)^{-1}$$

pravimo **arkus tangens** oziroma **arkus kotangens**. Velja $D(\operatorname{arctg}) = \mathbb{R}$ in $Z(\operatorname{arctg}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ter $D(\operatorname{arcctg}) = \mathbb{R}$ in $Z(\operatorname{arcctg}) = (0, \pi)$. Iz formule $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$ sledi, da je $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x) = \operatorname{ctg}(x)$, zato za vse $x \in \mathbb{R}$ velja

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

## 2.7. Operacije s funkcijami

Za poljubni dve funkciji $f$ in $g$ definiramo njuno vsoto $f + g$ z

$$f + g\colon x \mapsto f(x) + g(x), \quad D(f + g) = D(f) \cap D(g).$$

Razliko $f - g$ definiramo z

$$f - g\colon x \mapsto f(x) - g(x), \quad D(f - g) = D(f) \cap D(g),$$

produkt $fg$ z

$$fg\colon x \mapsto f(x)g(x), \quad D(fg) = D(f) \cap D(g),$$

in količnik $f/g$ z

$$f/g\colon x \mapsto f(x)/g(x), \quad D(f/g) = D(f) \cap D(g) \cap \{x \in \mathbb{R}\colon\ g(x) \neq 0\}.$$

**Primer.** Produkt funkcije $f\colon x \mapsto \frac{x}{x+1}$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, in funkcije $g\colon x \mapsto \frac{1}{x}$, $D(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, je funkcija $fg\colon x \mapsto \frac{x}{(x+1)x}$, $D(fg) = \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$. Funkcija $fg$ je enaka funkciji $x \mapsto \frac{1}{x+1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, ni pa enaka funkciji $x \mapsto \frac{1}{x+1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

**Primer.** Naj bo $c$ neko realno število. Funkciji $x \mapsto c$, $x \in \mathbb{R}$, pravimo kontantna funkcija $c$. Konstantni funkciji 0 pravimo tudi **ničelna**

**funkcija**, konstantni funkciji 1 pa **enična funkcija**. Za poljubno funkcijo $f$ velja $f + 0 = 0 + f = f$ in $f0 = 0f = 0$ in $1f = f1 = f$.

Pravimo, da je funkcija $f$ **polinomska funkcija**, če obstaja tako naravno število $n$ in taka realna števila $c_0, c_1, \ldots, c_n$, da velja

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n, \quad D(f) = \mathbb{R}.$$

Običajno polinomskim funkcijam pravimo kar polinomi.

**Primer.** Funkcija

$$x \mapsto 2x^2 + 3x + 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

je polinom.

Krajši premislek pokaže, da so za poljubna polinoma $f$ in $g$ tudi funkcije $f + g$, $f - g$, $fg$ in $f \circ g$ polinomi.

**Racionalne funkcije** so količniki dveh polinomov. V posebnem je vsak polinom racionalna funkcija.

**Primer.** Funkcija

$$h(x) = \frac{3x+1}{4x^2-1}, \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\},$$

je racionalna funkcija.

Hitro vidimo, da so za poljubni racionalni funkciji $h$ in $k$ tudi funkcije $h + k$, $h - k$, $hk$, $h/k$ in $h \circ k$ racionalne funkcije.

Funkcijam, ki jih dobimo iz

- konstantnih funkcij,
- potenc (z racionalnimi eksponenti),
- eksponentne funkcije in naravnega logaritma ter
- funkcij sinus in arkus sinus

z (lahko večkratno) uporabo seštevanja, odštevanja, množenja, deljenja in komponiranja, pravimo **elementarne funkcije**.

**Primer.** Vse racionalne funkcije so elementarne, saj jih dobimo iz identične funkcije, to je potence $x \mapsto x^1$, in konstantnih funkcij s pomočjo elementarnih računskih operacij. V posebnem so elementarne tudi vse polinomske funkcije, med drugim tudi vsaka linearna ali kvadratna funkcija.

**Primer.** Ker je funkcija sin elementarna in ker je $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ in $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, sta tudi funkciji cos in tg elementarni. Ker je funkcija arcsin elementarna in ker je $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, $\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ in $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$, so elementarne tudi funkcije arccos, arctg in arcctg.

**Primer.** Funkcije $\operatorname{sh}, \operatorname{ch}, \operatorname{th}$ in cth so elementarne, saj so vse kompozitumi racionalne in eksponentne funkcije. Iz izražav funkcij arsh, arch, arth in arcth z naravnim logaritmom sledi, da so tudi te funkcije elementarne.

### 2.8. Vprašanja za ponavljanje

(1) (Definicija realne funkcije ene realne spremenljivke)
   (a) Definiraj pojem funkcije iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$!
   (b) Kaj je graf funkcije? Kdaj je dana krivulja graf neke funkcije?
   (c) Kaj je definicijsko območje funkcije? Kako ga določimo iz grafa?
   (d) Kaj je zaloga vrednosti funkcije? Kako jo določimo iz grafa?

(2) (Kompozitum funkcij) Naj bo $f(x) = \frac{1}{1-x}$.
   (a) Določi definicijsko območje funkcije $f$ in nariši njen graf!
   (b) Določi definicijsko območje funkcije $f \circ f$ in nariši njen graf!
   (c) Določi definicijsko območje funkcije $f \circ f \circ f$ in nariši njen graf!

(3) (Inverz funkcije)
   (a) Za kakšne funkcije $f$ obstaja inverz $f^{-1}$?
   (b) Kako je inverz funkcije definiran, se pravi, kaj je njegovo definicijsko območje, zaloga vrednosti in predpis?
   (c) Kako iz grafa funkcije $f$ ugotovimo, ali ima inverz? Kako iz grafa funkcije $f$ dobimo graf funkcije $f^{-1}$?
   (d) Poišči inverz funkcije $y = \arcsin \frac{1-x}{1+x}$!

(4) (Eksponentna funkcija in logaritem)
   (a) Nariši grafa funkcij $y = e^x$ in $y = \ln(x)$. Pri obeh določi definicijsko območje in zalogo vrednosti!
   (b) Nariši graf funkcije $y = 1 - e^{-x}$!
   (c) Nariši grafa funkcij $y = e^{\ln x}$ in $y = \ln(e^x)$. Pri obeh določi definicijsko območje in zalogo vrednosti!
   (d) Kaj je inverzna funkcija funkcije $y = a^x$? Izrazi jo z ln!

(5) (Hiperbolične funkcije)
   (a) Kako sta definirani funkciji $y = \operatorname{sh}(x)$ in $y = \operatorname{ch}(x)$?
   (b) Določi njuno definicijsko območje in zalogo vrednosti ter skiciraj njuna grafa!
   (c) Dokaži, da velja $(\operatorname{ch} x)^2 - (\operatorname{sh} x)^2 = 1$!
   (d) Izpelji adicijska izreka za $\operatorname{sh}(x)$ in $\operatorname{ch}(x)$!

(6) (Inverzne hiperbolične funkcije)

   (a) Kaj sta glavni veji funkcij $\mathrm{sh}(x)$ in $\mathrm{ch}(x)$? Kako sta definirani funkciji $\mathrm{arsh}(x)$ in $\mathrm{arch}(x)$?
   (b) Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcij $\mathrm{arsh}(x)$ in $\mathrm{arch}(x)$ ter skiciraj njuna grafa!
   (c) Izrazi funkciji $\mathrm{arsh}(x)$ in $\mathrm{arch}(x)$ z naravnim logaritmom!

(7) (Trigonometrične funkcije)
   (a) Izpelji adicijska izreka za $\sin(x)$ in $\cos(x)$!
   (b) Kako faktoriziramo vsoto $\sin(x) + \sin(y)$?
   (c) Kako antifaktoriziramo produkt $\sin(x)\cos(y)$?

(8) (Inverzne trigonometrične funkcije)
   (a) Kaj je glavna veja funkcije $\sin x$? Kako je definirana funkcija $\arcsin x$?
   (b) Poišči definicijski območji funkcij $\sin(\arcsin x)$ in $\arcsin(\sin x)$ ter nariši njuna grafa!
   (c) Dokaži, da velja $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ za vsak $x \in [-1, 1]$!

POGLAVJE 3

# Zveznost in limita

## 3.1. Zveznost funkcije v točki

Funkcija $f$ je **zvezna v točki** $a$ iz $D(f)$, kadar za vsako zaporedje $a_n$ v $D(f)$, ki limitira proti $a$, zaporedje $f(a_n)$ limitira proti $f(a)$. Grafično to pomeni, da se graf $\Gamma(f)$ "ne pretrga" v točki $(a, f(a))$, če se definicijsko območje $D(f)$ "ne pretrga" v točki $a$.

Zveznost funkcije v točki lahko preverimo tudi brez uporabe zaporedij. Velja namreč naslednja trditev.

**Trditev. Funkcija $f$ je zvezna v točki $a$ natanko tedaj, ko za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $x$ iz $D(f)$, ki zadošča $|x - a| < \delta$, velja $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.**

Dokaz: Recimo, da velja druga lastnost. Vzemimo poljubno zaporedje $a_n$ v $D(f)$, ki limitira proti $a$. Trdimo, da potem zaporedje $f(a_n)$ limitira proti $f(a)$. Vzemimo poljuben $\epsilon > 0$. Konstruirati moramo tak $n_0$, da iz $n \geq n_0$ sledi $|f(a_n) - f(a)| < \epsilon$. Najprej opazimo, da nam predpostavka zagotavlja obstoj takega števila $\delta > 0$, da iz $x \in D(f)$ in $|x - a| < \delta$ sledi $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Nato upoštevamo še, da zaporedje $a_n$ limitira proti $a$ in zato po definiciji limite obstaja tako naravno število $n_0$, da za vsak $n \geq n_0$ velja $|a_n - a| < \delta$. Če v predzadnji stavek vstavimo $x = a_n$ in upoštevamo zadnji stavek, vidimo, da konstruirani $n_0$ res zadošča želeni lastnosti.

Dokažimo še obrat. Recimo, da druga lastnost ne drži. Potem obstaja tak $\epsilon > 0$, da za vsak $\delta > 0$ obstaja tak $x(\delta) \in D(f)$, da je $|x(\delta) - a| < \delta$, vendar $|f(x(\delta)) - f(a)| \geq \epsilon$. Zaporedje $a_n = x(1/n)$ potem limitira proti $a$, zaporedje $f(a_n)$ pa ne limitira proti $f(a)$. Torej prva lastnost ne drži. □

Zveznost funkcije v točki se ohranja pri osnovnih računskih operacijah s funkcijami. Kaj ta stavek natančno pomeni, bomo razložili v naslednjih dveh trditvah.

**Trditev. Kadar sta funkciji $f$ in $g$ zvezni v točki $a$, so v tej točki zvezne tudi funkcije $f+g$, $f-g$ in $fg$. Če je $g(a) \neq 0$, je tudi funkcija $f/g$ zvezna v $a$.**

Dokaz: Vzemimo poljubno zaporedje $a_n$ v $D(f+g) = D(f) \cap D(g)$, ki limitira proti $a$. Ker sta funkciji $f$ in $g$ zvezni v $a$, je $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ in $\lim\limits_{n\to\infty} g(a_n) = g(a)$. Limita vsote dveh zaporedij je enaka vsoti limit, zato velja $\lim\limits_{n\to\infty}(f+g)(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\big(f(a_n)+g(a_n)\big) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) + \lim\limits_{n\to\infty} g(a_n) = f(a)+g(a) = (f+g)(a)$. Torej je tudi funkcija $f+g$ zvezna v točki $a$, kar smo želeli dokazati. V ostalih primerih je dokaz podoben. $\square$

**Trditev. Če je funkcija $f$ zvezna v točki $a$ in če je funkcija $g$ zvezna v točki $f(a)$, potem je funkcija $g \circ f$ zvezna v $a$.**

Dokaz: Točka $a$ leži v $D(g \circ f) = \{x \in D(f)\colon\ f(x) \in D(g)\}$. Vzemimo poljubno zaporedje $a_n$ v $D(g \circ f)$, ki limitira proti $a$. Ker je funkcija $f$ zvezna v $a$, zaporedje $f(a_n)$ limitira proti $f(a)$. Ker je funkcija $g$ zvezna v točki $f(a)$, odtod sledi, da zaporedje $g(f(a_n))$ limitira proti $g(f(a))$. Torej je funkcija $g \circ f$ res zvezna v točki $a$. $\square$

## 3.2. Primeri zveznih funkcij

Funkcija $f$ je **zvezna**, če je zvezna v vsaki točki iz svojega definicijskega območja. Grafično to pomeni, da ima graf $\Gamma(f)$ kvečjemu toliko "kosov", kot jih ima definicijsko območje $D(f)$.

**Primer.** Vsaka konstantna funkcija je zvezna.

Dokaz: Vzemimo poljubni realni števili $a$. Trdimo, da je konstantna funkcija $f(x) = c$ zvezna v točki $a$. Vzemimo poljubno zaporedje $a_n$, ki limitira proti $a$. Pokazati moramo, da zaporedje $f(a_n)$ limitira proti $f(a)$. Ker je $f(a_n) = c$ za vsak $n$ in ker je $f(a) = c$, zadošča pokazati, da konstantno zaporedje $c$ limitira proti $c$. To pa smo že videli v poglavju o zaporedjih. $\square$

**Primer.** Identična funkcija je zvezna.

Dokaz: Vzemimo poljubno realno število $a$ in poljubno zaporedje $a_n$, ki konvergira proti $a$. Ker je $\mathrm{id}(a_n) = a_n$ in $\mathrm{id}(a) = a$, odtod sledi, da zaporedje $\mathrm{id}(a_n)$ konvergira proti $\mathrm{id}(a)$. $\square$

Iz gornjih rezultatov sledi, da se zveznost funkcij ohranja pri seštevanju, odštevanju, množenju, deljenju in komponiranju.

**Primer.** Potenčne funkcije so zvezne, ker so produkti identičnih funkcij. Polinomske funkcije so zvezne, ker so vsote produktov potenčnih funkcij s konstantnimi funkcijami. Racionalne funkcije so zvezne, ker so količniki polinomskih funkcij.

**Primer.** Eksponentna funkcija je zvezna.

Dokaz: Dokažimo najprej, da za vsak $h$ z intervala $[-1,1]$ velja $|e^h-1| \leq 2|h|$. Naj bo $a_n = \left(1+\frac{h}{n}\right)^n$. Iz binomske formule sledi, da velja $a_n = 1+\binom{n}{1}\frac{h}{n}+\binom{n}{2}\frac{h^2}{n^2}+\ldots+\binom{n}{n}\frac{h^n}{n^n}$. Definirajmo $b_n = \binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{h}{n^2}+\ldots+\binom{n}{n}\frac{h^{n-1}}{n^n}$ in opazimo, da velja $a_n = 1+b_n h$. Ker je $|h| \leq 1$, lahko ocenimo $|b_n| \leq \binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\ldots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \leq 1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!} \leq 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n} = 1+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\ldots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}) = 2-\frac{1}{n} \leq 2$. Torej iz $|h| \leq 1$ sledi, da za vsak $n$ velja $|a_n-1| = |b_n||h| \leq 2|h|$. V limiti dobimo želeni rezultat.

Vzemimo sedaj poljuben $c \in \mathbb{R}$ in dokažimo, da je funkcija $x \mapsto e^x$ zvezna v $c$. Naj bo $\epsilon > 0$ in definirajmo $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{2e^c}\}$. Potem za poljuben $x$, ki zadošča $|x-c| < \delta$, velja $|e^x - e^c| = e^c|e^{x-c}-1| \leq 2e^c|x-c| < 2e^c\frac{\epsilon}{2e^c} = \epsilon$. Pri prvem neenačaju smo upoštevali, da iz $|x-c| \leq 1$ sledi $|e^{x-c}-1| \leq 2|x-c|$. □

**Primer.** Funkcija sinus je zvezna.

Dokaz: Dokažimo najprej, da za vsako realno število $x$ velja $|\sin x| \leq |x|$. Neenakost se ne spremeni, če $x$ zamenjamo z $-x$, zato lahko predpostavimo, da je $x \geq 0$. Za $x > 1$ je ocena očitna, saj je vedno $|\sin x| \leq 1 < x$. V primeru $0 \leq x \leq 1$ pa postopamo takole. Naj bo $p_i$ ploščina izseka iz enotskega kroga, ki ustreza kotu $x$ radianov. Ker je ploščina celega kroga s polmerom 1 enaka $\pi$, je $p_i = \frac{x}{2\pi}\cdot\pi = \frac{x}{2}$. Naj bo $p_t$ ploščina trikotnika, ki ima dve stranici enaki kot krožni izsek. Trikotnik ima višino $\sin x$ in osnovnico 1, torej je $p_t = \frac{\sin x}{2}$. Ker je trikotnik vsebovan v izseku, je $p_t \leq p_i$. Ko pokrajšamo dvojke, dobimo želeno oceno.

Vzemimo sedaj poljuben $a \in \mathbb{R}$ in dokažimo, da je funkcija sin zvezna v $a$. Naj bo $\epsilon > 0$ in postavimo $\delta = \epsilon$. Potem za vsak $x$, ki zadošča $|x-a| < \delta$, velja $|\sin x - \sin a| = 2|\sin\frac{x-a}{2}||\cos\frac{x+a}{2}| \leq 2\cdot|\frac{x-a}{2}|\cdot 1 = |x-a| < \epsilon$. Pri prvem neenačaju smo upoštevali, da je $|\sin\frac{x-a}{2}| \leq |\frac{x-a}{2}|$ in $|\cos\frac{x+a}{2}| \leq 1$. □

## 3.3. Metoda bisekcije

Iščemo rešitev enačbe $f(x) = 0$ na intervalu $[a,b]$. Zanima nas, ali rešitev obstaja in kako jo poiščemo.

**Izrek o bisekciji. Če je funkcija $f$ zvezna na intervalu $[a,b]$ in različno predznačena v krajiščih (se pravi $f(a)f(b) < 0$), potem ima enačba $f(x) = 0$ vsaj eno rešitev na intervalu $[a,b]$. To rešitev lahko poiščemo z metodo bisekcije.**

Dokaz: Omejimo se na primer $f(a) < 0$ in $f(b) > 0$, ker je drugi primer skoraj enak. Najprej rekurzivno definirajmo zaporedji $a_n$ in $b_n$. Naj bo

$a_1 = a$ in $b_1 = b$. Če smo $a_n$ in $b_n$ že definirali, potem definiramo $a_{n+1}$ in $b_{n+1}$ tako, da najprej izračunamo $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ in ločimo tri možnosti:

- če je $f(c_n) = 0$, potem naj bo $a_{n+1} = c_n$ in $b_{n+1} = c_n$;
- če je $f(c_n) > 0$, potem naj bo $a_{n+1} = a_n$ in $b_{n+1} = c_n$;
- če je $f(c_n) < 0$, potem naj bo $a_{n+1} = c_n$ in $b_{n+1} = b_n$.

Naštejmo nekaj očitnih lastnosti zaporedij $a_n$ in $b_n$.

- Zaporedje $a_n$ je naraščajoče, zaporedje $b_n$ pa padajoče. Ker za vsak $n$ velja $a_n \leq b_n$, je zaporedje $a_n$ navzgor omejeno, zaporedje $b_n$ pa navzdol omejeno. Sledi, da sta zaporedji $a_n$ in $b_n$ konvergentni.
- Za vsak $n$ velja $b_n - a_n \leq \frac{b-a}{2^{n-1}}$. Odtod sledi, da imata zaporedji $a_n$ in $b_n$ isto limito, recimo ji $c$.
- Za vsak $n$ je $f(a_n) \leq 0$ in $f(b_n) \geq 0$. Ker je $f$ zvezna, sledi iz prejšnje točke, da je $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0$ in $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0$.

Iz zadnje točke sledi $f(c) = 0$, torej je $c$ iskana rešitev. $\square$

Tudi kadar vemo, da enačba $f(x) = 0$ ima rešitev na intervalu $[a, b]$, ni nujno, da jo znamo najti v končnem času. Metoda bisekcije, ki smo jo spoznali v dokazu, namreč zahteva v splošnem neskončno korakov. Na srečo v praksi velikokrat zadoščajo približne rešitve. Vprašajmo se, koliko korakov moramo narediti, da dobimo rešitev $c$ na $k$ decimalk natančno? Iz ocene $|c - c_n| \leq \frac{b_n-a_n}{2} \leq \frac{b-a}{2^n} < 10^{-k}$ dobimo, da za

$$n > \frac{k \ln 10 + \ln(b-a)}{\ln 2}$$

velja

$$c \in (c_n - 10^{-k}, c_n + 10^{-k}).$$

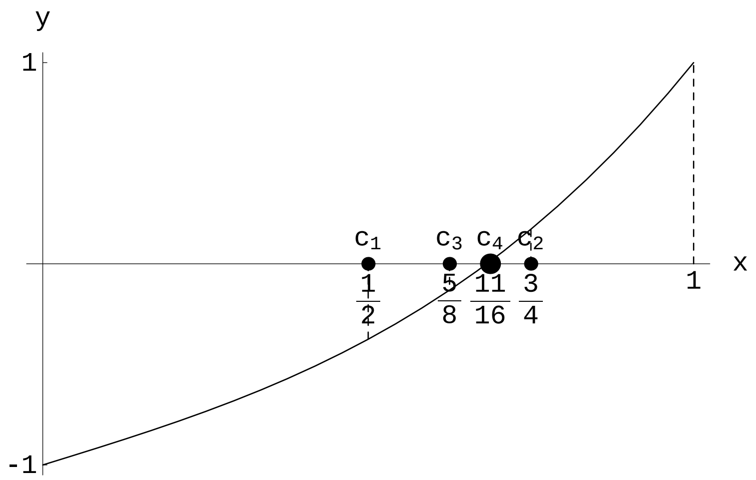
Napraviti moramo torej $n-1$ korakov, pri čemer je $n$ najmanjše naravno število, za katerega velja $n > \frac{k \ln 10+\ln(b-a)}{\ln 2}$.

**Primer.** Poiščimo rešitev enačbe $x^3 + x - 1 = 0$ na intervalu $[0, 1]$ na eno decimalko natančno. Ker funkcija $f(x) = x^3 + x - 1$ spremeni predznak na intervalu $[0, 1]$, si lahko pomagamo z gornjo metodo. Imamo $a = 0$, $b = 1$ in $k = 1$, zato je vrednost izraza $\frac{k \ln 10+\ln(b-a)}{\ln 2}$ približno 3.3. Se pravi, da moramo izračunati $c_4$.

(1) Definiramo $a_1 = 0$, $b_1 = 1$ in opazimo da $f(a_1) = -1 < 0$ in $f(b_1) = 1 > 0$.
(2) Naj bo $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2} = \frac{1}{2}$. Ker je $f(c_1) = -\frac{3}{8}$, vzamemo $a_2 = c_1 = \frac{1}{2}$ in $b_2 = b_1 = 1$.
(3) Naj bo $c_2 = \frac{a_2+b_2}{2} = \frac{3}{4}$. Ker je $f(c_2) = \frac{11}{64}$, vzamemo $a_3 = a_2 = \frac{1}{2}$ in $b_3 = c_2 = \frac{3}{4}$.
(4) Naj bo $c_3 = \frac{a_3+b_3}{2} = \frac{5}{8}$. Ker je $f(c_3) = -\frac{67}{512}$, vzamemo $a_4 = c_3 = \frac{5}{8}$ in $b_4 = b_3 = \frac{3}{4}$.

(5) Število $c_4 = \frac{a_4+b_4}{2} = \frac{11}{16}$ se od prave rešitve razlikuje za manj kot $\frac{1}{16}$, torej za manj kot 0.1.

V resnici smo zadeli bolje kot na eno decimalko, saj je $\frac{11}{16} = 0.6875$, $c$ pa je približno 0.6823. Vendar se to ni dalo vnaprej predvideti.




Izrek o bisekciji ima tole pomembo teoretično posledico.

**Izrek o vmesnih vrednostih. Če je funkcija $f$ zvezna na intervalu $[a, b]$, potem zavzame vse vrednosti med $f(a)$ in $f(b)$.**

Dokaz: Naj bo $d$ poljubna vrednost med $f(a)$ in $f(b)$. Potem funkcija $g(x) = f(x) - d$ spremeni predznak na intervalu $[a, b]$. Po metodi bisekcije obstaja tak $c \in [a, b]$, da je $g(c) = 0$. Sledi $f(c) = d$, torej $f(x)$ res zavzame vrednost $d$. $\square$

Iz trditve sledi naslednje. Če je $f$ zvezna funkcija in $D(f)$ povezana množica, potem je tudi $Z(f)$ povezana množica.

**Primer.** Pokažimo, da funkcija sinus zavzame poljubno vrednost med $-1$ in 1. Ker je namreč funkcija sinus zvezna na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, zavzame po gornji trditvi vse vrednosti med $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ in $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Enako velja za kosinus. S tem smo tudi pokazali, da je $D(\arcsin) = [-1, 1]$ in $D(\arccos) = [-1, 1]$.

**Primer.** Pokažimo, da eksponentna funkcija zavzame poljubno pozitivno vrednost. Vzemimo namreč poljuben $d > 0$. Potem obstaja tako naravno število $n$, da je $e^n > \max\{d, 1/d\}$ (uporabi Dedekindovo lastnost). Sledi, da $d \in [e^{-n}, e^n]$. Po gornji lastnosti zveznih funkcij obstaja tak $c \in [-n, n]$, da velja $f(c) = d$. S tem smo tudi pokazali, da je $D(\ln) = (0, \infty)$.

## 3.4. Izrek o inverzni funkciji

Vemo že, da je vsaka strogo monotona funkcija injektivna. Za zvezne funkcije s povezanim definicijskim območjem pa velja tudi obrat.

**Trditev. Če je funkcija $f$ injektivna in zvezna in če je $D(f)$ povezana množica, potem je $f$ strogo monotona.**

Dokaz: Pokažimo najprej, da za vsako funkcijo, ki ni strogo monotona, obstajajo takšna števila $c, d, e \in D(f)$, $c < d < e$, da je bodisi $f(c) < f(d) > f(e)$ bodisi $f(c) > f(d) < f(e)$.

Ker $f$ ni strogo naraščajoča, obstajata taka $u, v \in D(f)$, da velja $u < v$ in $f(u) > f(v)$. Ker $f$ ni strogo padajoča, vsaj ena od skrčitev $f|_{(-\infty,u]\cap D(f)}$, $f|_{[u,v]}$, $f|_{[v,+\infty)\cap D(f)}$ ni strogo padajoča.

- Če prva skrčitev ni strogo padajoča, obstajata takšni števili $r, s \in (-\infty, u] \cap D(f)$, da je $r < s$ in $f(r) < f(s)$. Ločimo podprimera $f(r) > f(u)$ ter $f(r) < f(u)$. Pri prvem je $f(r) < f(s) > f(u)$ in $r < s < u$, pri drugem pa $f(r) < f(u) > f(v)$ in $r < u < v$.
- Če druga skrčitev ni strogo padajoča, obstajata takšni števili $r, s \in [u, v]$, da je $r < s$ in $f(r) < f(s)$. Ločimo podprimera $f(s) < f(u)$ ter $f(s) > f(u)$. Pri prvem je $f(u) > f(r) < f(s)$ in $u < r < s$, pri drugem pa $f(u) < f(s) > f(v)$ in $u < s < v$.
- Če tretja skrčitev ni strogo padajoča, obstaja takšni števili $r, s \in [v, +\infty) \cap D(f)$, da je $r < s$ in $f(r) < f(s)$. Tokrat ločimo podprimera $f(s) < f(v)$ in $f(s) > f(v)$. Pri prvem je $f(v) > f(r) < f(s)$ in $v < r < s$, pri drugem pa $f(u) > f(v) < f(s)$ in $u < v < s$.

Recimo, da bi obstajala taka injektivna zvezna funkcija $f$ s povezanim definicijskim območjem, ki ne bi bila strogo monotona. Potem bi obstajala, kot smo pravkar dokazali, taka števila $c, d, e \in D(f)$, da bi veljalo $c < d < e$ in bodisi $f(c) < f(d) > f(e)$ bodisi $f(c) > f(d) < f(e)$. Omejimo se na prvi primer, ker drugega obravnavamo podobno. Ker je $f$ zvezna, bi lahko za vsak $y \in (\max\{f(c), f(e)\}, f(d))$ poiskali taki števili $x_1 \in (c, d)$ in $x_2 \in (d, e)$, da bi veljalo $f(x_1) = y = f(x_2)$. Ker je $f$ injektivna, bi odtod sledilo, da je $x_1 = x_2$, kar pa ni možno, saj je $(c, d) \cap (d, e) = \emptyset$. Taka funkcija torej ne obstaja. Zato je vsaka zvezna injektivna funkcija s povezanim definicijskim območjem strogo monotona. □

Predpostavke, da je $D(f)$ povezana množica ne moremo izpustiti, kot pokaže naslednji primer:

**Primer.** Funkcija $f\colon x \mapsto 1/x$, $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, je injektivna in zvezna, vendar ni strogo monotona. Ker je $-1 < 1$ in $f(-1) < f(1)$, ni strogo padajoča. Ker je $1 < 2$ in $f(1) > f(2)$, ni niti strogo naraščajoča. Problem je seveda v tem, da množica $D(f)$ ni povezana.

Naslednja trditev je glavni rezultat tega razdelka.

**Izrek o inverzni funkciji. Če je funkcija $f$ injektivna, zvezna in če je $D(f)$ povezana množica, potem je tudi funkcija $f^{-1}$ zvezna.**

Dokaz: Naj bo $f$ taka injektivna zvezna funkcija, da je $D(f)$ povezana množica. Po gornji trditvi odtod sledi, da je $f$ strogo monotona. Oglejmo si najprej primer, ko je $f$ strogo naraščajoča. Pišimo $g = f^{-1}$.

Dokažimo najprej, da je funkcija $g$ strogo naraščajoča. Vzemimo poljubni števili $x, y \in D(g) = Z(f)$, ki zadoščata $x < y$. Naj bo $u = g(x)$ in $v = g(y)$. Potem sta števili $u$ in $v$ v $Z(g) = D(f)$ ter $x = f(u)$ in $y = f(v)$. Možnost $u = v$ odpade, saj bi iz nje sledilo $x = y$. Ker je $f$ strogo naraščajoča, odpade tudi možnost $u > v$, saj bi iz nje sledilo $f(u) > f(v)$, torej $x > y$. Ostane samo možnost $u < v$, torej je $g(x) < g(y)$.

Vzemimo sedaj poljubno točko $d \in D(g)$ in dokažimo, da je $g$ zvezna v $d$. Pišimo $c = g(d)$. Naj bo $\epsilon > 0$ in postavimo

$$\delta = \min\{f(c+\epsilon) - d, d - f(c-\epsilon)\}.$$

Ker je $f$ strogo naraščajoča, je $\delta > 0$. Vzemimo poljubno število $y \in D(g)$, ki zadošča $|y - d| < \delta$. Odtod sledi $f(c-\epsilon) = d - (d - f(c-\epsilon)) < d - \delta < y < d + \delta < d + (f(c+\epsilon) - d) = f(c+\epsilon)$. Torej je $f(c-\epsilon) < y < f(c+\epsilon)$. Ker je $g$ strogo naraščajoča, odtod sledi $g(f(c-\epsilon)) < g(y) < g(f(c+\epsilon))$. Torej je $c - \epsilon < g(y) < c + \epsilon$ in zato $|g(y) - g(d)| = |g(y) - c| < \epsilon$. S tem smo pokazali, da je funkcija $g$ res zvezna v točki $d$.

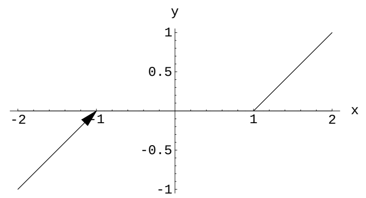
Ostane še primer, ko je $f$ strogo padajoča. Toda potem je $-f$ strogo naračajoča, zvezna in $D(-f) = D(f)$ je povezana. Po pravkar dokazanem sledi, da je njena inverzna funkcija $(-f)^{-1}$ zvezna. Toda $(-f)^{-1} = -f^{-1}$, zato je tudi funkcija $f^{-1}$ zvezna. $\square$

Tudi pri izreku o inverzni funkciji ne moremo izpustiti predpostavke, da je definicijsko območje povezano.

**Primer.** Oglejmo si funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [-2,-1), \\ x-1, & x \in [1,2]. \end{cases}$$

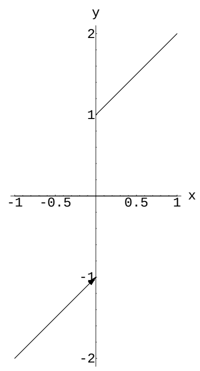
Ta funkcija je zvezna v vsaki točki iz $D(f) = [-2,-1) \cup [1,2]$.



Njena inverzna funkcija

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x-1, & x \in [-1,0), \\ x+1, & x \in [0,1], \end{cases}$$

pa ni zvezna v točki 0.




Izrek o inverzni funkciji ima naslednjo pomembno posledico.

**Trditev. Vse elementarne funkcije so zvezne.**

Dokaz: Vemo že, da so zvezne konstantne funkcije, celoštevilske potence, eksponentna funkcija in funkcija sinus. Iz izreka o inverzni funkciji sledi, da so zvezni tudi koreni, logaritem in arkus sinus. Ker se zveznost ohranja pri osnovnih računskih operacijah, sledi odtod, da so zvezne tudi vse elementarne funkcije. □

## 3.5. Zveznost zlepkov

Eden od načinov, kako iz funkcij $f$ in $g$ sestavimo novo funkcijo, je, da ju zlepimo. Če v kakšni točki $a \in D(f) \cap D(g)$ velja $f(a) = g(a)$, potem lahko definiramo funkcijo

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D(f) \text{ in } x \leq a, \\ g(x), & x \in D(g) \text{ in } x \geq a, \end{cases}$$

ki ji pravimo **zlepek** funkcij $f$ in $g$ v točki $a$.

**Primer.** Funkcija $h(x) = |x|$ je zlepek funkcij $f(x) = -x$ in $g(x) = x$ v točki 0.

Glavni cilj tega razdelka je dokazati naslednjo trditev.

**Trditev. Zlepek zveznih funkcij je zvezna funkcija.**

Naj bo $h$ zlepek funkcij $f$ in $g$ v točki $a$. Vzemimo poljubno točko $b \in D(h)$ in ločimo tri primere $b < a$, $b = a$ in $b > a$.

**Če je funkcija $f$ zvezna v točki $b$, kjer $b < a$, potem je tudi funkcija $h$ zvezna v točki $b$.**

Dokaz: Vzemimo poljuben $\epsilon > 0$. Ker je $f$ zvezna v $b$, obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $x \in D(f)$, ki zadošča $|x - b| < \delta$ velja $|f(x) - f(b)| < \epsilon$. Postavimo $\delta_1 = \min\{\delta, |a - b|\}$ in dokažimo, da za poljuben $x \in D(h)$, ki zadošča $|x - b| < \delta_1$ velja $|h(x) - h(b)| < \epsilon$. Odtod bo sledilo, da je $h$ zvezna v $b$. Očitno je $h(b) = f(b)$. Ker je $|x - b| < \delta_1$, je $x < a$, torej je $h(x) = f(x)$. Sedaj iz $|f(x) - f(b)| < \epsilon$ sledi, da je $|h(x) - h(b)| < \epsilon$. □

Podobno tudi dokažemo, da je $h$ zvezna funkcija v točki $b$, če je $b > a$ in je funkcija $g$ zvezna v točki $b$. Preostane še primer, ko je $b = a$. **Če sta funkciji $f$ in $g$ zvezni v točki $a$, potem je tudi funkcija $h$ zvezna v točki $a$.**

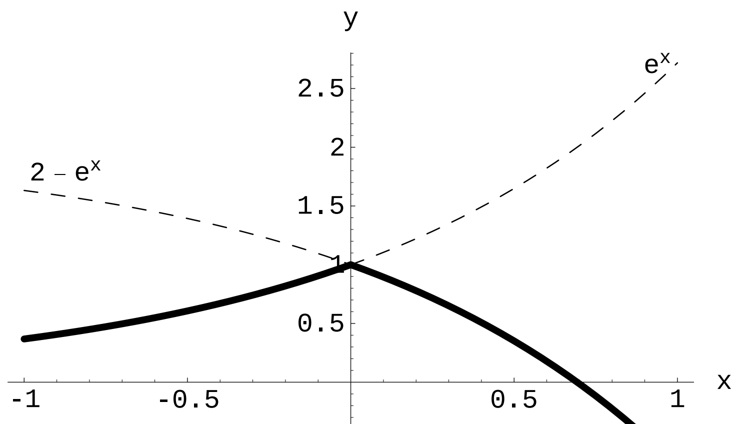
Dokaz: Vzemimo poljuben $\epsilon > 0$. Ker je $f$ zvezna v $a$, obstaja tak $\delta_1 > 0$, da za vsak $x \in D(f)$, ki zadošča $|x - a| < \delta_1$ velja $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Ker je $g$ zvezna v $a$, obstaja tak $\delta_2 > 0$, da za vsak $x \in D(g)$, ki zadošča $|x - a| < \delta_2$ velja $|g(x) - g(a)| < \epsilon$. Postavimo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Vzemimo poljuben $x \in D(h)$, ki zadošča $|x - a| < \delta$. Če je $x \leq a$, potem je $|h(x) - h(a)| = |f(x) - f(a)| < \epsilon$. Če pa je $x \geq a$, potem je $|h(x) - h(a)| = |g(x) - g(a)| < \epsilon$. V obeh primerih je $|h(x) - h(a)| < \epsilon$. Torej je $h$ res zvezna v $a$. □

**Primer.** Nariši graf funkcije

$$h(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ 2 - e^{-x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

in dokaži, da je zvezna.

Funkciji $f(x) = e^x$ in $g(x) = 2 - e^{-x}$ sta elementarni, zato sta obe zvezni. Ker velja $f(0) = 1 = g(0)$, je $h$ zlepek funkcij $f$ in $g$ v točki 0. Po glavni trditvi tega razdelka je zlepek $h$ zvezna funkcija.




Podobno kot zlepek dveh, lahko definiramo tudi zlepek treh ali več funkcij. Recimo, da so $f_0, f_1, \ldots, f_r$ dane funkcije in $a_1 < \ldots < a_r$

takšna števila, da velja $f_0(a_1) = f_1(a_1)$, $f_1(a_2) = f_2(a_2)$, ..., $f_{r-1}(a_r) = f_r(a_r)$. Potem je

$$h(x) = \begin{cases} f_0(x), & x \in D(f_0) \text{ in } x \leq a_0, \\ f_1(x), & x \in D(f_1) \text{ in } a_0 \leq x \leq a_1, \\ \vdots & \\ f_{r-1}(x), & x \in D(f_{r-1}) \text{ in } a_{r-1} \leq x \leq a_r, \\ f_r(x), & x \in D(f_r) \text{ in } a_r \leq x, \end{cases}$$

zlepek funkcij $f_0, f_1, \ldots, f_r$ vzdolž $a_1, \ldots, a_r$. S popolno indukcijo lahko dokažemo, da je zlepek $h$ zvezna funkcija, če so funkcije $f_0, f_1, \ldots, f_r$ zvezne.

## 3.6. Definicija limite

Število $L$ je **limita** funkcije $f$ v točki $a$, če je funkcija

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D(f) \setminus \{a\}, \\ L, & x = a, \end{cases}$$

zvezna v točki $a$. V tem primeru pišemo

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Točka $a$ ni nujno element množice $D(f)$.

Spomnimo se, da smo zveznost funkcije v točki definirali na dva načina: z zaporedji ter z $\epsilon$ in $\delta$. Če ti dve definiciji zveznosti upoštevamo v gornji definiciji, dobimo naslednji dve ekvivalentni definiciji limite funkcije.

- Število $L$ je limita funkcije $f$ v točki $a$, če za vsako zaporedje $a_n$ v $D(f) \setminus \{a\}$, ki limitira proti $a$, zaporedje $f(a_n)$ limitira proti $L$.
- Število $L$ je limita funkcije $f$ v točki $a$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $x \in D(f)$, ki zadošča $0 < |x - a| < \delta$, velja $|f(x) - L| < \epsilon$.

Vprašajmo se, koliko različnih limit ima lahko funkcija $f$ v točki $a$. Seveda se lahko zgodi, da nima nobene.

**Primer.** Funkcija

$$f(x) = \frac{x}{|x|}, \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

nima nobene limite v točki 0. Zaporedji $-\frac{1}{n}$ in $\frac{1}{n}$ ležita v $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in limitirata proti 0, vendar zaporedji $f(-\frac{1}{n})$ in $f(\frac{1}{n})$ nimata iste limite.

Ali ima funkcija $f$ lahko več limit v isti točki? Odgovor je odvisen od tega ali je točka $a$ “stekališče” množice $D(f)$ ali ne.

Pravimo, da je točka $a$ **stekališče** množice $A$, če je $a$ limita kakega zaporedja z elementi iz $A \setminus \{a\}$. (Ekvivalentno: če vsaka $\epsilon$-okolica točke $a$ seka $A \setminus \{a\}$.) Geometrijsko to pomeni, da se točka $a$ "dotika" množice $A \setminus \{a\}$. Oglejmo si dva primera.

**Primer.** Točka $a = 1$ je stekališče množice $A = (-1, 1)$, čeprav $a \notin A$. Zaporedje $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ namreč leži v $A \setminus \{a\} = (-1, 1)$ in limitira proti $a$.

**Primer.** Točka $b = 2$ ni stekališče množice $B = [-1, 1] \cup \{2\}$, čeprav $b \in B$. Ne obstaja namreč tako zaporedje v $B \setminus \{2\} = [-1, 1]$, ki bi limitiralo proti $b = 2$.

Dokažimo sedaj tole pomožno trditev.

**Pomožna trditev. Vsaka funkcija $f$ je zvezna v vsaki točki iz množice $D(f)$, ki ni njeno stekališče.**

Dokaz: Če točka $a$ ni stekališče množice $D(f)$, potem je vsako zaporedje $a_n$ v $D(f)$, ki limitira proti $a$, od nekod naprej enako $a$, pripadajoče zaporedje $f(a_n)$ pa je od člena z istim indeksom naprej enako $f(a)$, torej limitira proti $f(a)$. $\square$

Sedaj lahko odgovorimo na gornje vprašanje.

**Trditev. Če je točka $a$ stekališče množice $D(f)$, potem ima funkcija $f$ v točki $a$ kvečjemu eno limito. Če točka $a$ ni stekališče množice $D(f)$, potem je vsako realno število limita funkcije $f$ v točki $a$.**

Dokaz: Če je točka $a$ stekališče množice $D(f)$, potem obstaja tako zaporedje $a_n$ v $D(f) \setminus \{a\}$, da velja $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Če sta $K$ in $L$ limiti funkcije $f$ v $a$, potem po definiciji limite velja tako $K = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$ kot $L = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$. Ker vemo, da zaporedje ne more imeti več kot eno limito, sledi $K = L$.

Če točka $a$ ni stekališče množice $D(f)$, potem tudi ni stekališče množice $D(\tilde{f}) = D(f) \cup \{a\}$. Po pomožni trditvi je potem funkcija $\tilde{f}$ zvezna v točki $a$ in to neodvisno od izbire $L$. $\square$

## 3.7. Preprostejše metode računanja limit

Oglejmo si nekaj preprostih metod za računanje limit. Prvi metodi pravimo **metoda vstavljanja**.

**Trditev. Če je funkcija $f$ zvezna v točki $a$, potem je**

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Dokaz: Pokazati moramo, da je funkcija

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D(f) \setminus \{a\}, \\ f(a), & x = a, \end{cases}$$

zvezna v točki $a$. Najprej opazimo, da je funkcija $\tilde{f}$ kar enaka funkciji $f$. Ker je $f$ zvezna v $a$, je zato tudi $\tilde{f}$ zvezna v $a$. $\square$

Uporabimo metodo vstavljanja na primeru.

**Primer.** Funkcija $\frac{x+1}{x-2}$ je zvezna v točki 1, zato je

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x-2} = \frac{1+1}{1-2} = -2.$$

Pri računanju limite racionalne funkcije, ki ni definirana v točki $a$, si pomagamo z **metodo krajšanja**:

**Primer.** Izračunajmo limito

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+x-2}.$$

Ker funkcija $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+x-2}$ ni definirana v točki 1, ne moremo uporabiti metode vstavljanja. Ko števec in imenovalec razstavimo in pokrajšamo skupni faktor, dobimo, da za vsak $x \neq 1$ velja

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+1}{x+2}.$$

Funkcija $\tilde{f}(x) = \frac{x+1}{x+2}$ se torej ujema s $f(x)$ za vsak $x \neq 1$, poleg tega pa je definirana in zvezna v točki 1. Po definiciji limite zato velja

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \tilde{f}(1) = \frac{2}{3}.$$

Pri računanju limit funkcij, v katerih nastopajo koreni, si pomagamo z **metodo razširjanja**.

**Primer.** Izračunajmo limito

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}.$$

Ulomek najprej razširimo s $\sqrt{1+x}+1$:

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \frac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}.$$

Nato pokrajšamo $x$ in uporabimo metodo vstavljanja

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2}.$$

Če lahko funkcijo $f$ vkleščimo med dve funkciji, ki imata v točki $a$ isto limito $L$, potem je tudi limita funkcije $f$ v $a$ enaka $L$. Ta trditev sledi iz ustrezne trditve za zaporedja. Tej metodi računanja limit pravimo **metoda sendviča.**

**Primer.** Izračunajmo limito

$$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}.$$

Ker je $|\sin\frac{1}{x}| \leq 1$, velja

$$-x \leq x\sin\frac{1}{x} \leq x$$

za vsak $x \in \mathbb{R}$. Ker je

$$\lim_{x\to 0} x = \lim_{x\to 0}(-x) = 0,$$

sledi po metodi sendviča, da je

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0.$$

## 3.8. Računanje z limitami

Iz formul za računanje z limitami zaporedij lahko izpeljemo ustrezne formule za računanje z limitami funkcij.

**Trditev. Predpostavimo, da obstajata limiti**

$$\lim_{x\to a} f(x) = K \quad \text{in} \quad \lim_{x\to a} g(x) = L.$$

**Potem velja:**

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) = K+L, \qquad \lim_{x\to a}\big(f(x)-g(x)\big) = K-L,$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = KL \quad \text{in} \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{K}{L} \text{ (če je } L\neq 0).$$

S temi formulami lahko zapleteno limito razstavimo v več preprostejših.

Bolj zanimivo je vprašanje, kako izračunamo limito kompozituma dveh funkcij. Če je

$$\lim_{x\to a} f(x) = K \quad \text{in} \quad \lim_{x\to K} g(x) = L,$$

potem bi pričakovali, da je tudi

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = L.$$

Vendar žal ni vedno tako, kot pokaže naslednji primer.

**Primer.** Recimo, da je $f(x) = 0$ in $g(x) = |\mathrm{sgn}(x)|$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Potem je

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \quad \text{in} \quad \lim_{x\to 0} g(x) = 1,$$

vendar je zaradi $g(f(x)) = g(0) = 0$

$$\lim_{x\to 0} g(f(x)) = 0 \neq 1.$$

Velja pa gornji sklep v dveh pogostih primerih:

- če $L = g(K)$ (se pravi, če je $g$ zvezna v $K$) ali
- če obstaja tak $\eta > 0$, da je $f(x) \neq K$ za vsak $x \in (a-\eta, a+\eta)$, ki ni enak $a$.

**Trditev. Če je $\lim_{x\to a} f(x) = K$ in če je funkcija $g$ zvezna v točki $K$, potem je $\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(K)$.**

Dokaz: Vzemimo poljubno zaporedje $a_n$ v $D(g \circ f) \setminus \{a\}$, ki limitira proti $a$. Potem zaporedje $f(a_n)$ limitira proti $K$, zato po definiciji zveznosti funkcije $g$ v točki $K$ zaporedje $g(f(a_n))$ limitira proti $g(K)$. S tem smo pokazali, da je $\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(K)$. $\square$

**Trditev. Če je $\lim_{x\to a} f(x) = K$ in $\lim_{x\to K} g(x) = L$ in če obstaja tak $\eta > 0$, da je $f(x) \neq K$ za vsak $x \in (a-\eta, a+\eta) \setminus \{a\}$, potem je $\lim_{x\to a} g(f(x)) = L$.**

Dokaz: Vzemimo poljubno zaporedje $a_n$ v $D(g \circ f) \setminus \{a\}$, ki limitira proti $a$. Potem obstaja tak $n_0$, da za vsak $n \geq n_0$ velja $a_n \in (a-\eta, a+\eta)$. Glede na izbiro $\eta$ to pomeni, da je $f(a_n) \neq K$ za vsak $n \geq n_0$. Zaporedje $f(a_n)$ limitira proti $K$, zato tudi podzaporedje $b_k = f(a_{k+n_0})$, ki leži v $D(g) \setminus K$, limitira proti $K$. Po definiciji limite $\lim_{x\to K} g(x) = L$ odtod sledi, da zaporedje $g(b_k)$ limitira proti $L$. Ker je graf zaporedja $g(f(a_n))$ enak v desno premaknjenemu grafu zaporedja $g(b_k)$, tudi zaporedje $g(f(a_n))$ limitira proti $L$. Torej je res $\lim_{x\to a} g(f(x)) = L$. $\square$

**Primer.** Izračunajmo limito

$$\lim_{x\to 2}\left((2x-4)\sin\frac{1}{x-2}\right).$$

Najprej definiramo $f(x) = x - 2$. Potem je

$$\lim_{x\to 2}\left((2x-4)\sin\frac{1}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2}\left(2f(x)\sin\frac{1}{f(x)}\right).$$

Ker je

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right) = 0$$

in ker je $f(x) \neq 0$ za vsak $x \neq 2$, je po gornji trditvi

$$\lim_{x\to 2}\left(f(x)\sin\frac{1}{f(x)}\right) = 0.$$

Torej je iskana limita enaka 0.

Metodi iz tega primera pravimo **metoda substitucije**.

## 3.9. Enostranske limite

Število $K$ je **leva limita** funkcije $f$ v točki $a$, če je funkcija

$$\tilde{f}^-(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D(f) \text{ in } x < a, \\ K, & x = a, \end{cases}$$

zvezna v točki $a$. V tem primeru pišemo

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = K.$$

Število $L$ je **desna limita** funkcije $f$ v točki $a$, če je funkcija

$$\tilde{f}^+(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D(f) \text{ in } x > a, \\ L, & x = a, \end{cases}$$

zvezna v točki $a$. V tem primeru pišemo

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L.$$

**Primer.** Izračunajmo levo in desno limito funkcije sgn v točki 0. Velja

$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1 \quad \text{in} \quad \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1.$$

**Primer.** Če je $f$ naraščajoča funkcija in $D(f) = (a, b)$, potem je v vsaki točki $c \in (a, b)$

$$\lim_{x \to c^-} f(c) = \sup\{f(x)\colon \ x \in D(f), x < c\},$$

$$\lim_{x \to c^+} f(c) = \inf\{f(x)\colon \ x \in D(f), x > c\}.$$

Podobno velja, če je $f$ padajoča in $D(f) = (a, b)$. V teh dveh primerih torej leva in desna limita obstajata v vsaki točki iz $D(f)$. Seveda ni nujno, da bi $f$ imela desno limito v $a$ ali levo limito v $b$. Obstoj teh dveh limit je namreč ekvivalenten omejenosti funkcije $f$.

Kadar je točka $a$ stekališče množice $\{x \in D(f)\colon \ x < a\}$, ima funkcija $f$ kvečjemu eno levo limito v točki $a$. Podobno velja za desne limite.

**Primer.** Če je $D(f) = (a, b)$, potem ima $f$ neskončno desnih limit v $b$ in neskončno levih limit v $a$. Ima pa $f$ kvečjemu eno levo limito v vsaki točki iz $(a, b]$ in kvečjemu eno desno limito v vsaki točki iz $[a, b)$.

Vprašajmo se sedaj, kakšna je zveza med enostranskimi in navadnimi limitami.

**Trditev. Limita funkcije $f$ v točki $a$ je enaka $L$ natanko tedaj, ko sta tako leva kot desna limita funkcije $f$ v točki $a$ enaki $L$.**

Dokaz: Vzemimo poljubno realno število $L$. Po definiciji navadne limite velja

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

natanko tedaj, ko je funkcija

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D(f) \setminus \{a\}, \\ L, & x = a, \end{cases}$$

zvezna v točki $a$. Po izreku o zveznosti zlepka je funkcija $\tilde{f}$ zvezna v točki $a$ natanko tedaj, ko sta funkciji

$$\tilde{f}^-(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D(f) \text{ in } x < a, \\ L, & x = a, \end{cases}$$

in

$$\tilde{f}^+(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D(f) \text{ in } x > a, \\ L, & x = a, \end{cases}$$

obe zvezni v točki $a$. Po definiciji leve in desne limite sta $\tilde{f}^-$ in $\tilde{f}^+$ zvezni v $a$ natanko tedaj, ko velja

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad \text{in} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

S tem je trditev dokazana. □

Kadar sta leva in desna limita funkcije $f$ v $a$ različni (in enolično določeni), pravimo, da ima funkcija $f$ **skok** v točki $a$.

Definicijo leve in desne limite lahko povemo tudi z zaporedji. Tako je

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = K$$

natanko tedaj, ko za vsako naraščajoče zaporedje $a_n$ v $D(f)\cap(-\infty, a)$, ki limitira proti $a$, zaporedje $f(a_n)$ limitira proti $K$. Podobno je

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

natanko tedaj, ko za vsako padajoče zaporedje $a_n$ v $D(f) \cap (a, +\infty)$, ki limitira proti $a$, zaporedje $f(a_n)$ limitira proti $L$.

Formulacija z zaporedji nam omogoča, da definicijo leve (pa tudi desne) limite razširimo tudi na primer, ko je $a \in \{-\infty, +\infty\}$ ali $K \in \{-\infty, +\infty\}$. Že prej smo namreč povedali, kdaj je limita zaporedja enaka $+\infty$ ali $-\infty$. Oglejmo si nekaj primerov.

**Primer.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ in $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

**Primer.** $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ in $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Kadar je $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ ali $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$, pravimo, da je premica $y = L$ **vodoravna asimptota** funkcije $f$. Kadar je $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ ali $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ ali $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ ali $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$, rečemo, da je premica $x = a$ **navpična asimptota** funkcije $f$.

## 3.10. Vprašanja za ponavljanje

(1) (Definicija zveznosti)
   (a) Kako si geometrijsko predstavljamo zveznost funkcije v točki?
   (b) Kako definiramo zveznost funkcije v točki s pomočjo limit zaporedij?
   (c) Kako definiramo zveznost funkcije v točki s pomočjo $\epsilon$ in $\delta$?

(2) (Operacije z zveznimi funkcijami)
   (a) Dokaži, da sta vsota in produkt zveznih funkcij zvezni funkciji!
   (b) Dokaži, da je kompozitum zveznih funkcij zvezna funkcija!
   (c) Ali je inverzna funkcija od zvezne injektivne funkcije vedno zvezna?

(3) (Metoda bisekcije)
   (a) Kaj pomeni, da ima funkcija $f(x)$ ničlo na intervalu $[a, b]$?
   (b) Opiši metodo bisekcije. Za kakšne funkcije deluje?
   (c) Poišči približek za ničlo enačbe $x^3+x-1=0$ na intervalu $[0, 1]$ s pomočjo treh korakov bisekcije!
(4) (Definicija limite)
   (a) Kako si limito funkcije v točki geometrijsko predstavljamo?
   (b) Kako definiramo limito funkcije s pomočjo zaporedij?
   (c) Kako definiramo limito funkcije s pomočjo $\epsilon$ in $\delta$?
(5) (Enoličnost limite)
   (a) Povej definicijo stekališča množice s pomočjo zaporedij!
   (b) Povej definicijo stekališča množice s pomočjo $\epsilon$ in $\delta$!
   (c) Kaj vemo o limiti funkcije $f$ v točki $a$, ki je stekališče množice $D(f)$?
   (d) Kaj vemo o limiti funkcije $f$ v točki $a$, ki ni stekališče množice $D(f)$?
(6) (Limite in neenakosti)
   (a) Naj bosta $f(x)$ in $g(x)$ taki funkciji, da velja $f(x) \leq g(x)$ za vsak $x$ blizu $a$. V kakšni zvezi sta potem limiti teh funkcij v točki $a$.
   (b) Kako izračunamo limito funkcije s pomočjo metode sendviča?
   (c) Uporabi metodo sendviča na konkretnem primeru!
(7) (Metoda substitucije)
   (a) Naj bo funkcija $f$ zvezna v točki $a$ in funkcija $g$ zvezna v točki $b = f(a)$. Dokaži, da je potem funkcija $g \circ f$ zvezna v točki $a$!
   (b) Naj bo $\lim_{x \to a} f(x) = b$ in naj bo funkcija $g$ zvezna v točki $b$. Dokaži, da potem velja $\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(b)$!
   (c) Naj bo $\lim_{x \to a} f(x) = b$ in $\lim_{x \to b} g(x) = c$. Ali potem vedno velja, da je $\lim_{x \to a} g(f(x)) = c$?
(8) (Neskončne limite in limite v neskončnosti)
   (a) Kaj pomeni, da je limita funkcije v končni točki neskončna? Napiši definicijo!
   (b) Kakšna je zveza med neskončnimi limitami v končnih točkah in navpičnimi asimptotami?
   (c) Kaj pomeni, da je limita funkcije v neskončni točki končna? Napiši definicijo!

(d) Kakšna je zveza med končnimi limitami v neskončnih točkah in vodoravnimi asimptotami?

(9) (Enostranske limite in zlepki) Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x < a, \\ b, & x = a, \\ h(x), & x > a. \end{cases}$$

(a) Kako je definirana leva limita funkcije $f$ v točki $a$? Kaj pa desna?

(b) Kako s pomočjo leve in desne limite ugotovimo, ali ima funkcija $f$ limito v točki $a$?

(c) Kako s pomočjo leve in desne limite ugotovimo, ali je funkcija $f$ zvezna v točki $a$?

(10) (Strogo monotone funkcije)

(a) Povej definicijo strogo monotone funkcije! Pokaži, da je vsaka strogo monotona funkcija injektivna!

(b) Pokaži, da ima vsaka strogo monotona funkcija tako levo kot desno limito v vsaki točki, kjer je definirana!

(c) Ali je vsaka zvezna injektivna funkcija strogo monotona?

# Del 2

# Odvodi

POGLAVJE 4

# Osnovne lastnosti odvoda

## 4.1. Definicija odvoda

**Odvod funkcije $f$ v točki $x$** je definiran z

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Ta definicija je smiselna samo v primeru, ko

- $x \in D(f)$,
- limita na desni strani obstaja in
- točka $x$ je stekališče množice $D(f)$ ($\Leftrightarrow$ limita je enolična).

Kadar so ti trije pogoji izpolnjeni, pravimo, da je **funkcija $f$ odvedljiva v točki $x$.** Funkciji $f'$, ki je definirana z

$$f' \colon x \mapsto f'(x), \quad D(f') = \{x \colon f \text{ je odvedljiva v } x\}$$

pravimo **odvod funkcije $f$** .

**Primer.** Če je $f$ konstantna funkcija, potem je

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0,$$

torej je $f'$ ničelna funkcija.

**Primer.** Če je $f$ identična funkcija, potem je

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1,$$

torej je $f'$ enična funkcija.

**Primer.** Če je $f(x) = x^2$, potem je

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = 2x.$$

Če v definiciji odvoda $f'(x)$ nadomestimo navadno limito z levo ali desno limito, dobimo **levi odvod $f'_-(x)$** in **desni odvod $f'_+(x)$.**

**Primer.** Izračunajmo levi in desni odvod funkcije $f(x) = |x|$ v točki 0.

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1.$$

Ker se ti limiti razlikujeta, limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{|h| - |0|}{h}$$

ne obstaja, torej funkcija $f$ ni odvedljiva v točki 0. Po drugi strani, za vsak $x \neq 0$ velja

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ -1, & x > 0, \end{cases}$$

torej je funkcija $f$ odvedljiva v vsaki neničelni točki.

Absolutna vrednost je primer funkcije, ki je zvezna v točki 0, ni pa odvedljiva v točki 0. Torej iz zveznosti v točki ne sledi nujno odvedljivost v točki. Pač pa velja obratno.

**Trditev. Če je funkcija $f$ odvedljiva v točki $a$, potem je tudi zvezna v točki $a$.**

Dokaz: Ker je funkcija $f$ odvedljiva v točki $a$, velja

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left[ f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) \right] =$$

$$= \lim_{x \to a} f(a) + \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \to a}(x - a) = f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a).$$

Po definiciji limite odtod sledi, da je funkcija $f$ zvezna v točki $a$. □

## 4.2. Odvod eksponentne funkcije in funkcije sinus

Izračunajmo najprej odvod eksponentne funkcije v točki 0. Velja

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Dokaz: Dokažimo najprej, da za vsak $h \in \mathbb{R}$, ki zadošča $|h| \leq 1$, velja $|\frac{e^h - 1}{h} - 1| \leq |h|$. Naj bo $a_n = \left(1 + \frac{h}{n}\right)^n$. Iz binomske formule sledi, da velja $a_n = 1 + h + h^2 c_n$, kjer je $c_n = \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{h}{n^3} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{h^{n-2}}{n^n}$. Ker je $|h| \leq 1$, lahko ocenimo $|c_n| \leq \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{n} \leq 1$. Torej iz $|h| \leq 1$ sledi, da za vsak $n$ velja $|a_n - 1 - h| = |c_n||h|^2 \leq |h|^2$. Ko delimo s $|h|$ in limitiramo, dobimo željeni rezultat.

Dokažimo sedaj, da je $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$. Vzemimo poljuben $\epsilon > 0$ in postavimo $\delta = \min\{1, \epsilon\}$. Potem za vsak $h \neq 0$, ki zadošča $|h| < \delta$ velja $|\frac{e^h-1}{h} - 1| \leq |h| < \epsilon$. Pri prvem neenačaju smo upoštevali, da je $|h| < 1$, torej velja ocena iz prvega odstavka. $\square$

**Trditev. Za eksponentno funkcijo velja $\exp' = \exp$.**

Dokaz: Naj bo $f(x) = e^x$. Potem je

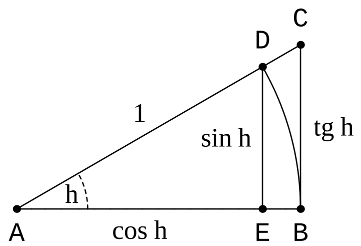
$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

za vsako število $x \in \mathbb{R}$. Torej je $f' = f$. $\square$

Izračunajmo še odvod funkcije sinus v točki 0. Velja

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1.$$

Dokaz: Naj bo $ABC$ trikotnik, ki ima pri $A$ kot $h$, pri $B$ pravi kot in pri katerem je dolžina stranice $AB$ enaka 1. Krog s središčem v $A$ in polmerom 1 seka daljico $AC$ v točki $D$. Naj bo $E$ pravokotna projekcija točke $D$ na daljico $AB$.




Ker je trikotnik $ADE$ vsebovan v izseku $BAD$, ta pa v trikotniku $ABC$, je $\mathrm{pl}(\triangle ADE) \leq \mathrm{pl}(\angle BAD) \leq \mathrm{pl}(\triangle ABC)$. Upoštevamo, da je

$$\mathrm{pl}(\triangle ADE) = \frac{\sin h \cos h}{2}, \quad \mathrm{pl}(\angle BAD) = \frac{h}{2} \quad \text{in} \quad \mathrm{pl}(\triangle ABC) = \frac{\operatorname{tg} h}{2},$$

pa po množenju z 2 dobimo neenakosti

$$\sin h \cos h \leq h \leq \operatorname{tg} h,$$

ki veljata za vsak $h \in (0, \frac{\pi}{2})$. Odtod dobimo, da za vsak $h$ velja

$$\cos h \leq \frac{\sin h}{h} \leq \frac{1}{\cos h}.$$

Uporabimo sedaj metodo sendviča. Ker je

$$\lim_{h\to 0}\cos h = 1 \quad \text{in} \quad \lim_{h\to 1}\frac{1}{\cos h} = 1,$$

velja, da je tudi iskana limita enaka 1. □

**Trditev. Za funkciji sinus in kosinus velja $\sin' = \cos$ in $\cos' = -\sin$.**

Dokaz: Naj bo $f(x) = \sin x$. Potem je

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}.$$

Če v formulo $\sin u - \sin v = 2\sin\frac{u-v}{2}\cos\frac{u+v}{2}$ vstavimo $u = x + h$ in $v = x$, dobimo, da je $\sin(x+h) - \sin(x) = 2\sin\frac{h}{2}\cos(x+\frac{h}{2})$. Torej je

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos(x+\frac{h}{2})}{h}.$$

Napravimo zamenjavo $t = \frac{h}{2}$, da dobimo

$$f'(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t\cos(x+t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \lim_{t\to 0} \cos(x+t).$$

Ker je kosinus zvezna funkcija, je

$$\lim_{t\to 0} \cos(x+t) = \cos x,$$

tako da lahko zaključimo

$$f'(x) = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

Torej je $\sin' = \cos$. Podobno bi dokazali, da je $\cos' = -\sin$. □

## 4.3. Pravila za odvajanje

Kako izrazimo odvode funkcij $f+g$, $f-g$, $fg$ in $f/g$ s pomočjo odvodov funkcij $f$ in $g$? Odgovor nam dajejo naslednje formule:

$$\boldsymbol{(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (fg)' = f'g + fg' \quad \text{in} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.}$$

Dokaz: Dokažimo formulo za odvajanje produkta. Pri ostalih je dokaz podoben. Predpostavimo, da sta $f$ in $g$ odvedljivi v točki $x$. Potem je

$$\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \tfrac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \tfrac{(f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \tfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \lim_{h\to 0} g(x+h) + f(x) \lim_{h\to 0} \tfrac{g(x+h) - g(x)}{h} = \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).
\end{aligned}$$

Pri zadnjem koraku smu upoštevali, da iz odvedljivosti funkcije $g$ v $x$ sledi zveznost $g$ v $x$, torej je $\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$. $\square$

**Primer.** Odvod funkcije $\operatorname{tg} x$ je

$$\operatorname{tg}'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{(\cos x)^2} =$$
$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2}.$$

Pogosto potrebujemo formulo za odvod kompozituma:

$$\boxed{\boldsymbol{(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'}}$$

Dokaz: Predpostavimo, da je $f$ odvedljiva v $x$ in $g$ odvedljiva v $f(x)$. Velja

$$(g \circ f)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(g\circ f)(x+h) - (g\circ f)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h}.$$

Funkcija

$$\omega(t) = \begin{cases} \frac{g(t)-g(f(x))}{t-f(x)}, & t \neq f(x), \\ g'(f(x)), & t = f(x) \end{cases}$$

za vsak $h$ zadošča zvezi

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \omega(f(x+h))\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Ker je $\lim_{t\to f(x)} \omega(t) = g'(f(x)) = \omega(f(x))$, je funkcija $\omega(t)$ zvezna v točki $t = f(x)$. Odtod sledi, da je

$$(g\circ f)'(x) = \lim_{h\to 0} \omega(f(x+h)) \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$$
$$= \omega(\lim_{h\to 0} f(x+h))f'(x) = \omega(f(x))f'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Če sta $f$ in $g$ odvedljivi, velja ta formula za vsak $x \in D(g\circ f)$, torej je $g\circ f$ odvedljiva in $(g\circ f)' = (g'\circ f)\cdot f'$. $\square$

**Primer.** Izračunajmo odvod funkcije $h(x) = \sin(x^2)$. Naj bo $f(x) = x^2$ in $g(x) = \sin x$. Vemo, da je $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$. Ker je $g'(x) = \cos x$ in $f'(x) = 2x$, je $h'(x) = \cos(x^2)\cdot 2x$.

Preostane še formula za odvod inverzne funkcije:

$$\boxed{\boldsymbol{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.}}$$

Dokaz: Privzemimo, da je $f$ injektivna in pišimo $g = f^{-1}$. Naj bo $a \in D(f')$ takšno število, da velja $f'(a) \neq 0$ in pišimo $b = f(a)$. Potem je

$$g'(b) = \lim_{t\to b} \frac{g(t) - g(b)}{t - b} = \lim_{t\to b} \frac{g(t) - g(b)}{f(g(t)) - f(g(b))}.$$

Ker je $g$ tudi injektivna, velja $g(t) \neq g(b)$ za vsak $t \neq b$. V zadnji limiti torej lahko napravimo zamenjavo $x = g(t)$, da dobimo.

$$\lim_{t\to b} \frac{g(t) - g(b)}{f(g(t)) - f(g(b))} = \lim_{x\to g(b)} \frac{x - g(b)}{f(x) - f(g(b))} = \frac{1}{f'(g(b))}.$$

Upoštevali smo, da je $f'(g(b)) = f'(a) \neq 0$. □

Oglejmo si nekaj primerov.

**Primer.** Vzemimo poljubno naravno število $n$. Pišimo $f_n(x) = x^n$ in $g_n(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$. Pokažimo najprej z indunkcijo po $n$, da velja

$$f_n'(x) = nx^{n-1}$$

za vsak $x$. Vemo že, da to velja za $n = 1$. Če formula velja za $n - 1$, potem iz $f_n = f_{n-1}f_1$ in pravila za odvajanje produkta sledi $f_n'(x) = f_{n-1}'(x)f_1(x) + f_{n-1}(x)f_1'(x) = (n-1)x^{n-2} \cdot x + x^{n-1} \cdot 1 = nx^{n-1}$. Torej formula velja tudi za $n$. Sedaj lahko izračunamo tudi $g_n'$:

$$g_n'(x) = \frac{1}{f_n'(g_n(x))} = \frac{1}{ng_n(x)^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Uporabili smo formulo za odvod inverzne funkcije in formulo za odvod funkcije $f_n$.

**Primer.** Vzemimo $f(x) = e^x$ in $g(x) = \ln x$. Velja

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{f(g(x))} = \frac{1}{x}.$$

Uporabili smo formulo za odvod inverzne funkcije in formulo za odvod eksponentne funkcije.

**Primer.** Vzemimo $f(x) = \sin x$ in $g(x) = \arcsin x$. Ker je $f'(x) = \cos x = \sqrt{1 - (\sin x)^2}$, velja

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\cos g(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin g(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Sedaj vemo, da so odvodi vseh osnovnih elementarnih funkcij elementarne funkcije. Iz formul za odvajanje vsote, razlike, produkta, količnika in kompozituma dveh funkcij sledi, da je tudi odvod vsake elementarne funkcije elementarna funkcija.

Sestavimo tabelo osnovnih odvodov.

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $g(x)$ | $g'(x)$ |
|---|---|---|---|
| $x^2$ | $2x$ | $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $x^m$ | $mx^{m-1}$ | $x^{\frac{1}{m}}$ | $\frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\mathrm{tg}\, x$ | $\frac{1}{(\cos x)^2}$ | $\mathrm{arctg}\, x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| $\mathrm{sh}\, x$ | $\mathrm{ch}\, x$ | $\mathrm{arsh}\, x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ |
| $\mathrm{ch}\, x$ | $\mathrm{sh}\, x$ | $\mathrm{arch}\, x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |
| $\mathrm{th}\, x$ | $\frac{1}{(\mathrm{ch}\, x)^2}$ | $\mathrm{arth}\, x$ | $\frac{1}{1-x^2}$ |

## 4.4. Geometrijski pomen odvoda in uporaba v fiziki

Izrazu $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ pravimo **diferenčni količnik** funkcije $f$ v točki $a$. Oglejmo si najprej uporabo diferenčnega količnika in odvoda v geometriji. Premici, ki gre skozi dve različni točki na grafu dane funkcije $f$, pravimo **sekanta** grafa funkcije $f$. Poiščimo enačbo sekante skozi točki $(a, f(a))$ in $(a, f(a+h))$. Kot vsaka druga premica, ima tudi sekanta enačbo

$$y = kx + n,$$

kjer moramo $k$ in $n$ še poiskati. Ker gre premica $y = kx+n$ skozi točki $(a, f(a))$ in $(a+h, f(a+h))$, velja $f(a) = ka+n$ in $f(a+h) = k(a+h)+n$. Ko enačbi odštejemo, dobimo $f(a+h) - f(a) = kh$, torej je

$$k = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Iz prve enačbe sedaj dobimo

$$n = f(a) - ka = f(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h}a.$$

Se pravi, da je enačba sekante

$$y = f(a) + \frac{f(a+h) - f(a)}{h}(x - a).$$

Ko se $h$ približuje 0, se točka $(a+h, f(a+h))$ približuje točki $(a, f(a))$, sekanta skozi ti dve točki pa postaja podobna neki premici, ki ji pravimo **tangenta** na graf funkcije $f$ v točki $(a, f(a))$. Se pravi

$$y = \lim_{h\to 0} \left[f(a) + \frac{f(a+h) - f(a)}{h}(x-a)\right] = f(a) + f'(a)(x-a).$$

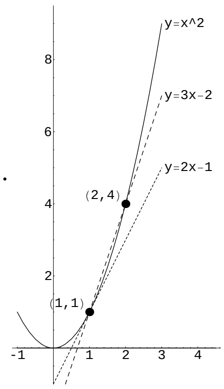
Smerni koeficient sekante je torej enak diferenčnemu količniku, smerni koeficient tangente pa odvodu funkcije $f$ v točki $a$.

**Primer.** Enačba sekante na graf funkcije $f(x) = x^2$, ki gre skozi točki $(1, f(1))$ in $(2, f(2))$, je

$$y = f(1) + \frac{f(2) - f(1)}{2-1}(x-1) = 1 + 3(x-1) = 3x-2.$$

Enačba tangente na graf funkcije $f(x) = x^2$ v točki $(1, f(1))$ je

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) = 1 + 2(x-1) = 2x-1.$$




Če ima funkcija $f$ v točki $a$ tako levi kot desni odvod, vendar sta različna, potem pravimo, da ima $f$ **koleno** v točki $a$. Premici $y = f(a) + f'_-(a)(x-a)$ in $y = f(a) + f'_+(a)(x-a)$ sta **leva** oziroma **desna tangenta** funkcije $f$ v $a$.

**Normala** na graf funkcije $f$ v točki $(a, f(a))$ je premica, ki gre skozi točko $(a, f(a))$ in je pravokotna na tangento. Poiščimo njeno enačbo. Predpostavimo, da niti tangenta niti normala ni navpična. Potem sta kota $\phi_1$ in $\phi_2$, ki ju tangenta in normala oklepata z abscisno osjo, strogo med $-\frac{\pi}{2}$ in $\frac{\pi}{2}$. To pomeni, da je $\cos\phi_1 \neq 0$ in $\cos\phi_2 \neq 0$. Ker sta tangenta in normala pravokotni, je $\phi_2 - \phi_1 = \pm\frac{\pi}{2}$, zato je $\cos(\phi_2 - \phi_1) = 0$. Označimo s $k_1 = \operatorname{tg}\phi_1 = f'(a)$ smerni koeficient tangente, s $k_2 = \operatorname{tg}\phi_2$ pa smerni koeficient normale. Velja

$$\begin{aligned}(1 + k_1k_2)\cos\phi_1\cos\phi_2 &= (1 + \operatorname{tg}\phi_1\operatorname{tg}\phi_2)\cos\phi_1\cos\phi_2 = \\ &= \cos\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_1\sin\phi_2 = \cos(\phi_2 - \phi_1) = 0,\end{aligned}$$

torej je $1 + k_1k_2 = 0$. Odtod sledi $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{f'(a)}$. Enačba normale na graf funkcije $f$ v točki $(a, f(a))$ je torej

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x-a).$$

Poglejmo dva primera uporabe diferenčnega količnika in odvoda v fiziki.

**Primer.** Recimo, da se točka giblje po realni osi in da je njena lega v trenutku $t$ enaka $s(t)$. Med trenutkoma $t$ in $t+\Delta t$ je točka prepotovala razdaljo $\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$. Njena **povprečna hitrost** v tem času je torej enaka

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

**Trenutno hitrost** točke v trenutku $t$ pa definiramo kot limito

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t).$$

Trenutna hitrost v trenutku $t$ je torej odvod funkcije $s$ v točki $t$, povprečna hitrost med trenutkoma $t$ in $t+\Delta t$ pa je diferenčni količnik funkcije $s$ v točki $t$.

**Primer.** Točka se giblje po realni osi tako, da je njena trenutna hitrost v trenutku $t$ enaka $v(t)$. **Povprečni pospešek** točke med trenutkoma $t$ in $t + \Delta t$ je

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t},$$

**trenutni pospešek** točke v trenutku $t$ pa je enak

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t).$$

## 4.5. Upognjenost grafa funkcije

Če odvod funkcije $f$ še enkrat odvajamo, dobimo **drugi odvod** funkcije $f$; označimo ga z $f''$. Velja torej $f'' = (f')'$. Vrednost drugega odvoda funkcije $f$ v točki $a$ je

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}.$$

Pravimo, da je funkcija $f$ **dvakrat odvedljiva**, če velja $D(f'') = D(f)$.

Podobno definiramo tudi tretji, četrti in višje odvode, če je funkcija trikrat, štirikrat oziroma večkrat odvedljiva.

**Primer.** Recimo, da se točka giblje po realni osi tako, da je v trenutku $t$ njena lega enaka $s(t)$, trenutna hitrost $v(t)$ in trenutni pospešek $a(t)$. Iz prejšnjega razdelka vemo, da je v vsakem trenutku $a(t) = v'(t)$ in $v(t) = s'(t)$. Torej je v vsakem trenutku $a(t) = s''(t)$.

S pomočjo drugega odvoda lahko poiščemo krožnico, ki se najbolje prilega grafu funkcije $f$ v točki $(a, f(a))$. Poglejmo, kako določimo središče te krožnice in njen polmer, ki mu pravimo tudi **krivinski polmer** funkcije $f$ v $a$.

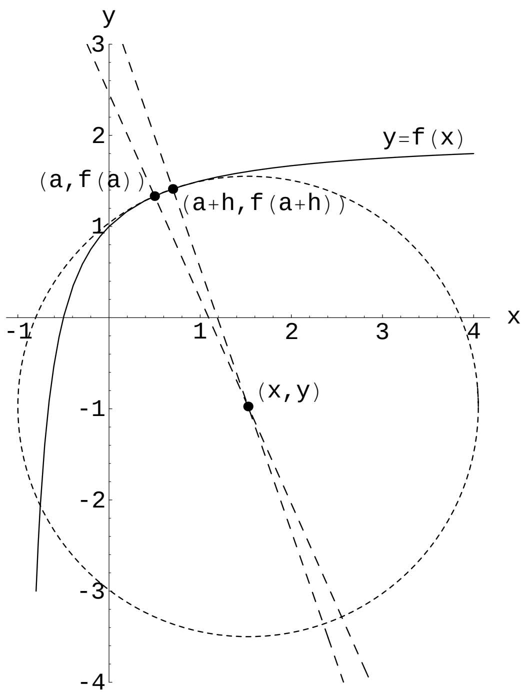
Enačba normale na graf funkcije $f$ v točki $(a, f(a))$ je

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a).$$

Zapišimo še enačbo normale v bližnji točki $(a+h, f(a+h))$:

$$y = f(a+h) - \frac{1}{f'(a+h)}(x - a - h).$$

Izračunajmo presek teh normal in limitirajmo $h$ proti 0. Dobljeni rezultat je ravno središče pritisnjene krožnice.




Ko enačbi obeh normal izenačimo, dobimo

$$x - a = \frac{f(a+h) - f(a) + \frac{h}{f'(a+h)}}{\frac{1}{f'(a+h)} - \frac{1}{f'(a)}}.$$

Zdaj ulomek razširimo z $\frac{f'(a+h)f'(a)}{h}$:

$$x - a = \frac{f'(a+h)f'(a)\frac{f(a+h)-f(a)}{h} + f'(a)}{-\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}}.$$

V limiti, ko gre $h$ proti 0, dobimo

$$x - a = \frac{f'(a)^3 + f'(a)}{-f''(a)}.$$

Sedaj iz enačbe prve normale sledi

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a) = \frac{f'(a)^2+1}{f''(a)}.$$

Središče pritisnjene krožnice na graf funkcije $f$ v točki $(a, f(a))$ je torej točka s koordinatama

$$x = a - \frac{f'(a)(f'(a)^2+1)}{f''(a)} \quad \text{in} \quad y = f(a) + \frac{f'(a)^2+1}{f''(a)}.$$

Njen polmer pa dobimo s pomočjo Pitagorovega izreka:

$$R^2 = (x-a)^2 + (y - f(a))^2 = \frac{(f'(a)^2+1)^3}{f''(a)^2}.$$

Ugotovili smo torej, da je polmer pritisnjene krožnice na graf funkcije $f$ v točki $(a, f(a))$ dan z

$$R = \frac{(f'(a)^2+1)^{3/2}}{|f''(a)|}.$$

Če je $f''(a) = 0$, je $R = +\infty$. Da se izognemo temu problemu, raje izračunamo število

$$\kappa = \frac{f''(a)}{(f'(a)^2+1)^{3/2}} = \pm\frac{1}{R},$$

ki pa je vedno končno. Temu številu pravimo **upognjenost** grafa funkcije $f$ v točki $(a, f(a))$. Ekvivalentne so naslednje trditve:

- $\kappa > 0$, kjer je $\kappa$ ukrivljenost $f$ v $a$,
- $f''(a) > 0$,
- središče pritisnjene krožnice leži nad grafom funkcije.

To nam daje slutiti, da je v primeru, ko velja ena od teh treh ekvivalentnih lastnosti, graf funkcije $f$ upognjen navzgor. Podrobno se bomo s upognenostjo navzgor in navzdol ukvarjali v razdelku o konveksnih in konkavnih funkcijah.

## 4.6. Obstoj globalnih ekstremov

V tem razdelku nas bodo zanimale zvezne funkcije, katerih definicijsko območje je zaprt interval. Pokazali bomo, da je taka funkcija vedno omejena, da v neki točki zavzame največjo vrednost in da v neki točki zavzame najmanjšo vrednost. Kako poiščemo take točke, bomo zvedeli šele v naslednjem razdelku.

**Trditev. Vsaka zvezna funkcija, katere definicijsko območje je zaprt interval, je omejena.**

Dokaz: Naj bo $f$ taka zvezna funkcija, da je $D(f) = [a, b]$. Če funkcija $f$ ne bi bila navzgor omejena, potem bi za vsako naravno število $n$ obstajal tak $c_n \in [a, b]$, da bi veljalo $f(c_n) > n$. Ker je zaporedje $c_n$ omejeno, ima konvergentno podzaporedje $d_n = c_{\phi_n}$. Pišimo $d = \lim_{n\to\infty} d_n$. Ker je funkcija $f$ zvezna v $d$, velja $\lim_{n\to\infty} f(d_n) = f(d)$. Če vzamemo $\epsilon = 1$, potem obstaja tak $n_0$, da za $n \geq n_0$ velja $f(d) - 1 < f(d_n) < f(d) + 1$. Odtod in iz $f(d_n) = f(c_{\phi_n}) > \phi_n$ sledi, da je $\phi_n < f(d) + 1$ za vsak $n$, kar je protislovje s predpostavko, da je $\phi_n$ strogo naraščajoče. Podobno dokažemo, da je funkcija $f$ navzdol omejena, lahko pa uporabimo tudi dejstvo, da je po gornjem funkcija $-f$ navzgor omejena, saj je $-f$ zvezna in $D(-f) = [a, b]$. □

Predpostavka, da je $D(f)$ *zaprt* interval je bistvena.

**Primer.** Glavna veja funkcije tangens je zvezna, vendar ni niti navzgor niti navzdol omejena.

**Trditev. Vsaka zvezna funkcija, katere definicijsko območje je zaprt interval, zavzame v neki točki največjo vrednost.**

Dokaz: Naj bo $f$ taka zvezna funkcija, da velja $D(f) = [a, b]$. Dokazali smo, da je množica $Z(f)$ navzgor omejena, torej ima po Dedekindovi lastnosti supremum $M = \sup Z(f)$. Število $M - \frac{1}{n}$ ni zgornja meja množice $Z(f)$ za nobeno naravno število $n$. Obstaja torej tako zaporedje $c_n \in [a, b]$, da velja $f(c_n) > M - \frac{1}{n}$ za vsak $n$. Ker je zaporedje $c_n$ omejeno, ima konvergentno podzaporedje $d_n = c_{\phi_n}$. Pišimo $d = \lim_{n\to\infty} d_n$. Trdimo, da funkcija $f$ v točki $d$ zavzame vrednost $M$. Po metodi senviča iz $M \geq f(d_n) > M - \frac{1}{\phi_n}$ sledi, da je $\lim_{n\to\infty} f(d_n) = M$. Ker je funkcija $f$ zvezna v $d$, velja $\lim f(d_n) = f(d)$. Torej je $f(d) = M$. □

Če je število $M$ največja vrednost funkcije $-f$ na intervalu $[a, b]$, je število $-M$ najmanjša vrednost funkcije $f$ na tem intervalu. Velja torej naslednja trditev.

**Trditev. Vsaka zvezna funkcija, katere definicijsko območje je zaprt interval, zavzame v neki točki najmanjšo vrednost.**

Točka $(c, f(c))$ je **globalni maksimum** funkcije $f$, če za vsak $x \in D(f)$ velja $f(x) \leq f(c)$. Podobno je točka $(c, f(c))$ **globalni minimum** funkcije $f$, če za vsak $x \in D(f)$ velja $f(x) \leq f(c)$. Skupno ime za globalni minimum in globalni maksimum je **globalni ekstrem**. Zgoraj smo dokazali, da ima vsaka zvezna funkcija na zaprtem intervalu vsaj en globalni maksimum in vsaj en globalni minimum, lahko pa se zgodi, da ima funkcija več globalnih maksimumov in več globalnih minimumov.

**Primer.** Funkcija $f\colon x \mapsto (x^2-1)^2$, $D(f)=[-2,2]$, zadošča $9 \geq f(x) \geq 0$ pri vsakem $x \in D(f)$. Enačba $f(x)=0$ ima dve rešitvi, $-1$ in 1. Torej ima funkcija $f$ dva globalna minimuma, $(-1,0)$ in $(1,0)$. Tudi enačba $f(x)=9$ ima dve rešitvi, $-2$ in 2. Zato ima funkcija $f$ dva globalna maksimuma, $(-2,9)$ in $(2,9)$.

Na *odprtem* intervalu je zvezna funkcija lahko neomejena, kar pomeni, da nima nujno globalnih ekstremov, pa tudi kadar je omejena ni nujno da jih ima.

**Primer.** Za funkcijo $f\colon x \mapsto x^3$, $D(f)=(-1,1)$, velja $\sup Z(f)=1$ in $\inf Z(f)=1$. Vendar $\max Z(f)$ in $\min Z(f)$ ne obstajata. Zato funkcija $f$ nima nobenega globalnega minimuma in nobenega globalnega maksimuma.

## 4.7. Potrebni pogoj za lokalni ekstrem

Točka $(c, f(c))$ je **lokalni maksimum**, če obstaja tak $\delta > 0$, da velja $f(x) \leq f(c)$ za vsak $x \in D(f) \cap O(c,\delta)$. Geometrijsko to pomeni, da je točka $(c, f(c))$ globalni maksimum skrčitve $f|_{O(c,\delta)}$. Podobno je z lokalnimi minimumi. Lokalnim maksimumom in lokalnim minimumom pravimo z eno besedo **lokalni ekstremi**. Vsak globalni ekstrem funkcije $f$ je tudi lokalni ekstrem, obratno pa običajno ni res.

Glavni rezultat tega razdelka je Fermatov izrek.

**Fermatov izrek. Če je funkcija $f$ definirana in odvedljiva v vsaki točki iz odprtega intervala $(a,b)$ in zavzame lokalni ekstrem v točki $c \in (a,b)$, potem je $f'(c)=0$.**

Dokaz: Če funkcija $f$ v točki $c$ zavzame lokalni maksimum, potem obstaja tak $\delta > 0$, da velja $f(x) \leq f(c)$ za vsak $x \in (c-\delta, c+\delta)$. Vzemimo poljubno zaporedje $a_n$ v $(c-\delta, c)$, ki limitira proti $c$. Za vsak $n$ velja $a_n - c < 0$ in $f(a_n) - f(c) \leq 0$, torej je $\frac{f(a_n)-f(c)}{a_n-c} \geq 0$. Odtod sledi, da je $f'(c) = \lim \frac{f(a_n)-f(c)}{a_n-c} \geq 0$. Vzemimo sedaj poljubno zaporedje $b_n$ v $(c, c+\delta)$, ki limitira proti $c$. Za vsak $n$ velja $b_n - c > 0$ in $f(b_n) - f(c) \leq 0$, tako da je $\frac{f(b_n)-f(c)}{b_n-c} \leq 0$. Odtod sledi, da je $f'(c) = \lim \frac{f(b_n)-f(c)}{b_n-c} \leq 0$. Zaradi $f'(c) \geq 0$ in $f'(c) \leq 0$ mora veljati $f'(c)=0$. $\square$

Obrat Fermatovega izreka ne drži. Ničle funkcije $f'$ niso nujno lokalni ekstremi funkcije $f$, kot pokaže naslednji primer.

**Primer.** Vzemimo $f(x) = x^3$ in $c = 0$. Potem je $f'(c) = 0$, vendar $f$ ne zavzame lokalnega ekstrema v točki $c$, saj je levo od $c$ pozitivna, desno od $c$ pa negativna.

Kako bi za dano funkcijo $f$ poiskali vse njene lokalne (in globalne) ekstreme? Metoda, ki jo bomo skicirali, deluje za odvedljive funkcije na zaprtem intervalu.

(1) Najprej preveri, če $f$ res zadošča gornjim predpostavkam in izračunaj $f'$.
(2) Določi kandidatke za lokalni ekstrem. To so rešitve enačbe $f'(x) = 0$ skupaj z robnima točkama intervala.
(3) Izračunaj vrednost $f$ v vsaki kandidatki. V tisti, kjer je vrednost največja, zavzame $f$ globalni maksimum, kjer je vrednost najmanjša pa globalni minimum.
(4) Kasneje bomo spoznali dve metodi, tako imenovani **prvi** in **drugi zadostni pogoj za lokalni ekstrem**, s katerima lahko za skoraj vsako kandidatko ugotovimo ali $f$ v njej zavzame lokalni ekstrem ali ne.

**Primer.** Določi globalne ekstrem funkcije
$$f(x) = 2x^2 - x^4, \quad x \in [-2, 2].$$
Najprej določimo kandidatke za lokalni ekstrem. Ker je $f'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1 - x^2)$, so rešitve enačbe $f'(x) = 0$ točke $x = -1$, $x = 0$ in $x = 1$. Poleg teh treh točk, sta kandidatki še robni točki $x = -2$ in $x = 2$. V vsaki od teh petih kandidatk izračunajmo vrednost funkcije $f$:

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-8$ | $1$ | $0$ | $1$ | $-8$ |

Najmanjša vrednost v spodnji vrstici je $-8$, torej $f$ zavzame globalni minimum v $x = -2$ in $x = 2$. Največja vrednost v spodnji vrstici je 1, zato $f$ zavzame globalni maksimum v $x = -1$ in $x = 1$.

### 4.8. Vprašanja za ponavljanje

(1) (Definicija odvoda)
  (a) Kako je definiran odvod funkcije v točki?
  (b) Dokaži, da iz odvedljivosti sledi zveznost!
  (c) S primerom pokaži, da funkcija, ki je zvezna v neki točki, ni nujno tudi odvedljiva v tej točki!
(2) (Pravila za odvajanje)
  (a) Formuliraj pravili za odvajanje vsote in razlike. Enega dokaži!

   (b) Formuliraj pravili za odvajanje produkta in količnika. Enega dokaži!
   (c) Napiši pravili za odvajanje kompozituma in inverzne funkcije. Enega dokaži!

(3) (Geometrijski in fizikalni pomen odvoda)
   (a) Kako izračunamo povprečno hitrost?
   (b) Kako izračunamo trenutno hitrost?
   (c) Kako se glasi enačba sekante?
   (d) Kako se glasi enačba tangente?

(4) (Krivinski polmer)
   (a) Kako izračunamo normalo na graf funkcije $f$ v točki $(a, f(a))$?
   (b) Kako izračunamo središče krožnice, ki se v točki $(a, f(a))$ najbolje prilega grafu funkcije $f$?
   (c) Izpelji formulo za krivinski polmer funkcije $f$ v točki $a$!

(5) (Globalni ekstremi)
   (a) Povej definicijo globalnega ekstrema funkcije!
   (b) Formuliraj izrek, ki zagotavlja obstoj globalnih ekstremov!
   (c) Kako določimo kandidate za globalni ekstrem?
   (d) Kako ugotovimo, kateri od kandidatov je zares globalni ekstrem?

(6) (Lokalni ekstremi)
   (a) Povej definicijo lokalnega ekstrema funkcije!
   (b) Kakšna je zveza med lokalnimi in globalnimi ekstremi funkcije?
   (c) Formuliraj potrebni pogoj za nastop ekstrema!
   (d) S primerom pokaži, da potrebni pogoj za nastop lokalnega ekstrema ni tudi zadosten!

POGLAVJE 5

# Načrtovanje grafov funkcij

## 5.1. Rolleov in Lagrangeov izrek

Rolleov izrek je pomožni izrek, s katerim dokažemo tri pomembne izreke:

- **Lagrangeov izrek**, ki nam bo pomagal poiskati zvezo med lastnostmi odvoda $f'$ in lastnostmi grafa funkcije $f$,
- **Cauchyjev izrek**, ki nam bo pomagal dokazati L'Hospitalovo pravilo za računanje limit in
- **Taylorjev izrek**, ki je posplošitev Langrangeovega.

**Rolleov izrek. Če je funkcija $f$ definirana na $[a, b]$, zvezna v $a$ in $b$, odvedljiva v vsaki točki iz $(a, b)$ in če velja $f(a) = f(b)$, potem obstaja taka točka $c \in (a, b)$, da je $f'(c) = 0$.**

Dokaz: Glavni sestavini dokaza sta Fermatov izrek, ki daje potrebni pogoj za lokalni ekstrem, in izrek o obstoju globalnih ekstremov zveznih funkcij na zaprtem intervalu. Vzemimo poljubno funkcijo $f$, ki zadošča predpostavkam izreka. Potem je $f$ zvezna v vsaki točki zaprtega intervala $[a, b]$. Za robni točki smo to predpostavili, za notranje točke pa to sledi iz odvedljivosti. Po izreku o obstoju globalnih ektremov zavzame $f$ globalni minimum v neki točki $x_1 \in [a, b]$ in globalni maksimum v neki točki $x_2 \in [a, b]$. Če $x_1$ leži v odprtem intervalu $(a, b)$, potem po Fermatovem izreku velja $f'(x_1) = 0$, tako da za iskani $c$ lahko vzamemo $x_1$. Podobno lahko vzamemo $c = x_2$, če $x_2 \in (a, b)$. Ostane še primer, ko sta $x_1$ in $x_2$ robni točki intervala $[a, b]$. Iz predpostavke $f(a) = f(b)$ potem sledi, da je $f(x_1) = f(x_2)$. Po definiciji globalnih ekstremov je $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ za vsak $x \in [a, b]$. Ker je $f(x_1) = f(x_2)$, odtod sledi, da je $f(x)$ konstantna funkcija. V tem primeru lahko torej za $c$ vzamemo katerokoli točko iz $(a, b)$, recimo $c = \frac{a+b}{2}$. □

Geometrijsko si vsebino Rolleovega izreka predstavljamo takole. Vzemimo funkcijo $f$, katere graf je nad intervalom $[a, b]$ nepretrgan in nezlomljen in ki je v krajiščih $a$ in $b$ enako visoko. Potem iz velike globine dvigamo vodoravno premico, dokler ne zadane grafa. Če zadane graf v kaki nerobni točki $(x_1, f(x_1))$, potem je zaradi nezlomljenosti grafa to vodoravna tangenta. Se pravi, da je $f'(x_1) = 0$ in lahko vzamemo $c = x_1$. Kadar to ne deluje, spuščamo vodoravno premico iz velike višine, dokler ne zadane grafa. Če zadane graf v kaki nerobni točki $(x_2, f(x_2))$, potem je vodoravna tangenta. Se pravi, da je $f'(x_2) = 0$ in lahko vzamemo $c = x_2$. Če tudi to ne deluje, potem je $f$ konstantna funkcija in za $c$ lahko vzamemo katerokoli nerobno točko.

Predpostavka $f(a) = f(b)$ iz Rolleovega izreka je redko izpolnjena. Lagrangeov izrek te predpostavke ne potrebuje, zato je uporabnejši.

**Lagrangeov izrek. Če je funkcija $f$ definirana na $[a, b]$, zvezna v $a$ in $b$ in odvedljiva v vsaki točki iz $(a, b)$, potem obstaja taka točka $c \in (a, b)$, da velja $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.**

Dokaz: Pokažimo najprej, da funkcija

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

zadošča predpostavkam Rolleovega izreka. Očitno je $g$ definirana na $[a, b]$. Ker je funkcija $x \mapsto f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$ elementarna in definirana v $a$ in $b$, je tudi zvezna v $a$ in $b$. Po predpostavki je $f$ zvezna v $a$ in $b$. Torej je $g$ razlika dveh funkcij, ki sta zvezni v $a$ in $b$ in je zato sama zvezna. Za vsako točko $x \in (a, b)$ velja

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

tako da je $g$ odvedljiva v $x$. Ker je $g(a) = 0$ in $g(b) = 0$, velja $g(a) = g(b)$. Sedaj nam Rolleov izrek pove, da obstaja taka točka $c \in (a, b)$, v kateri je odvod funkcije $g$ enak 0. Iz formule za $g'$ sledi $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Po množenju z $b - a$ dobimo želeno formulo $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. □

Geometrijski pomen Lagrangeovega izreka je podoben pomenu Rolleovega izreka. Premikamo premico, ki je vzporedna sekanti skozi točki $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$. Enačba te sekante je

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Primerna vzporednica te sekante postane tangenta na graf v neki nerobni točki $(c, f(c))$. Zaradi vzporednosti sta smerni koeficient tangente in smerni koeficient sekante enaka. Prvi je enak $f'(c)$, drugi pa $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Torej je res $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ za nek $c \in (a, b)$.

## 5.2. Naraščajoče in padajoče funkcije

Ponovimo najprej osnovne definicije. Funkcije $f$ je

- **naraščajoča**, če za poljubna $x_1, x_2 \in D(f)$, ki zadoščata $x_1 < x_2$, velja $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- **strogo naraščajoča**, če za poljubna $x_1, x_2 \in D(f)$, ki zadoščata $x_1 < x_2$, velja $f(x_1) < f(x_2)$;
- **padajoča**, če za poljubna $x_1, x_2 \in D(f)$, ki zadoščata $x_1 < x_2$, velja $f(x_1) \geq f(x_2)$;
- **strogo padajoča**, če za poljubna $x_1, x_2 \in D(f)$, ki zadoščata $x_1 < x_2$, velja $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkcija je **monotona**, če je bodisi naraščajoča bodisi padajoča, oziroma **strogo monotona**, če je bodisi strogo naraščajoča bodisi strogo padajoča.

Glavni rezultat tega razdelka je naslednja povezava med monotonostjo in predznakom odvoda.

**Trditev. Če je $f$ odvedljiva funkcija in je $D(f)$ povezana množica (se pravi interval, poltrak ali realna os), potem veljajo naslednje trditve:**

- **Če $f'(x) \geq 0$ za vsak $x \in D(f)$, je $f$ naračajoča.**
- **Če $f'(x) \leq 0$ za vsak $x \in D(f)$, je $f$ padajoča.**
- **Če $f'(x) > 0$ za vsak $x \in D(f)$, je $f$ strogo naračajoča.**
- **Če $f'(x) < 0$ za vsak $x \in D(f)$, je $f$ strogo padajoča.**

**Pri prvih dveh trditvah velja tudi obrat, pri drugih dveh pa ne.**

Dokaz: Dokazali bomo samo prvo trditev, ker je dokaz ostalih treh skoraj enak. Recimo, da je $f$ odvedljiva funkcija, $D(f)$ povezana množica in velja $f'(x) \geq 0$ za vsak $x \in D(f)$. Radi bi dokazali, da je potem $f$ naraščajoča funkcija. Vzemimo poljubni števili $x_1, x_2 \in D(f)$, za kateri velja $x_1 < x_2$. Ker je $D(f)$ povezana množica, je $[x_1, x_2] \subseteq D(f)$. Skrčitev $f|_{[x_1,x_2]}$ zadošča predpostavkam Lagrangeovega izreka, zato obstaja tak $c \in (x_1, x_2)$, da velja $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Po predpostavki je $f'(c) \geq 0$ in $x_2 - x_1 > 0$, zato je $f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0$. Sledi, da je $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, kar smo želeli dokazati.

Dokažimo sedaj obrat prve trditve. Skoraj enako se dokaže tudi obrat druge trditve. Recimo, da je $f$ odvedljiva in naraščajoča funkcija, $D(f)$ pa je povezana množica. Za poljubni različni števili $t, x \in D(f)$ potem velja

$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \geq 0$ (ločiti moramo primera $t > x$ in $t < x$). Odtod sledi, da je $f'(x) = \lim\limits_{t \to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \geq 0$.

S primerom pokažimo, da obrat tretje trditve ne drži. Funkcija $f(x) = x^3$ je strogo naraščajoča, vendar njen odvod ni strogo pozitiven, saj velja $f'(0) = 0$. S spremembo predznaka dobimo primer, ki ovrže obrat četrte trditve. $\square$

Če $D(f)$ ni povezana množica, potem gornji izrek običajno ne velja.

**Primer.** Funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ ima odvod $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, ki je povsod negativen. Vendar funkcija ni padajoča, saj je $-1 < 1$ in $f(-1) < f(1)$. Problem je v tem, da $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ni povezana množica.

Oglejmo si še tole zanimivo posledico izreka.

**Trditev. Če je $f$ odvedljiva funkcija in $D(f)$ povezana množica, potem je $f$ konstantna funkcija natanko tedaj, ko je $f'(x) = 0$ za vsak $x \in D(f)$.**

Dokaz: Funkcije $f$ je konstantna natanko tedaj, ko je tako naraščajoča kot padajoča. Po izreku to velja natanko tedaj, ko velja $f'(x) \geq 0$ in $f'(x) \leq 0$ za vsak $x \in D(f)$. Se pravi natanko tedaj, ko je $f'(x) = 0$ za vsak $x \in D(f)$. $\square$

Tudi pri uporabi te posledice ne smemo pozabiti na predpostavko o povezanosti $D(f)$.

**Primer.** Za funkcijo

$$f(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$$

velja $f'(x) = 0$ za vsak $x \neq 1$, vendar $f$ ni konstantna, saj je $f(0) = 0 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$ in $f(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} - (-\frac{5\pi}{12}) = \frac{3\pi}{4}$. Spet je problem v tem, da $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ni povezana množica.

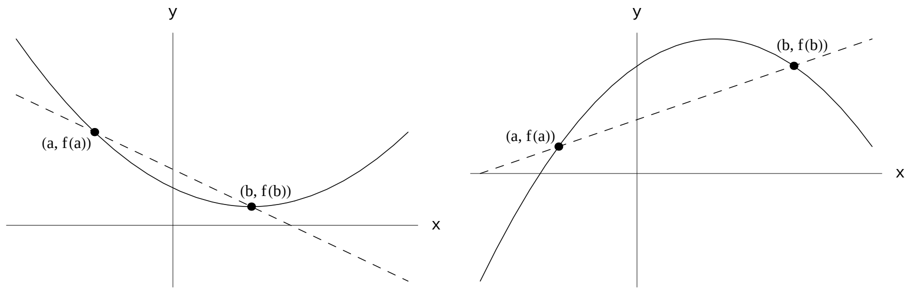
### 5.3. Konveksne in konkavne funkcije

Funkcija $f$ je

- **konveksna**, če za poljubne $a, x, b \in D(f)$, ki zadoščajo $a < x < b$, velja $f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$;
- **konkavna**, če za poljubne $a, x, b \in D(f)$, ki zadoščajo $a < x < b$, velja $f(x) \geq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$;
- **strogo konveksna**, če za poljubne $a, x, b \in D(f)$, ki zadoščajo $a < x < b$, velja $f(x) < f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$;

- **strogo konkavna**, če za poljubne $a, x, b \in D(f)$, ki zadoščajo $a < x < b$, velja $f(x) > f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

Kaj to pomeni grafično? Premica $y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ je ravno sekanta skozi točki $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$. Pri konveksnih funkcijah torej za poljubna $a$ in $b$ iz $D(f)$ sekanta skozi $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$ leži nad delom grafa med $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$ (glej levo skico), pri konkavnih pa pod (glej desno skico).




Glavni rezultat tega razdelka nam pove, kako s pomočjo odvoda ugotovimo ali je funkcija konveksna.

**Trditev. Če je funkcija $f$ odvedljiva in je $D(f)$ povezana množica, potem so ekvivalentne naslednje trditve:**

**(1) funkcija $f$ je konveksna;**

**(2) za poljubna $a, x \in D(f)$ velja $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$;**

**(3) odvod $f'$ je naraščajoča funkcija.**

**Ob dodatni predpostavki, da je $f$ dvakrat odvedljiva, so te tri trditve ekvivalentne s trditvijo**

**(4) $f''(x) \geq 0$ za vsak $x \in D(f)$.**

Dokaz: Dokažimo, da iz (1) sledi (2). Vzemimo poljubna $a, x \in D(f)$, pri čemer $a \neq x$, in poljuben $t$ med $a$ in $x$. Pokažimo najprej, da velja $f(t) - f(a) \leq \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(t-a)$. Če je $a < t < x$, potem to sledi iz definicije konveksne funkcije. Če pa je $x < t < a$, potem iz definicije konveksne funkcije sledi, da je $f(t)-f(x) \leq \frac{f(a)-f(x)}{a-x}(t-x)$. K tej neenakosti prištejmo enakost $f(x) - f(a) = \frac{f(a)-f(x)}{a-x}(x-a)$, pa spet dobimo gornjo neenakost. Pomnožimo sedaj gornjo neenakost s številom $\frac{x-a}{t-a}$, ki je v obeh primerih pozitivno. Dobimo $\frac{f(t)-f(a)}{t-a}(x-a) \leq f(x) - f(a)$, odkoder z limitiranjem $t$ proti $a$ dobimo $f'(a)(x-a) \leq f(x) - f(a)$.

Dokažimo, da iz (2) sledi (1). Vzemimo poljubne $a, x, b \in D(f)$, ki zadoščajo $a < x < b$. Iz (2) sledi, da je $f(b) \geq f(x) + f'(x)(b-x)$ in $f(a) \geq f(x) + f'(x)(a-x)$. Prvo neenakost pomnožimo z $x - a > 0$, drugo pa z $b-x>0$ in ju seštejmo. Dobimo $f(b)(x-a)+f(a)(b-x) \geq f(x)(x-a)+f(x)(b-x)$. Desno stran preoblikujemo v $f(x)(b-a)$, levo pa v $f(a)(b-a)+(f(b)-f(a))(x-a)$. Na koncu še delimo z $b-a>0$, da dobimo $f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \geq f(x)$.

Dokažimo, da iz (2) sledi (3). Vzemimo poljubna $a, b \in D(f)$, ki zadoščata $a<b$. Iz (2) sledi, da za vsak $x \in D(f)$ velja $f(x) \geq f(a)+f'(a)(x-a)$ in $f(x) \geq f(b)+f'(b)(x-b)$. Če v prvo neenakost vstavimo $x=b$, v drugo pa $x=a$, dobimo $f(b) \geq f(a)+f'(a)(b-a)$ in $f(a) \geq f(b)+f'(b)(a-b)$. Odtod sledi $f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b)$.

Preostane še dokaz, da iz (3) sledi (2). Recimo, da je $f'$ naraščajoča funkcija. Vzemimo poljubna $a, x \in D(f)$. Če $x<a$, potem po Lagrangeovem izreku obstaja tak $c \in (x, a)$, da velja $f(a)-f(x)=f'(c)(a-x)$. Ker je $f'$ naraščajoča in $c<a$, je $f'(c) \leq f'(a)$. Ker je $a-x>0$, odtod sledi, da je $f'(c)(a-x) \leq f'(a)(a-x)$. Torej je res $f(x)-f(a) \geq f'(a)(x-a)$. Če pa je $x>a$, potem po Lagrangeovem izreku obstaja tak $c \in (a, x)$, da velja $f(x)-f(a)=f'(c)(x-a)$. Ker je $f'$ naraščajoča in $a<c$, je $f'(a) \leq f'(c)$. Ker je $x-a>0$, odtod sledi, da je $f'(c)(x-a) \geq f'(a)(x-a)$. Torej je spet $f(x)-f(a) \geq f'(a)(x-a)$.

Zadnja trditev sledi iz dejstva, da je funkcija $g=f'$ naraščajoča natanko tedaj, ko za njen odvod velja $g'(x) \geq 0$ pri vsak $x \in D(g)$. Množica $D(g)$ je seveda povezana, saj je enaka $D(f)$. $\square$

Geometrijski pomen druge točke iz prejšnje trditve je, da konveksna funkcija leži nad vsako svojo tangento. Tretja točka pa pove, da smerni koeficient tangent narašča, ko se gibljemo proti desni.

Funkcija $f$ je konkavna natanko tedaj, ko je funkcija $-f$ konveksna, zato iz gornjega rezultata dobimo tudi karakterizacijo konkavnih funkcij.

**Trditev. Če je funkcija $f$ odvedljiva in je $D(f)$ povezana, potem so ekvivalentne naslednje trditve:**

**(1) funkcija $f$ je konkavna;**

**(2) za poljubna $a, x \in D(f)$ velja $f(x) \leq f(a)+f'(a)(x-a)$;**

**(3) $f'$ je padajoča funkcija.**

**Ob dodatni predpostavki, da je $f$ dvakrat odvedljiva, so te tri trditve ekvivalentne s trditvijo:**

**(4) $f''(x) \leq 0$ za vsak $x \in D(f)$.**

Torej konkavna funkcija leži pod vsako svojo tangento in smerni koeficient tangent pada, ko se gibljemo proti desni.

Krajši premislek pokaže, da iz gornjih dveh rezultatov dobimo tudi ustrezna rezultata za strogo konveksne in strogo konkavne funkcije.

**Trditev. Če je funkcija $f$ odvedljiva in je $D(f)$ povezana, potem so ekvivalentne naslednje trditve:**

**(1) funkcija $f$ je strogo konveksna (oziroma strogo konkavna);**

**(2) za poljubna $a, x \in D(f)$, ki zadoščata $a \neq x$, je $f(x) < f(a) + f'(a)(x - a)$ (oziroma $f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$);**

**(3) $f'$ je strogo naraščajoča (oziroma strogo padajoča) funkcija.**

**Te tri trditve so recimo izpolnjene v primeru, ko je $f$ dvakrat odvedljiva in velja $f''(x) > 0$ (oziroma $f''(x) < 0$) za vsak $x \in D(f)$.**

Točki, v kateri funkcija preide iz konveksne v konkavno ali iz konkavne v konveksno, pravimo **prevoj**. Če je $(a, f(a))$ prevoj funkcije $f$ in je $f$ dvakrat odvedljiva, potem je $f''(a) = 0$. Ni pa vsaka točka $a$, v kateri je $f''(a) = 0$ nujno prevoj.

**Primer.** Vzemimo $f(x) = x^4$ in $a = 0$. Potem je $f''(a) = 0$, vendar $a$ ni prevoj, saj je $f''(x) = 12x^2 \geq 0$, torej je $f$ konveksna tako levo kot desno od $a$.

Je pa točka $a$ zanesljivo prevoj funkcije $f$, če je funkcija $f$ dvakrat odvedljiva na neki okolici točke $a$ in če $f''$ spremeni predznak v točki $a$.

**Primer.** Vzemimo $f(x) = x^3$ in $a = 0$. Ker $f''(x) = 6x$ spremeni predznak v točki $a$, je ta točka prevoj funkcije $f$.

### 5.4. Recept za načrtovanje grafov

S pomočjo prvega in drugega odvoda funkcije $f$ lahko dokaj natančno skiciramo graf funkcije $f$. Recept je takle.

(1) Najprej določi definicijsko območje $D(f)$. Če $D(f)$ ni povezana množica, jo razreži na intervale in poltrake.

(2) Izračunaj limite funkcije $f$ v robnih točkah vseh intervalov in poltrakov iz točke (1). Če je limita funkcije $f$ v robni točki $a$ neskončna, črtkano nariši navpično asimptoto $x = a$. Če pa je limita $f$ v robni točki $a$ končna in enaka $L$, potem nariši točko $(a, L)$.

(3) Če $D(f)$ ni navzgor omejena, izračunaj limito funkcije $f$ v $\infty$ in če $D(f)$ ni navzdol omejena, izračunaj limito funkcije $f$ v

$-\infty$. Če je katera od teh limit končna, črtkano nariši ustrezno vodoravno asimptoto.

(4) Izračunaj $f'$ in $f''$.

(5) Reši enačbe $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$ in $f''(x) = 0$. Za vsako rešitev $a$ ene od teh enačb nariši točko $(a, f(a))$.

(6) Skozi vsako točko $(a, f(a))$, ki si jo že narisal, potegni črtkano premico s smernim koeficientom $f'(a)$. Ta premica je tangenta na graf funkcije $f$ v točki $(a, f(a))$, zato se ji mora graf v bližini $(a, f(a))$ dobro prilegati.

(7) Določi intervale, kjer je $f > 0$ in intervale, kjer je $f < 0$. Določi intervale, kjer je $f' > 0$ in intervale, kjer je $f' < 0$. Določi intervale, kjer je $f'' > 0$ in intervale, kjer je $f'' < 0$.

(8) Vsak par sosednjih točk, ki si jih že narisal, določa nek interval, na katerem imajo funkcije $f, f', f''$ konstanten predznak. Na tem intervalu lahko sedaj približno skiciraš graf funkcije $f$. Pazi, da se graf prilega ustreznim premicam.

Oglejmo si uporabo tega recepta na dveh primerih.

**Primer.** Skicirajmo graf funkcije

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x.$$

Ker je $D(f) = \mathbb{R}$ povezana množica, lahko takoj preskočimo na korak (3). Limiti v $\pm\infty$ sta neskončni, zato ni vodoravnih asimptot. Prvi in drugi odvod funkcije $f$ sta

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 \quad \text{in} \quad f''(x) = 6x - 6.$$

Rešitve enačbe $f(x) = 0$ so $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ in $x_3 = 2$. Rešitvi enačbe $f'(x) = 0$ sta $x_4 = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ in $x_5 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$. Rešitev enačbe $f''(x) = 0$ je $x_6 = 1$, ki slučajno sovpade z $x_2$. Sedaj narišemo točke $(x_i, f(x_i))$ za vsak $i = 1, \ldots, 6$. To so

$$(0,0), \quad (1,0), \quad (2,0), \quad (1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{3\sqrt{3}}) \quad \text{in} \quad (1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}).$$

Šesto smo izpustili, ker sovpada z drugo. Za vsak $i = 1, \ldots, 6$ črtkano narišemo premico $y = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i)$. To so premice

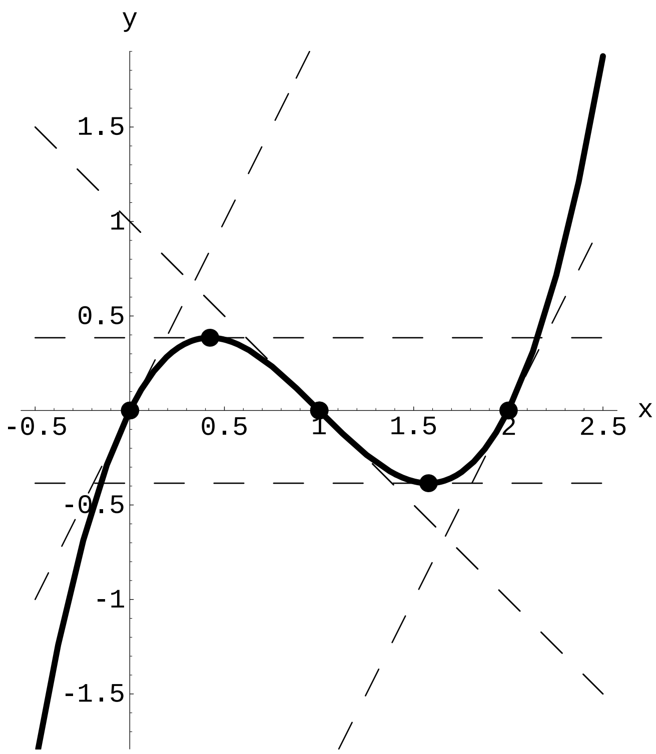
$$y = 2x, \quad y = 1 - x, \quad y = 2x - 4, \quad y = \frac{-2}{3\sqrt{3}} \quad \text{in} \quad y = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Tudi tokrat smo šesto izpustili, ker sovpada z drugo.

Uredimo točke $x_i$ po velikosti: $x_1 < x_5 < x_2 = x_6 < x_4 < x_3$. Na vsakem od šestih odsekov, ki jih te točke določajo, določimo predznake funkcij $f$, $f'$ in $f''$.

| $x$ | $f(x)$ | $f'(x)$ | $f''(x)$ |
|---|---|---|---|
| $x<0$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $0<x<1-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $+$ | $+$ | $-$ |
| $1-\frac{1}{\sqrt{3}}<x<1$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| $1<x<1+\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $1+\frac{1}{\sqrt{3}}<x<2$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $2<x<\infty$ | $+$ | $+$ | $+$ |

Na prvem odseku je torej funkcija strogo negativna, strogo naraščajoča in strogo konkavna, podobno premislimo za ostale odseke. Sedaj imamo dovolj podatkov, da lahko skiciramo graf.




**Primer.** Skicirajmo graf funkcije

$$f(x)=\frac{2x}{1-x^3}.$$

Ker $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ ni povezana množica, moramo izračunati levo in desno limito v točki 1. Velja $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$ in $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$. Odtod sledi, da je premica $x=1$ edina navpična asimptota funkcije

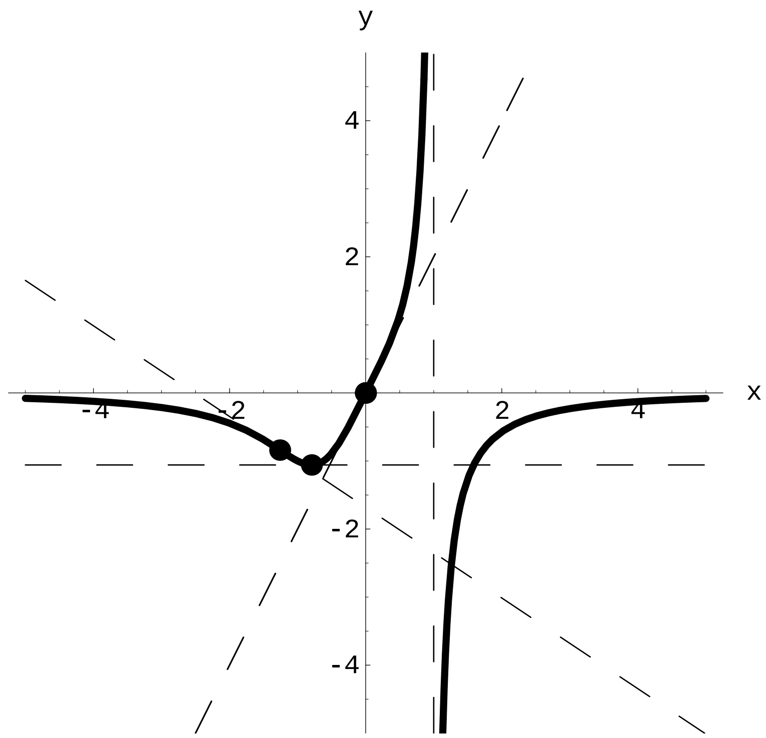
$f$. Ker je $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ in $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, je premica $y = 0$ edina vodoravna asimptota funkcije $f$. Prvi in drugi odvod funkcije $f$ sta

$$f'(x) = \frac{2+4x^3}{(1-x^3)^2} \quad \text{in} \quad f''(x) = \frac{12x^2(2+x^3)}{(1-x^3)^3}.$$

Rešitev enačbe $f(x) = 0$ je $x_1 = 0$, rešitev enačbe $f'(x) = 0$ je $x_2 = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ in rešitev enačbe $f''(x) = 0$ je $x_3 = -\sqrt[3]{2}$. Točke $(x_i, f(x_i))$, $i = 1,2,3$ so $(0,0)$, $(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, -\frac{2\sqrt[3]{4}}{3}) \approx (-0.79, -1.06)$ in $(-\sqrt[3]{2}, -\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}) \approx (-1.26, -0.84)$. Skozi prvo točko narišemo premico s smernim koeficientom $f'(x_1) = 2$, skozi drugo točko premico s smernim koeficientom $f'(x_2) = 0$ in skozi tretjo točko premico s smernim koeficientom $f'(x_2) = -\frac{2}{3}$. Določimo še predznake funkcij $f$, $f'$ in $f''$.

| $x$ | $f(x)$ | $f'(x)$ | $f''(x)$ |
|---|---|---|---|
| $x < -\sqrt[3]{2}$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $-\sqrt[3]{2} < x < -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $-\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < x < 0$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $0 < x < 1$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $1 < x$ | $-$ | $+$ | $-$ |

Sedaj lahko skiciramo graf funkcije $f$.



## 5.5. Zadostni pogoj za lokalni ekstrem

Spomnimo se, da Fermatov izrek, ki govori o potrebnem pogoju za nastop ekstrema, pravi: **če funkcija $f$ zavzame lokalni ekstrem v točki $c$ in je odvedljiva na nekem odprtem intervalu, ki vsebuje $c$, potem je $f'(c) = 0$.** Vemo, da obrat tega izreka ne drži. Če vzamemo namreč $f(x) = x^3$ in $c = 0$, potem je $f'(c) = 0$, vendar $c$ ni lokalni ekstrem funkcije $f$. Torej poleg pogoja $f'(c) = 0$ potrebujemo še kako dodatno predpostavko, ki bo zagotavljala, da je $c$ res lokalni ekstrem. Vsaki taki predpostavki pravimo zadostni pogoj za nastop lokalnega ekstrema. Ogledali si bomo dve.

**Prvi zadostni pogoj za nastop lokalnega ekstrema: če je**

**(1) funkcija $f$ odvedljiva na nekem odprtem intervalu, ki vsebuje točko $c$,**
**(2) $f'(c) = 0$ in**
**(3) $f'$ spremeni predznak v točki $c$,**

**potem funkcija $f$ zavzame lokalni ekstrem v točki $c$.**

Dokaz: Recimo, da je funkcija $f$ odvedljiva na nekem odprtem intervalu, ki vsebuje točko $c$ in da velja $f'(c) = 0$. Če funkcija $f'$ spremeni predznak v $c$, potem obstajata taki točki $a < c$ in $b > c$, da je

- bodisi $f'(x) \leq 0$ za vsak $x \in (a, c)$ in $f'(x) \geq 0$ za vsak $x \in (c, b)$
- bodisi $f'(x) \geq 0$ za vsak $x \in (a, c)$ in $f'(x) \leq 0$ za vsak $x \in (c, b)$.

V prvem primeru je $f$ na $(a, c]$ padajoča in na $[c, b)$ naraščajoča, v drugem primeru pa obratno. V prvem primeru torej za vsak $x \in (a, b)$ velja $f(x) \geq f(c)$ v drugem pa $f(x) \leq f(c)$. Torej zavzame v prvem primeru funkcija $f$ v točki $c$ lokalni minimum, v drugem pa lokalni maksimum. $\square$

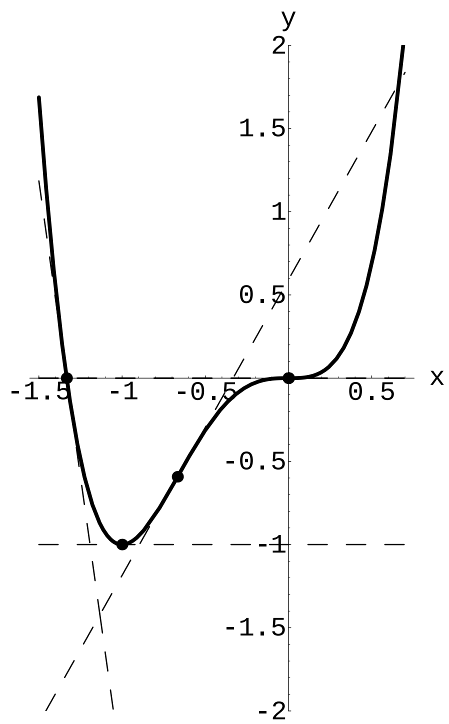
Uporabimo izrek na preprostem primeru.

**Primer.** Določimo lokalne ekstreme funkcije

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3.$$

Ker $D(f) = \mathbb{R}$ nima robnih točk, so kandidati za lokalne ekstreme samo ničle funkcije $f'(x) = 12x^3 + 12x^2$, torej $x = -1$ in $x = 0$. Funkcija $f'$ spremeni v točki $x = -1$ predznak iz $-$ na $+$, tako da v tej točki zavzame lokalni minimum. Ker $f'$ ohrani pri prehodu skozi $x = 0$ predznak $+$, je v okolici te točke strogo naraščajoča, torej v tej točki nima lokalnega ekstrema.

Za boljšo predstavo si oglejmo še graf funkcije $f$.




**Drugi zadostni pogoj za nastop lokalnega ekstrema: če je**

**(1) drugi odvod funkcije $f$ definiran in zvezen na neki okolici točke $c$,**

**(2) $f'(c) = 0$ in**

**(3) $f''(c) \neq 0$,**

**potem funkcija $f$ zavzame lokalni ekstrem v točki $c$.**

Dokaz: Če je $f''(c) > 0$, potem je zaradi zveznosti $f''$ pozitivna na nekem odprtem intervalu, ki vsebuje $c$. Odtod sledi, da je $f$ strogo konveksna na tem intervalu, torej njen graf leži nad tangento v točki $(c, f(c))$. Ker je $f'(c) = 0$, je ta tangenta vodoravna, njena enačba pa se glasi $y = f(c)$. Sledi $f(x) \geq f(c)$ za vsak $x$ iz tega intervala. V temu primeru torej $f$ zavzame lokalni minimum v $c$. Podobno pokažemo, da zavzame v primeru $f''(c) < 0$ funkcija $f$ v točki $c$ lokalni maksimum. $\square$

**Primer.** Določimo lokalne ekstreme funkcije

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x.$$

Ker $D(f) = \mathbb{R}$ nima robnih točk, so kandidati za lokalne ekstreme samo ničle funkcije $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$, torej $x = 1$ ali $x = -2$. Drugi odvod funkcje $f$ je $f''(x) = 12x + 6$. Ker je $f''(1) > 0$ in $f''(-2) < 0$, zavzame $f$ v $x = 1$ lokalni minimum, v $x = -2$ pa lokalni maksimum.

Slabost drugega zadostnega pogoja je, da ne pove, kaj se zgodi v primeru, ko je $f''(c) = 0$. V tem primeru preverimo ali $f''$ ohrani ali spremeni predznak v $c$. V prvem primeru $f$ zavzame lokalni ekstrem v $c$, v drugem pa ne. Lahko bi uporabili tudi prvi zadostni pogoj ali pa kriterij z višjimi odvodi, ki ga bomo spoznali v poglavju o Taylorjevem izreku.

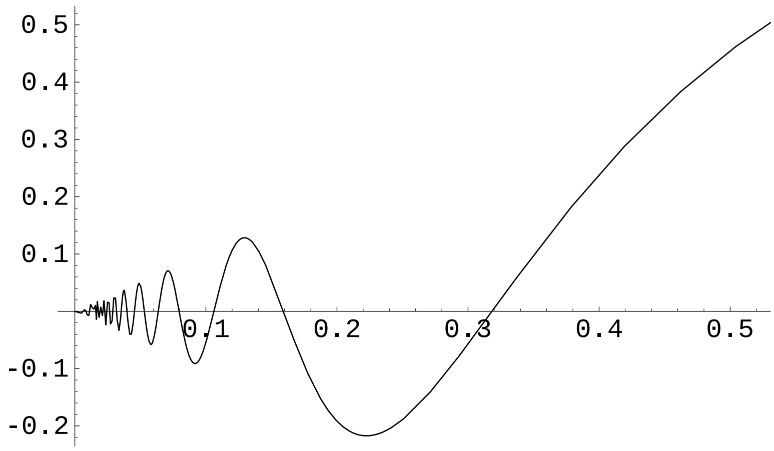
**Primer.** Oglejmo si še enkrat funkcijo $f(x) = 3x^4 + 4x^3$. Ničli prvega odvoda sta $x = -1$ in $x = 0$. Velja $f''(-1) > 0$ in $f''(0) = 0$. Drugi zadostni pogoj nam pove, da $f$ zavzame lokalni minimum v $x = -1$, o točki $x = 0$ pa nam ničesar ne pove. Ker $f''(x) = 36x^2 + 24x$ spremeni predznak v $x = 0$, funkcija $f$ v tej točki ne zavzame lokalnega ekstrema.

Pozorni bralec se bo spomnil, da funkcija lahko zavzame lokalni ekstrem tudi v robni točki definicijskega območja. Vendar robna točka ni vedno lokalni ekstrem, kot pokaže naslednji primer.

**Primer.** Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

ima definicijsko območje $[0, \infty)$, vendar v robni točki 0 ne zavzame lokalnega ekstrema, kar se vidi iz grafa.




Zadostni pogoj, da funkcija $f$ zavzame lokalni ekstrem v robni točki $a$, je, da je $f'$ ne spremeni predznaka na neki okolici $a$.

## 5.6. Vprašanja za ponavljanje

(1) (Rolleov in Lagrangeov izrek)
  (a) Formuliraj Rolleov izrek!
  (b) Formuliraj Lagrangeov izrek in ga izpelji iz Rolleovega izreka!
  (c) Pojasni geometrijski pomen Rolleovega in Lagrangeovega izreka!

(2) (Monotone funkcije in odvod)
  (a) Povej definicijo naraščajoče funkcije!
  (b) Naj bo $f(x)$ taka funkcija s povezanim definicijskim območjem, da je $f'(x) \geq 0$ za vsak $x$. Dokaži, da je $f(x)$ naraščajoča!
  (c) Funkcija $f(x) = -\frac{1}{x}$ zadošča $f'(x) \geq 0$ za vsak $x \in D(f)$, vendar ni naraščajoča, ker $f(-1) > f(1)$. V čem je problem?

(3) (Konveksne in konkavne funkcije)
  (a) Kakšni sta definiciji konveksnih in konkavnih funkcij?
  (b) Kako določimo konveksnost in konkavnost s prvim odvodom?
  (c) Kako določimo konveksnost in konkavnost z drugim odvodom?

(4) (Prevoj)
  (a) Kaj je definicija prevoja?
  (b) Formuliraj potrebni pogoj za prevoj s pomočjo drugega odvoda!
  (c) Formuliraj zadostni pogoj za prevoj s pomočjo drugega odvoda!

(5) (Zadostni pogoj za lokalni ekstrem)
  (a) Povej definicijo in formuliraj potrebni pogoj za nastop lokalnega ekstrema!
  (b) Formuliraj zadostni pogoj za nastop lokalnega ekstrema s prvim odvodom!
  (c) Formuliraj zadostni pogoj za nastop lokalnega ekstrema z drugim odvodom!

POGLAVJE 6

# Taylorjev izrek

## 6.1. L'Hospitalovo pravilo

L'Hospitalovo pravilo je recept za računanje limit oblike $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, kjer je $f(a) = g(a) = 0$. Pravi, da se taka limita ne spremeni, če števec in imenovalec odvajamo.

**L'Hospitalovo pravilo: če sta $f$ in $g$ taki funkciji, da velja**

- **$f(a) = 0$ in $g(a) = 0$,**
- **obstaja taka okolica točke $a$ na kateri sta $f$ in $g$ odvedljivi in na kateri velja $g(x) \neq 0$ in $g'(x) \neq 0$ za vsak $x \neq a$,**
- **obstaja limita $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,**

**potem obstaja tudi limita $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ in velja**

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dokaz: Po predpostavki obstaja taka okolica $O(a,\epsilon)$, na kateri sta funkciji $f$ in $g$ odvedljivi in na kateri velja $g(x) \neq 0$ in $g'(x) \neq 0$ za vsak $x \neq a$. Vzemimo poljuben $x \in O(a,\epsilon) \setminus \{a\}$ in si oglejmo funkcijo

$$\phi(t) = g(t)f(x) - f(t)g(x).$$

Ker sta $f$ in $g$ odvedljivi na $O(a,\epsilon)$, je tudi $\phi$ odvedljiva na $O(a,\epsilon)$. Ker je $f(a) = 0$ in $g(a) = 0$, je tudi $\phi(a) = 0$. Očitno je $\phi(x) = g(x)f(x) - f(x)g(x) = 0$. Torej $\phi$ zadošča predpostavkam Rolleovega izreka. Zato obstaja tak $c$ med $a$ in $x$, da velja $\phi'(c) = 0$. Ker je $\phi'(t) = g'(t)f(x) - f'(t)g(x)$, sledi, da je $g'(c)f(x) - f'(c)g(x) = 0$, torej je $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. Ko $x$ približujemo k $a$, se tudi $c$ približuje k $a$, saj leži med $a$ in $x$, zato je

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Zadnja limita je seveda enaka $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. $\square$

Uporabimo to pravilo na primeru.

**Primer.** Izračunaj limito

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Po L'Hospitalovem pravilu je

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

Pri zadnjem enačaju smo upoštevali, da je $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Nekaj opomb.
(1) Če je $g'(a)\neq 0$, lahko L'Hospitalovo pravilo dokažemo preprosteje.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(2) L'Hospitalovo pravilo lahko uporabimo tudi večkrat zaporedoma. Če velja $f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(n-1)}(a)=0$ in $g(a)=g'(a)=\ldots=g^{(n-1)}(a)=0$, potem je

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ldots=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

(3) Limita $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ lahko obstaja tudi v primeru, ko limita $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ne obstaja. Vzemimo, recimo, funkciji $f(x)=\sin(1/x)$ in $g(x)=1/x$ ter $a=0$. Ker za vsak $x$ velja $-x\leq f(x)/g(x)\leq x$, nam metoda sendviča pove, da je prva limita enaka nič. Druga limita je enaka $\lim\limits_{x\to 0}\cos(1/x)$. Ko narišemo graf funkcije $\cos(1/x)$, vidimo, da ta limita ne obstaja.

(4) Podobno kot v prvotnem dokazu L'Hospitalovega pravila lahko dokažemo naslednjo posplošitev Lagrangeovega izreka.
**Cauchyjev izrek**: Če sta funkciji $f$ in $g$ odvedljivi na odprtem intervalu $(a,b)$, zvezni v $a$ in $b$ in je $g'(x)\neq 0$ za vsak $x\in(a,b)$, potem obstaja tak $c\in(a,b)$, da velja $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$.

## 6.2. Diferenčni količniki višjega reda

Za vsako funkcijo $f$ in število $h$ definiramo novo funkcijo $k_hf$ s predpisom

$$(k_hf)(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Kaj se zgodi, če v tej definiciji zamenjamo $f$ s $k_h f$? Dobimo

$$\begin{aligned}
(k_h k_h f)(x) &= \frac{(k_h f)(x+h) - (k_h f)(x)}{h} \\
&= \frac{\frac{f(x+2h)-f(x+h)}{h} - \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}{h} \\
&= \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}.
\end{aligned}$$

Če v tej formuli ponovno zamenjamo $f$ s $k_h f$, dobimo

$$\begin{aligned}
(k_h k_h k_h f)(x) &= \frac{(k_h k_h f)(x+h) - (k_h k_h f)(x)}{h} \\
&= \frac{\frac{f(x+3h)-2f(x+2h)+f(x+h)}{h^2} - \frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}}{h} \\
&= \frac{f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)}{h^3}.
\end{aligned}$$

Izrazu $k_h k_h \cdots k_h f$, kjer $k_h$ nastopa $n$-krat, pravimo **$n$-ti diferenčni količnik** funkcije $f$. Označimo ga tudi s $k_h^n f$. S popolno indukcijo po $n$ zlahka dokažemo naslednjo trditev.

**Trditev. Za vsako naravno število $n$ in vsako funkcijo $f$, ki je definirana v točkah $x, x+h, \ldots, x+nh$, velja**

$$\boldsymbol{(k_h^n f)(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(x+ih)}{h^n}}.$$

Zanima nas, kaj dobimo, ko v $k_h^n f$ pošljemo število $h$ proti 0. V primeru $n = 1$ dobimo ravno definicijo odvoda:

$$\lim_{h \to 0} (k_h f)(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

V primeru $n = 2$ z uporabo L'Hospitalovega pravila dobimo

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} (k_h^2 f)(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{2f'(x+2h) - 2f'(x+h)}{2h} \\
&= 2 \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+2h) - f'(x)}{2h} - \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \\
&= 2f''(x) - f''(x) \\
&= f''(x).
\end{aligned}$$

V primeru $n = 3$ z dvakratno uporabo L'Hospitalovega pravila dobimo

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}(k_h^3 f)(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{9f''(x+3h) - 12f''(x+2h) + 3f''(x+h)}{6h}\\ &= \frac{9}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f''(x+3h)-f''(x)}{3h} - 4\lim_{h\to 0}\frac{f''(x+2h)-f''(x)}{2h}\\ &\quad +\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f''(x+h)-f''(x)}{h}\\ &= \frac{9}{2}f'''(x) - 4f'''(x) + \frac{1}{2}f'''(x)\\ &= f'''(x).\end{aligned}$$

Bralca ne sme zmesti, da smo števec in imenovalec odvajali po $h$ in ne po $x$.

**Trditev. Za vsako $n$-krat odvedljivo funkcijo $f$ velja**

$$\lim_{h\to 0}(k_h^n f)(x) = f^{(n)}(x).$$

Dokaz: Uporabimo isto metodo kot pri $n = 2, 3$. Z $n-1$ kratno uporabo L'Hospitalovega pravila dobimo

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}(k_h^n f)(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{i=1}^n (-1)^{n-i}\binom{n}{i} i^{n-1} f^{(n-1)}(x+ih)}{n!h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{i=1}^n (-1)^{n-i}\binom{n}{i} i^{n-1} [f^{(n-1)}(x+ih) - f^{(n-1)}(x)]}{n!h}\\ &= \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^n (-1)^{n-i}\binom{n}{i} i^n \lim_{h\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x+ih)-f^{(n-1)}(x)}{ih}\\ &= \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^n (-1)^{n-i}\binom{n}{i} i^n f^{(n)}(x)\\ &= f^{(n)}(x).\end{aligned}$$

Pri drugem in petem enačaju smo uporabili formulo

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{n-i}\binom{n}{i} i^r = \begin{cases} 0, & \text{če } r = 0, 1, \ldots, n-1,\\ n!, & \text{če } r = n\end{cases}$$

za $r = n-1$ in $r = n$. To formulo izpeljemo tako, da izraz $(x-1)^n = \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i}\binom{n}{i} x^i$ $n$-krat odvajamo in v vsak odvod vstavimo $x = 1$. □

## 6.3. Interpolacijski in Taylorjevi polinomi

V tem razdelku se bomo naučili, kako poiščemo polinom dane stopnje $n$, ki se v dani točki $a$ najbolje prilega dani funkciji $f$. Temu polinomu rečemo $n$-ti Taylorjev polinom funkcije $f$ v $a$. V primeru $n = 0$ je to očitno kar konstantna funkcija $y = f(a)$. V primeru $n = 1$ pa tudi že vemo, da je to linearna funkcija $y = f(a) + f'(a)(x - a)$, tj. tangenta.

Spomnimo se, da smo do enačbe tangente prišli tako, da smo v enačbi sekante skozi točki $(a, f(a))$ in $(a+h, f(a+h))$ poslali število $h$ proti nič. Pri $n \geq 2$ bomo postopali podobno. Najprej bomo poiskali polinom stopnje $n$, ki gre skozi točke $(a, f(a)), (a + h, f(a + h)), \ldots,$ $(a + nh, f(a + nh))$, pravimo mu $n$-ti interpolacijski polinom funkcije $f$ v $a$, nato pa bomo $h$ poslali proti 0.

Poiščimo najprej interpolacijske polinome majhnih stopenj. Edina konstantna funkcija, ki gre skozi točko $(a, f(a))$ je

$$y = f(a).$$

Edina linearna funkcija, ki gre skozi točki $(a, f(a))$ in $(a+h, f(a+h))$ je

$$y = f(a) + \frac{f(a+h) - f(a)}{h}(x - a) = f(a) + (k_h f)(a)(x - a).$$

Edina kvadratna funkcija, ki gre skozi točke $(a, f(a))$, $(a+h, f(a+h))$ in $(a + 2h, f(a + 2h))$ je

$$\begin{aligned} y &= f(a) + \frac{f(a+h) - f(a)}{h}(x - a) + \\ &\quad + \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{2h^2}(x - a)(x - a - h) \\ &= f(a) + (k_h f)(a)(x - a) + \frac{(k_h^2 f)(a)}{2}(x - a)(x - a - h). \end{aligned}$$

Edina kubična funkcija, ki gre skozi točke $(a, f(a))$, $(a + h, f(a + h))$, $(a + 2h, f(a + 2h))$ in $(a + 3h, f(a + 3h))$ je

$$\begin{aligned} y &= f(a) + (k_h f)(a)(x - a) + \frac{(k_h^2 f)(a)}{2}(x - a)(x - a - h) + \\ &\quad + \frac{(k_h^3 f)(a)}{6}(x - a)(x - a - h)(x - a - 2h). \end{aligned}$$

Za splošen $n$ velja naslednja trditev.

**Trditev. Edini polinom stopnje $n$, ki gre skozi $n+1$ točk $(a, f(a))$, $(a+h, f(a+h))$, $(a+2h, f(a+2h))$,...,$(a+nh, f(a+nh))$, je**

$$y = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{(k_h^i f)(a)}{i!} (x-a) \cdots (x-a-(i-1)h) \right).$$

**Temu polinomu pravimo $n$-ti interpolacijski polinom za funkcijo $f$ v točki $a$. Je posplošitev pojma sekante.**

Dokaz: Označimo polinom na desni z $I_n(x)$. Pokažimo najprej, da za vsak $s = 0, 1, \ldots, n$ velja $I_n(a+sh) = f(a+sh)$. Če v $I_n(x)$ vstavimo $x = a+sh$, kjer $s < n$, odpadejo v vsoti vsi členi od vključno $s$-tega dalje, torej je $I_n(a+sh) = I_s(a+sh)$. Po drugi strani za vsak $s = 0, 1, \ldots, n$ velja

$$I_s(a+sh) = f(a) + \sum_{i=1}^{s} \tfrac{(k_h^i f)(a)}{i!} \cdot sh \cdots (s-i+1)h = f(a) + \sum_{i=1}^{s} (k_h^i f)(a) h^i \tbinom{s}{i} =$$
$$= \sum_{i=0}^{s} (k_h^i f)(a) h^i \tbinom{s}{i} = \sum_{i=0}^{s} \big( \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \tbinom{i}{j} f(x+jh) \big) \tbinom{s}{i} =$$
$$= \sum_{j=0}^{s} \big( \sum_{i=j}^{s} (-1)^{i-j} \tbinom{i}{j} \tbinom{s}{i} \big) f(x+jh) = f(a+sh).$$

V prvem koraku smo vstavili $x = a+sh$ v formulo za $I_s(x)$, v drugem smo upoštevali definicijo binomskega simbola, pri tretjem smo upoštevali, da je $f(a) = (k_h^0 f)(a) h^0 \binom{s}{0}$, pri četrtem smo vstavili formulo za $(k_h^i f)(a)$ iz prejšnjega razdelka in pokrajšali $h^i$, pri petem smo zamenjali vrstni red seštevanja, pri šestem pa smo upoštevali formulo

$$\sum_{i=j}^{s} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} \binom{s}{i} = \begin{cases} 0, & j < s, \\ 1, & j = s, \end{cases}$$

ki jo dobimo s primerjavo istoležnih koeficientov v

$$x^s = ((1+x)-1)^s = \sum_{i=0}^{s} \tbinom{s}{i} (x-1)^i =$$
$$= \sum_{i=0}^{s} \tbinom{s}{i} \big( \sum_{j=0}^{i} \tbinom{i}{j} (-1)^{i-j} x^j \big) = \sum_{j=0}^{s} \big( \sum_{i=j}^{s} \tbinom{s}{i} \tbinom{i}{j} (-1)^{i-j} \big) x^j.$$

Enoličnost interpolacijskega polinoma sledi iz dejstva, da ima polinom stopnje $n$ lahko kvečjemu $n$ različnih ničel. Če se namreč dva polinoma stopnje $n$ ujemata v $n+1$ različnih točkah, potem je njuna razlika polinom stopnje kvečjemu $n$, ki ima $n+1$ ničel, kar je možno samo v primeru, če je razlika nič. $\square$

Predpostavimo, da je funkcija $f$ $n$-krat odvedljiva v okolici točke $a$ in pošljimo v interpolacijskem polinomu $h$ proti 0. V primeru $n = 0$ se ne zgodi nič, v primeru $n = 1$ pa dobimo ravno enačbo tangente.

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

V primeru $n = 2$ dobimo

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2,$$

v primeru $n = 3$ pa

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x - a)^3.$$

Za splošen $n$ velja naslednja trditev.

**Trditev. Limita $\boldsymbol{n}$-tega interpolacijskega polinoma za funkcijo $\boldsymbol{f}$ v točki $\boldsymbol{a}$, ko gre $\boldsymbol{h}$ proti 0, je**

$$\boldsymbol{y = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x - a)^i.}$$

**Temu polinomu pravimo $\boldsymbol{n}$-ti Taylorjev polinom za funkcijo $\boldsymbol{f}$ v točki $\boldsymbol{a}$. Je posplošitev pojma tangente.**

Dokaz: Če označimo

$$I_n^h(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{(k_h^i f)(a)}{i!}(x - a) \cdots (x - a - (i - 1)h) \right),$$

potem velja

$$\lim_{h\to 0} I_n^h(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\lim_{h\to 0}(k_h^i f)(a)}{i!} \lim_{h\to 0} ((x - a) \cdots (x - a - (i - 1)h)) =$$

$$= f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x - a)^i = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x - a)^i.$$

Za vsak $i = 1, \ldots, n$ smo uporabili formulo $\lim_{h\to 0}(k_h^i f)(x) = f^{(i)}(x)$, ki smo jo dokazali v prejšnjem razdelku. $\square$

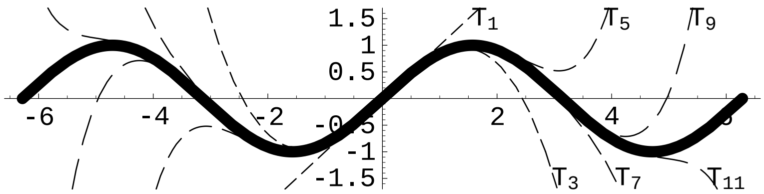
**Primer.** Izračunajmo prvih dvanajst Taylorjevih polinomov funkcije $f(x) = \sin x$ v točki $a = 0$. Najprej moramo izračunati odvode funkcije $f$ in vstaviti $x = 0$. Dobimo

| $n$ | $f^{(n)}(x)$ | $f^{(n)}(0)$ | $n$ | $f^{(n)}(x)$ | $f^{(n)}(0)$ | $n$ | $f^{(n)}(x)$ | $f^{(n)}(0)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\sin x$ | 0 | 4 | $\sin x$ | 0 | 8 | $\sin x$ | 0 |
| 1 | $\cos x$ | 1 | 5 | $\cos x$ | 1 | 9 | $\cos x$ | 1 |
| 2 | $-\sin x$ | 0 | 6 | $-\sin x$ | 0 | 10 | $-\sin x$ | 0 |
| 3 | $-\cos x$ | $-1$ | 7 | $-\cos x$ | $-1$ | 11 | $-\cos x$ | $-1$ |

Torej je

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= 0, & T_1(x) &= x,\\
T_2(x) &= T_1(x), & T_3(x) &= x - \tfrac{x^3}{3!},\\
T_4(x) &= T_3(x), & T_5(x) &= x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!},\\
T_6(x) &= T_5(x), & T_7(x) &= x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \tfrac{x^7}{7!},\\
T_8(x) &= T_7(x), & T_9(x) &= x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \tfrac{x^7}{7!} + \tfrac{x^9}{9!},\\
T_{10}(x) &= T_9(x), & T_{11}(x) &= x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \tfrac{x^7}{7!} + \tfrac{x^9}{9!} - \tfrac{x^{11}}{11!}.
\end{aligned}$$

Narišimo polinome $T_1, T_3, T_5, T_7, T_9, T_{11}$. Vsi so lihe funkcije, zato so njihovi grafi simetrični glede na izhodišče. Isto velja za funkcijo $f$.




Ko stopnja Taylorjevega polinoma narašča, se njegov graf v bližini točke $(a, f(a))$ čedalje bolj prilega grafu funkcije $f$. Kasneje bomo spoznali, da to velja tudi pri mnogih drugih funkcijah, ne pa pri vseh.

## 6.4. Taylorjev izrek

V prejšnjem razdelku smo omenili, da se grafi Taylorjevih polinomov funkcije $f$ v točki $a$ običajno dobro prilegajo grafu funkcije $f$, dokler smo v bližini točke $(a, f(a))$. Da bi ugotovili, kako natančno je to ujemanje, potrebujemo formulo za razliko $f(x) - T_n(x)$. To formulo nam da Taylorjev izrek. Kako to formulo uporabljamo, se bomo naučili v naslednjem razdelku.

**Taylorjev izrek. Če je funkcija $f$ definirana in $n+1$ krat odvedljiva na povezani množici $I$, potem za poljubni točki $a$ in $x$ iz $I$ obstaja taka točka $c$ med $a$ in $x$, da velja**

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

**kjer je $T_n$ $n$-ti Taylorjev polinom funkcije $f$ v točki $a$, tj.**

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Dokaz: Preverimo, da funkcija

$$g(t) = \big(f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(t)}{i!}(x-t)^i\big)(x-a)^{n+1} - \big(f(x) - T_n(x)\big)(x-t)^{n+1}$$

zadošča predpostavkam Rolleovega izreka. Velja $g(a) = 0$, $g(x) = 0$ in funkcija $g$ je odvedljiva na $I$, saj velja

$$g'(t) = \big(f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(t)}{i!}(x-t)^i\big)'(x-a)^{n+1} - \big(f(x) - T_n(x)\big)\big((x-t)^{n+1}\big)'$$

$$= \big( - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\big)(x-a)^{n+1} - \big(f(x) - T_n(x)\big)(-n-1)(x-t)^n$$

$$= (n+1)(x-t)^{n+1}\big(f(x) - T_n(x) - \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\big)$$

za vsak $t \in I$. Pri drugem enačaju smo upoštevali, da je

$$\big(f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(t)}{i!}(x-t)^i\big)' = -\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i+1)}(t)}{i!}(x-t)^i - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(t)}{i!}(-i)(x-t)^{i-1}$$

in da po krajšanju ostane samo en člen, namreč $-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$. Bralca ne sme zmesti, da smo povsod odvajali po $t$ in ne po $x$. Rolleov izrek nam sedaj pove, da obstaja taka točka $c$ med $a$ in $x$, da velja $g'(c) = 0$. Ko v formulo za $g'(t)$ vstavimo $t = c$ in pokrajšamo $(n+1)(x-c)^{n+1}$, ostane

$$f(x) - T_n(x) - \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = 0,$$

kar smo želeli dokazati. □

Oglejmo si preprost primer uporabe Taylorjevega izreka v fiziki.

**Primer.** Delec se giblje po realni osi s konstantnim pospeškom $a$. Njegova lega v danem trenutku $t_0$ je $s_0$, njegova hitrost v trenutku $t_0$ pa je $v_0$. Kje se delec nahaja v poljubnem trenutku $t$?

Označimo s $s(t)$ lego delca v trenutku $t$. Po Taylorjevem izreku obstaja tak trenutek $c$ med trenutkoma $t_0$ in $t$, da je $s(t) = s(t_0) + s'(t_0)(t-t_0) + \frac{s''(c)}{2}(t-t_0)^2$. Iz podatkov razberemo, da je $s(t_0) = s_0$, $s'(t_0) = v_0$ in $s''(t) = a$ za vsak $t$. Spomnimo se, da je hitrost prvi odvod lege, pospešek pa drugi odvod lege. Odtod sledi, da je

$$s(t) = s_0 + v_0(t-t_0) + \frac{a}{2}(t-t_0)^2.$$

## 6.5. Približno računanje s Taylorjevim izrekom

Taylorjev izrek je zelo uporaben za približno računanje vrednosti funkcij. Oglejmo si dva primera.

**Primer.** Poiščimo kako $\epsilon$-okolico izhodišča, na kateri se $\sin x$ ujema s $T_4(x) = x - \frac{x^3}{6}$ na vsaj tri decimalke natančno.

Iščemo tak $\epsilon$, da velja $|\sin x - T_4(x)| < 10^{-3}$ za vsak $x \in (-\epsilon, \epsilon)$. Če uporabimo Taylorjev izrek z $f(x) = \sin x$, $a = 0$ in $n = 4$, zvemo, da obstaja tak $c$ med 0 in $x$, da velja $\sin x - T_4(x) = \frac{\sin c}{5!}x^5$. Ker je $-1 \leq \sin c \leq 1$, odtod sledi, da za vsak $x \in (-\epsilon, \epsilon)$ velja

$$|\sin x - T_4(x)| = \frac{|\sin c|}{5!}|x|^5 \leq \frac{1}{5!}|x|^5 < \frac{1}{5!}\epsilon^5.$$

Če rešimo enačbo $\frac{1}{5!}\epsilon^5 = 10^{-3}$, dobimo približno $\epsilon = 0.654389$. Za iskani $\epsilon$ lahko vzamemo tudi katerokoli manjše število, na primer $\epsilon = 0.6$.

**Primer.** Kako velik mora biti $n$, da se funkcija $\sin x$ in njen $2n$-ti Taylorjev polinom v 0 ujemata na sedem decimalk natančno za vsak $x$ med $-\frac{\pi}{2}$ in $\frac{\pi}{2}$?

Vemo, da je $2n$-ti Taylorjev polinom funkcije $\sin x$ v točki 0 enak

$$T_{2n}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

S pomočjo Taylorjevega izreka lahko tako kot v prejšnjem primeru pokažemo, da je

$$|\sin x - T_{2n}(x)| \leq \frac{1}{(2n+1)!}|x|^{2n+1} \leq \frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}.$$

Tabeliramo izraz na desni za $n = 0, 1, 2, \ldots$, dokler ne dobimo vrednosti, ki je manjša od $10^{-7}$. Prva vrednost, pri kateri se to zgodi, je $n = 6$. Velja namreč

$$\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} = \frac{1}{13!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{13} \approx 5.7 \cdot 10^{-8} < 10^{-7}.$$

Torej je $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}$ na sedem decimalk natančno za vsak $x$ med $-\frac{\pi}{2}$ in $\frac{\pi}{2}$.

Kadar se da funkcija $f(x)$ na neki $\epsilon$-okolici točke $a$ poljubno natančno izračunati s pomočjo svojih Taylorjevih polinomov

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

tedaj velja

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) \quad \text{za vsak} \quad x \in O(a,\epsilon).$$

V tem primeru pravimo, da se da funkcija $f(x)$ **razviti v Taylorjevo vrsto** okrog točke $x = a$ in pišemo

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots$$

**Primer.** S pomočjo Taylorjevega izreka se da s podobnim sklepanjem kot v gornjih dveh primerih dokazati, da velja

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots \quad \text{za vsak} \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\sin x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \ldots \quad \text{za vsak} \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} x^{2j} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \ldots \quad \text{za vsak} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nekoliko težje je dokazati, da velja

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad \text{za vsak} \quad x \in (-1,1)$$

ter da za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$ in vsak $x \in (-1,1)$ velja

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \ldots.$$

Žal obstajajo tudi funkcije, ki se ne dajo poljubno natančno izračunati s pomočjo svojih Taylorjevih polinomov.

**Primer.** Za funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

lahko pokažemo, da je $f^{(k)}(0) = 0$ za vsak $k$. Torej je $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = \lim_{n\to 0} 0 = 0$, kar pa ni enako $f(x)$ za noben $x \neq 0$.

## 6.6. Računanje limit s Taylorjevim izrekom

Pri računanju limit je zelo priročna naslednja posledica Taylorjevega izreka.

**Trditev. Če je $n$-ti odvod funkcije $f$ definiran in zvezen na neki okolici točke $a$, potem je**

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

**kjer je $T_n$ $n$-ti Taylorjev polinom funkcije $f$ v točki $a$.**

Dokaz: Po Taylorjevem izreku za vsak $x$ obstaja tak $c$ med 0 in $x$, da velja $f(x) - T_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$. Potem je

$$f(x)-T_n(x) = f(x)-T_{n-1}(x) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \frac{f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Odtod sledi

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} = \frac{1}{n!} \lim_{x\to a} \left(f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a)\right) = 0.$$

Pri zadnjem koraku smo upoštevali da, ko gre $x$ proti $a$, gre tudi $c$ proti $a$, zato je zaradi zveznosti $f^{(n)}$ v $a$ tudi $\lim\limits_{x\to 0} f^{(n)}(c) = f^{(n)}(a)$. □

Razliki $f(x) - T_n(x)$ pravimo **ostanek** $n$-tega Taylorjevega polinoma funkcije $f$ v točki $a$. Označimo jo z $R_n(x)$.

Poglejmo si uporabo posledice na dveh primerih.

**Primer.** Izračunajmo limito

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x} - 1 + x}{x^2}.$$

Ker je v imenovalcu $x^2$, poiščemo najprej drugi Taylorjev polinom funkcije $\sqrt{1-2x}$ v točki $a = 0$:

$$T_2(x) = 1 - x - \frac{x^2}{2}.$$

Ko v limito vstavimo $\sqrt{1-2x} = T_2(x) + R_2(x)$, dobimo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x} - 1 + x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - x - \frac{x^2}{2} + R_2(x) - 1 + x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + R_2(x)}{x^2} = -\frac{1}{2} + \lim_{x\to 0} \frac{R_2(x)}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

V zadnjem koraku smo upoštevali, da velja $\lim\limits_{x\to 0} R_2(x)/x^2 = 0$.

**Primer.** Izračunajmo limito

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x-\frac{1}{2}x\sin x}{x^4}.$$

Ker je v imenovalcu $x^4$, poiščemo najprej četrta Taylorjeva polinoma funkcij sinus in kosinus. To sta

$$T_4(x)=x-\frac{1}{6}x^3 \quad \text{in} \quad \tilde{T}_4(x)=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4.$$

Ko v limito vstavimo $\sin x=T_4(x)+R_4(x)$ in $\cos x=\tilde{T}_4(x)+\tilde{R}_4(x)$, dobimo

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x-\frac{1}{2}x\sin x}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\tilde{R}_4(x))-\frac{1}{2}x(x-\frac{1}{6}x^3+R_4(x))}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{24}x^4-\tilde{R}_4(x)-\frac{1}{2}xR_4(x)}{x^4}=$$

$$=\frac{1}{24}-\lim_{x\to 0}\frac{\tilde{R}_4(x)}{x^4}+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}x\lim_{x\to 0}\frac{R_4(x)}{x^4}=\frac{1}{24}.$$

V zadnjem koraku smo upoštevali, da po gornji posledici Taylorjevega izreka velja

$$\lim_{x\to 0}\frac{R_4(x)}{x^4}=0 \quad \text{in} \quad \lim_{x\to a}\frac{\tilde{R}_4(x)}{x^4}=0.$$

## 6.7. Določanje ekstremov in prevojev s Taylorjevim izrekom

Recimo, da je drugi odvod funkcije $f$ definiran in zvezen v okolici točke $a$. V prejšnjem poglavju smo dokazali tole:

- če ima $f$ lokalni ekstrem v točki $(a, f(a))$, potem je $f'(a)=0$;
- če je $f'(a)=0$ in $f''(a)\neq 0$, potem ima $f$ lokalni ekstrem v točki $(a, f(a))$;
- če ima $f$ prevoj v točki $(a, f(a))$, potem je $f''(a)=0$.

V tem razdelku nas bo zanimalo, kaj je zadostni pogoj za lokalni ekstrem, če je $f'(a)=0$ in $f''(a)=0$ in kaj je zadostni pogoj za prevoj. V tem primeru si moramo pomagati z višjimi odvodi funkcije $f$ v točki $a$.

Oglejmo si najprej kriterij s tretjim odvodom.

**Trditev. Če je tretji odvod funkcije $f$ definiran in zvezen v okolici točke $a$ ter velja $f''(a)=0$ in $f'''(a)\neq 0$, potem je $(a, f(a))$ prevojna točka funkcije $f$.**

Dokaz: Po Taylorjevem izreku velja $f(x) = T_2(x)+R_2(x)$, kjer je $T_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$ in $R_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!}(x-a)^3$ za nek $c$ med $x$ in $a$. Ker je po predpostavki $f''(a) = 0$, je $T_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$. Ker je po predpostavki $f'''$ definiran in zvezen v okolici točke $a$ in velja $f'''(a) \neq 0$, sledi, da je na neki manjši okolici točke $a$ funkcija $f'''(x)$ konstantnega predznaka. Ko gre $x$ skozi točko $a$, torej $f'''(x)$ ne spremeni predznaka. Pač pa pri prehodu $x$ skozi $a$ spremeni predznak funkcija $(x-a)^3$. Odtod sledi, da pri prehodu $x$ skozi $a$ spremeni predznak tudi funkcija $R_2(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$. Ker torej funkcija $y = f(x)$ v točki $x = a$ preide na drugo stran svoje tangente $y = f(a) + f'(a)(x-a)$, je točka $(a, f(a))$ res njen prevoj. □

Zadnji rezultat ima zanimivo posledico.

**Trditev. Če je tretji odvod funkcije $f$ definiran in zvezen v okolici točke $a$ ter velja $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ in $f'''(a) \neq 0$, potem točka $(a, f(a))$ ni lokalni ekstrem funkcije $f$.**

Oba rezultata se dasta posplošiti tudi na višje odvode. Posplošitev prvega rezultata je naslednja trditev.

**Trditev. Če je $n$-ti odvod funkcije $f$ definiran in zvezen v okolici točke $a$ ter velja $f''(a) = f'''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ in $f^{(n)}(a) \neq 0$, potem imamo dve možnosti:**

- **če je $n$ liho število, potem ima funkcija $f$ prevoj v točki $(a, f(a))$;**
- **če je $n$ sodo število, potem funkcija $f$ nima prevoja v točki $(a, f(a))$.**

Zapišimo še posplošitev drugega rezultata.

**Trditev. Če je $n$-ti odvod funkcije $f$ definiran in zvezen v okolici točke $a$ ter velja $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ in $f^{(n)}(a) \neq 0$, potem imamo dve možnosti:**

- **če je $n$ liho število, potem funkcija $f$ nima lokalnega ekstrema v točki $(a, f(a))$;**
- **če je $n$ sodo število, potem ima funkcija $f$ lokalni ekstrem v točki $(a, f(a))$: lokalni minimum, če je $f^{(n)}(a) > 0$, oziroma lokalni maksimum, če je $f^{(n)}(a) < 0$.**

V primeru, ko je $f^{(i)}(a) = 0$ za vsak $i = 1, 2, 3, \ldots$, nam ta rezultat seveda ne koristi. Na srečo ta primer v praksi redko nastopa.

## 6.8. Vprašanja za ponavljanje

(1) (L'Hospitalovo pravilo)
   (a) Kaj pravi Cauchyjev izrek?
   (b) Kaj pravi L'Hospitalovo pravilo? Izpelji ga iz Cauchyjevega izreka!
   (c) Dokaži, da velja $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2} = f''(x)$!

(2) (Sekante in tangente, interpolacijski in Taylorjev polinom) Naj bo $y = f(x)$ taka dvakrat odvedljiva funkcija, ki je definirana v vseh točkah "blizu" $a$ in naj bo $h$ "majhno" število!
   (a) Izpelji enačbo premice, ki gre skozi točki $(a, f(a))$ in $(a + h, f(a + h))$.
   (b) V enačbi iz točke $(a)$ pošlji $h$ proti nič!
   (c) Izpelji enačbo kvadratne parabole, ki gre skozi točke $(a, f(a))$, $(a + h, f(a + h))$ in $(a + 2h, f(a + 2h))$!
   (d) V enačbi iz točke $(c)$ pošlji $h$ proti nič!

(3) (Taylorjev izrek)
   (a) Kaj je $n$-ti Taylorjev polinom?
   (b) Določi četrti Taylorjev polinom funkcije $y = e^x$ v točki 0!
   (c) Kaj pravi Taylorjev izrek?
   (d) Poišči tak $\epsilon > 0$, da se bo na intervalu $(-\epsilon, \epsilon)$ funkcija $y = e^x$ ujemala s polinomom iz (b) na vsaj dve decimalki natančno!

(4) (Uporaba Taylorjevega izreka)
   (a) Kako nam pomaga Taylorjev izrek pri določanju prevojev? Pojasni na primeru!
   (b) Kako nam pomaga Taylorjev izrek pri določanju lokalnih ekstremov? Pojasni na primeru!
   (c) Kako nam pomaga Taylorjev izrek pri računanju limit? Pojasni na primeru!

# Del 3

# Integrali

POGLAVJE 7

# Nedoločeni integral

## 7.1. Definicija, enoličnost, obstoj

**Funkcija $\boldsymbol{F(x)}$ je nedoločeni integral funkcije $\boldsymbol{f(x)}$, če velja $\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$ za vsak $\boldsymbol{x \in D(f)}$. V tem primeru pišemo $\boldsymbol{F(x) = \int f(x)\,dx}$.**

Kaj vemo o enoličnosti nedoločenega integrala?

• Kot že ime pove, nedoločeni integral ni nikoli natanko določen, saj je za vsak nedoločeni integral $F$ funkcije $f$ in za vsako konstanto $C$ tudi $F + C$ nedoločeni integral funkcije $f$.

• Kadar je $D(f)$ povezana množica, dobimo na ta način vse nedoločene integrale funkcije $f$. Če je namreč $G$ kak drug nedoločeni integral funkcije $f$, potem velja $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$. Ker je $D(f)$ povezana, lahko uporabimo posledico Lagrangeovega izreka, ki pove, da je $G - F$ konstantna funkcija. Torej je funkcija $G$ vsota funkcije $F$ in konstantne funkcije, se pravi $G(x) = F(x) + C$.

**Primer.** Poiščimo vse nedoločene integrale funkcije $f(x) = x^3$. Vzemimo $F(x) = \frac{x^4}{4}$. Potem za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $F'(x) = f(x)$. Torej je funkcija $\frac{x^4}{4}$ nedoločeni integral funkcije $x^3$, tj.

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4}.$$

Tudi funkciji $\frac{x^4}{4} + 1$ in $\frac{x^4}{2} - 0.7$ sta nedoločena integrala funkcije $x^3$, saj velja $\left(\frac{x^4}{4} + 1\right)' = x^3$ in $\left(\frac{x^4}{4} - 0.7\right)' = x^3$, tako da lahko pišemo tudi

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + 1 \quad \text{in} \quad \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} - 0.7.$$

Ker je $D(f)$ povezana množica, so vsi nedoločeni integrali funkcije $x^3$ oblike

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C,$$

kjer je $C$ poljubna konstanta.

Oglejmo si še primer, ko definicijsko območje ni povezana množica.

**Primer.** Velja

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \begin{cases} \ln x + C_1, & x > 0, \\ \ln(-x) + C_2, & x < 0, \end{cases}$$

kjer sta $C_1$ in $C_2$ konstanti. Včasih pišemo tudi

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C,$$

vendar se moramo zavedati, da je v tem primeru

$$C = C(x) = \begin{cases} C_1, & x > 0, \\ C_2, & x < 0, \end{cases}$$

funkcija, ki ni konstantna na vsej realni osi, čeprav je konstantna tako na poltraku $x > 0$ kot na poltraku $x < 0$.

Kaj vemo o obstoju nedoločenega integrala?

• Vsaka zvezna funkcija ima nedoločeni integral, če njeno definicijsko območje ni preveč grdo. To bomo dokazali v poglavju o določenih integralih.

• Tudi nekatere funkcije, ki niso zvezne, imajo nedoločeni integral.

**Primer.** Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin(1/x) - \cos(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

ni zvezna, vendar ima nedoločeni integral. Eden je

$$F(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

v splošnem pa velja $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

• Obstajajo funkcije, ki nimajo niti enega nedoločenega integrala. To bomo dokazali v naslednjem razdelku.

• Nedoločeni integral je običajno bistveno težje izračunati kot odvod. Nedoločeni integral elementarne funkcije namreč sploh ni nujno elementarna funkcija.

**Primer.** Funkcija $f(x) = e^{-x^2}$ je elementarna in ima nedoločeni integral, saj je $f$ zvezna funkcija. Vendar se izkaže, da nedoločeni integral funkcije $f$ ni elementarna funkcija. (Tega ne bomo dokazali.)

## 7.2. Lastnost vmesnih vrednosti

V tem razdelku bomo pokazali, da funkcija $\operatorname{sgn}(x)$ nima nedoločenega integrala. To bomo storili tako, da bomo definirali lastnost vmesnih vrednosti in dokazali dvoje:

- funkcija $\operatorname{sgn}(x)$ nima lastnosti vmesnih vrednosti;
- vsaka funkcija, ki ima nedoločeni integral, ima lastnost vmesnih vrednosti.

Pravimo, da ima funkcija $f$ **lastnost vmesnih vrednosti**, če za poljuben interval $[a, b] \subseteq D(f)$ in za poljubno število $d$ med $f(a)$ in $f(b)$ obstaja tako število $c \in [a, b]$, da je $f(c) = d$.

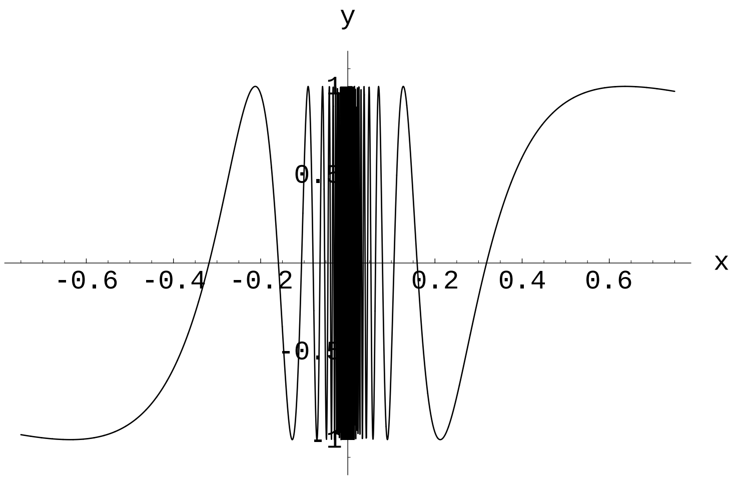
**Primer.** Funkcija $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ nima lastnosti vmesnih vrednosti. Vzemimo namreč $a = -1$, $b = 1$ in $d = \frac{1}{2}$. Potem velja $[a, b] \subseteq D(f)$, saj je $D(f) = \mathbb{R}$, in $d$ leži strogo med $f(-1) = -1$ in $f(1) = 1$. Vendar $d \notin Z(f)$, ker je $Z(f) = \{-1, 0, 1\}$. Zato ne more obstajati tak $c \in [a, b]$, da bi veljalo $f(c) = d$.

V razdelku o bisekciji smo pokazali, da ima vsaka zvezna funkcija lastnost vmesnih vrednosti. Obrat te trditve ne drži, kot pokaže naslednji primer.

**Primer.** Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

ni zvezna, vendar ima lastnost vmesnih vrednosti, kar se najlažje vidi iz grafa.




Vzemimo poljubna $a, b \in \mathbb{R}$ in poljuben $d$ med $f(a)$ in $f(b)$. Če sta $a$ in $b$ na isti strani ničle, potem je $f|_{[a,b]}$ zvezna. Ker imajo zvezne funkcije lastnost vmesnih vrednosti, obstaja tak $c \in [a,b]$, da velja $f(c) = d$. Če pa sta $a$ in $b$ bodisi na različnih straneh ničle bodisi je eden od njiju enak nič, potem funkcija $f|_{[a,b]}$ zavzame vse vrednosti med $-1$ in $1$, torej tudi vrednost $d$. Torej tudi v tem primeru obstaja tak $c \in [a,b]$, da velja $f(c) = d$.

**Trditev. Funkcija, ki ima nedoločeni integral, ima lastnost vmesnih vrednosti.**

Dokaz: Recimo, da ima funkcija $f$ nedoločeni integral $F$. Vzemimo poljuben interval $[a,b] \subseteq D(f)$ in poljubno število $d$ med $f(a)$ in $f(b)$. Radi bi dokazali, da obstaja tak element $c \in [a,b]$, da velja $f(c) = d$. Če je $d$ enak $f(a)$ oziroma $f(b)$, potem lahko vzamemo $c = a$ oziroma $c = b$, zato se bomo v nadaljevanju omejili na primer, ko je $d$ strogo med $f(a)$ in $f(b)$.

Oglejmo si funkcijo $g(x) = F(x) - d\,x$. Ker je $F$ odvedljiva, je tudi $g$ odvedljiva in zato zvezna na $[a,b]$. Odtod sledi, da $g(x)$ v neki točki $c_1 \in [a,b]$ zavzame minimum, v neki točki $c_2 \in [a,b]$ pa maksimum. Ločimo več primerov.

Če je $c_1 \in (a,b)$, potem lahko vzamemo $c = c_1$. Po Fermatovem izreku namreč velja $0 = F'(c_1)$. Ker je $F'(x) = f(x) - d$, sledi $f(c_1) = d$, kar smo želeli pokazati. Če je $c_2 \in (a,b)$, potem lahko vzamemo $c = c_2$. Če je $c_1 = c_2 = a$ ali $c_1 = c_2 = b$, potem je $g$ konstantna, zato lahko vzamemo $c = (a+b)/2$.

Če je $c_1 = a$ in $c_2 = b$, potem za vsak $x \in [a,b]$ velja $g(a) \leq g(x) \leq g(b)$. Iz prve neenakosti dobimo $d \leq \frac{F(x)-F(a)}{x-a}$ iz druge pa $d \leq \frac{F(b)-F(x)}{b-x}$ za vsak $x \in (a,b)$. V limiti dobimo $d \leq f(a)$ in $d \leq f(b)$, kar je protislovje, saj $d$ leži strogo med $f(a)$ in $f(b)$. Torej ta primer ne nastopa. Podobno pokažemo, da tudi primer, ko je $c_1 = b$ in $c_2 = a$, ne nastopa. □

## 7.3. Linearnost, Tabela nedoločenih integralov

Iz definicije nedoločenega integrala

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad \text{kjer} \qquad F'(x) = f(x),$$

sledi, da lahko tabelo osnovnih nedoločenih integralov dobimo tako, da zamenjamo stolpca v tabeli osnovnih odvodov. Malce skrajšana verzija je spodaj.

| $f(x)$ | $\int f(x)\,dx$ |
|---|---|
| $x^\alpha, (\alpha \neq -1)$ | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln\lvert x\rvert + C$ |
| $e^x$ | $e^x + C$ |
| $a^x$ | $\frac{a^x}{\ln a} + C$ |
| $\cos x$ | $\sin x + C$ |
| $\sin x$ | $-\cos x + C$ |
| $\frac{1}{1+x^2}$ | $\operatorname{arctg} x + C$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arcsin x + C$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2+k}}$ | $\ln(x + \sqrt{x^2+k}) + C$ |

Za vajo dokažimo zadnjo vrstico:

$$(\ln(x+\sqrt{x^2+k})+C)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+k}} \cdot (1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+k}} \cdot 2x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}.$$

Kot posebna primera zadnje vrstice imamo formuli

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \operatorname{arsh} x + C \quad \text{in} \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arch} x + C.$$

Včasih se pod osnovne štejejo tudi naslednji integrali.

| $f(x)$ | $\int f(x)\,dx$ |
|---|---|
| $\frac{1}{(\cos x)^2}$ | $\operatorname{tg} x + C$ |
| $\frac{1}{(\sin x)^2}$ | $-\operatorname{ctg} x + C$ |
| $\frac{1}{1-x^2}$ | $\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert + C$ |
| $\operatorname{ch} x$ | $\operatorname{sh} x + C$ |
| $\operatorname{sh} x$ | $\operatorname{ch} x + C$ |
| $\frac{1}{(\operatorname{ch} x)^2}$ | $\operatorname{th} x + C$ |
| $\frac{1}{(\operatorname{sh} x)^2}$ | $-\operatorname{cth} x + C$ |

Iz formul v osnovni tabelici lahko sestavljamo nove formule s pomočjo naslednjih dveh pravil.

**Linearnost nedoločenega integrala. Če sta $f$ in $g$ poljubni funkciji, ki imata nedoločena integrala in je $A$ poljubna konstanta, potem velja**

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx,$$

**in**

$$\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx.$$

Dokaz: Če je $F$ nedoločeni integral funkcije $f$ in $G$ nedoločeni integral funkcije $g$, potem je $F+G$ nedoločeni integral funkcije $f+g$, saj velja $(F+G)' = F' + G' = f + g$. Ali je vsak nedoločeni integral funkcije $f+g$ take oblike? Da, če je $D(f)\cap D(g)$ povezana množica.

Če je $F$ nedoločeni integral funkcije $f$, potem je $AF$ nedoločeni integral funkcije $f$, saj velja $(AF)' = AF' = Af$. Ali je vsak nedoločeni integral funkcije $Af$ take oblike? Da, če je $A \neq 0$. □

**Primer.** Izračunajmo nedoločeni integral funkcije

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + 7.$$

S pomočjo formule $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ dobimo

$$\int f(x)\,dx = 2\int x^3\,dx - \int x^2\,dx + 7\int 1\,dx =$$

$$= 2(\frac{x^4}{4} + C_1) - (\frac{x^3}{3} + C_2) + 7(x + C_3) = 2\cdot\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 7x + C.$$

Račun lahko malce skrajšamo, če ne pišemo konstant $C_1, C_2, C_3$, ampak jih takoj združimo v novo konstanto $C$, ki jo pišemo na koncu. Torej predzadnji korak v računu ni potreben.

S primerom se prepričajmo, da nedoločeni integral produkta dveh funkcij ni produkt njunih nedoločenih integralov.

**Primer.** Pokažimo, da

$$\int x^2\,dx \neq \int x\,dx \cdot \int x\,dx.$$

Leva stran je namreč enaka $\frac{x^3}{3} + C$, desna pa $(\frac{x^2}{2} + C_1)(\frac{x^2}{2} + C_2)$. Torej je leva stran polinom tretje stopnje, desna pa polinom četrte stopnje. Polinoma različnih stopenj pa nikoli nista enaka.

## 7.4. Uvedba nove spremenljivke

Kadar želimo izračunati kak nedoločeni integral, ki ga ni v tabeli osnovnih integralov, ga najprej poskusimo z zamenjavo spremenljivk prevesti na integral iz tabele.

Če je funkcija $F(x)$ nedoločeni integral funkcije $f(x)$ in če je $x = \phi(t)$, potem po formuli za posredno odvajanje velja

$$F(\phi(t))' = F'(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t).$$

Torej je $F(\phi(t))$ nedoločeni integral funkcije $f(\phi(t))\phi'(t)$. Iz $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ tako sledi $\int f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = F(\phi(t))+C$. Ker je $F(x)+C = (F(\phi(t)) + C)\big|_{t=\phi^{-1}(x)}$ za vsak $x \in Z(\phi)$, smo dobili naslednjo trditev.

**Uvedba nove spremenljivke v nedoločenem integralu. Če ima funkcija $f$ nedoločeni integral, potem za vsako odvedljivo in injektivno funkcijo $\phi$, ki zadošča $Z(\phi) = D(f)$, velja**

$$\int f(x)\,dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)\,dt\Big|_{t=\phi^{-1}(x)}.$$

Oglejmo si nekaj primerov.

**Primer.** Izračunajmo integral

$$\int (3x-1)^{17}\,dx.$$

Ta integral znamo izračunati tudi direktno, vendar je krajše, če uvedemo novo spremenljivko $t = 3x - 1$. V zgornjo formulo vstavimo

$$f(x) = (3x-1)^{17}, \quad t = 3x - 1 = \phi^{-1}(x) \quad \text{in} \quad x = \frac{t+1}{3} = \phi(t).$$

Dobimo

$$\int (3x-1)^{17}\,dx = \int t^{17}(\frac{t+1}{3})'\,dt\Big|_{t=3x-1} = \frac{1}{3}\int t^{17}\,dt\Big|_{t=3x-1} =$$

$$= \frac{1}{3}(\frac{t^{18}}{18} + C)\Big|_{t=3x-1} = \frac{1}{54}(3x-1)^{18} + C_1.$$

**Primer.** Izračunajmo integral

$$\int \sin(5x+3)\,dx.$$

Tega integrala ni v tabeli, je pa zelo podoben integralu $\int \sin t\,dt = -\cos t + C$. Zato se odločimo, da bomo uvedli novo spremenjivko

$t = 5x + 3$. V zgornjo formulo vstavimo

$$f(x) = \sin(5x+3), \quad t = 5x+3 = \phi^{-1}(x) \quad \text{in} \quad x = \frac{t-3}{5} = \phi(t).$$

Dobimo

$$\int \sin(5x+3)\, dx = \int \sin t \cdot (\frac{t-3}{5})'\, dt\Big|_{t=5x+3} = \frac{1}{5}\int \sin t\, dt\Big|_{t=5x+3} =$$

$$= \frac{1}{5}(-\cos t + C)\Big|_{t=5x+3} = -\frac{\cos(5x+3)}{5} + C_1.$$

Včasih je bolj praktično, če v formuli za uvedbo nove spremenljivke zamenjamo $x$ in $t$ ter jo preuredimo v

$$\int f(\psi(x))\psi'(x)\, dx = \int f(t) dt\Big|_{t=\psi(x)}.$$

**Primer.** Izračunajmo integral

$$\int \frac{x}{1+x^4}\, dx.$$

Vpeljimo novo spremenljivko $t = x^2 = \psi(x)$. Dobimo

$$\int \frac{x}{1+x^4}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+(x^2)^2}\,(x^2)'\, dx = \int \frac{1}{1+t^2}\, dt\Big|_{t=x^2} =$$

$$= (\operatorname{arctg} t + C)\Big|_{t=x^2} = \operatorname{arctg}(x^2) + C.$$

## 7.5. Integracija po delih

Druga metoda za poenostavljanje nedoločenih integralov je integracija po delih. Nanjo pomislimo v primeru, ko je funkcija, ki jo integriramo, produkt dveh "enostavnih"funkcij.

Iz formule $\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ za odvajanje produkta sledi $\int \big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big)\, dx = f(x)g(x) + C$. Odtod izrazimo $\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - (\int f'(x)g(x)\, dx - C)$. Konstanto lahko opustimo, saj je nedoločeni integral določen samo do konstante natančno. Dobimo naslednjo trditev.

**Integracija po delih za nedoločene integrale. Če sta $f$ in $g$ zvezno odvedljivi funkciji, potem je**

$$\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx.$$

**Primer.** Izračunajmo integral

$$\int x\cos x\,dx.$$

V formulo za integracijo po delih vstavimo $f(x) = x$ in $g'(x) = \cos x$. Odtod izračunamo, da je $f'(x) = 1$ in $g(x) = \sin x$. Lahko bi h $g(x)$ prišteli še poljubno konstanto, vendar to ni potrebno. Sledi

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int 1\cdot\sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.$$

**Primer.** Izračunajmo integral

$$I = \int x^2 e^x\,dx.$$

Najprej uporabimo formulo za integracijo po delih z $f(x) = x^2$ in $g'(x) = e^x$. Ker je $f'(x) = 2x$ in $g(x) = e^x$, imamo

$$I = x^2e^x - \int 2xe^x.$$

Sedaj še enkrat uporabimo formulo za integracijo po delih. Tokrat z $f(x) = 2x$ in $g'(x) = e^x$, tako da je $f'(x) = 2$ in $g(x) = e^x$.

$$I = x^2e^x - (2xe^x - \int 2e^x\,dx) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

Zelo zanimiv je tudi naslednji primer uporabe.

**Primer.** Izračunajmo integral

$$I = \int \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Uporabimo formulo za integracijo po delih z $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ in $g'(x) = 1$. Ker je $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ in $g(x) = x$, imamo

$$I = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,x\,dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\sqrt{1-x^2} - I + \arcsin x + C.$$

Odtod lahko izrazimo

$$I = \frac{1}{2}\big(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C\big) = \frac{1}{2}\big(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\big) + C_1.$$

## 7.6. Razcep racionalne funkcije na parcialne ulomke

Racionalnim funkcijam posebne oblike

$$\frac{A}{(x-a)^m} \quad \text{ali} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n},$$

kjer $b^2 - 4c < 0$ pravimo **parcialni ulomki**. Izkaže se, da lahko vsako racionalno funkcijo $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, pri kateri je števec nižje stopnje kot imenovalec, razcepimo na vsoto parcialnih ulomkov in celo, da je tak razcep enoličen.

Za iskanje razcepa na parcialne ulomke obstaja recept, ki si ga bomo najprej ogledali v splošnem, nato pa še na primerih. Na koncu razdelka bomo povedali tudi, kaj storiti v primeru, ko je stopnja števca večja ali enaka stopnji imenovalca.

Prvi korak je, da imenovalec $q(x)$ razcepimo na produkt linearnih in kvadratnih polinomov, nato pa iz vsakega faktorja izpostavimo vodilni koeficient. Dobimo

$$q(x) = q_0 \prod_{i=1}^{k} (x-a_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{l} (x^2+b_jx+c_j)^{n_j},$$

kjer je $q_0$ vodilni koeficient polinoma $q(x)$. Drugi korak je iskanje nastavka za razcep na parcialne ulomke. Vsak faktor $(x-a_i)^{m_i}$ prispeva k nastavku vsoto

$$\frac{A_{i,1}}{x-a_i} + \frac{A_{i,2}}{(x-a_i)^2} + \ldots + \frac{A_{i,m_i}}{(x-a_i)^{m_i}},$$

kjer so $A_{i,1}, A_{i,2}, \ldots, A_{i,m_i}$ neznane konstante. Vsak kvadratni faktor $(x^2+b_jx+c_j)^{n_j}$ pa prispeva k nastavku vsoto

$$\frac{B_{j,1}x+C_{j,1}}{x^2+b_jx+c_j} + \frac{B_{j,2}x+C_{j,2}}{(x^2+b_jx+c_j)^2} + \ldots + \frac{B_{j,n_j}x+C_{j,n_j}}{(x^2+b_jx+c_j)^{n_j}},$$

kjer so $B_{j,1}, C_{j,1}, B_{j,2}, C_{j,2}, \ldots, B_{j,n_j}, C_{j,n_j}$ neznane konstante.

Tretji korak je določanje neznanih konstant. Najprej nastavek pomnožimo s $q(x)$, odpravimo oklepaje in uredimo. Dobimo nek polinom, katerega koeficienti so izrazi v neznanih konstantah. Ta polinom je enak polinomu $p(x)$, torej se morajo ujemati tudi vsi koeficienti teh dveh polinomov. Za neznane koeficiente tako dobimo sistem enačb.

Četrti korak je reševanje dobljenega sistema enačb. Pri tem si pomagamo z metodo zaporednega izločanja spremenljivk.

**Primer.** Velja

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

Ko pomnožimo z $(x-1)(x+1)$, dobimo

$$-1 = A(x+1) + B(x-1) = (A+B)x + (A-B),$$

odkoder dobimo sistem dveh enačb

$$A + B = 0 \quad \text{in} \quad A - B = -1.$$

Rešitev tega sistema je $A = -\frac{1}{2}$ in $B = \frac{1}{2}$, torej je

$$\frac{1}{1-x^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1}.$$

**Primer.** Velja

$$\frac{3x+2}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1}.$$

Ko pomnožimo z $(x+1)^2(x-1)$ in uredimo, dobimo

$$3x + 2 = (A+C)x^2 + (B+2C)x - A - B + C.$$

S primerjavo koeficientov dobimo sistem enačb

$$A + C = 0, \quad B + 2C = 3 \quad \text{in} \quad -A - B + C = 3.$$

Rešitev tega sistema je $A = -\frac{5}{4}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{5}{4}$, torej je

$$\frac{3x+2}{(x+1)^2(x-1)} = -\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x-1}.$$

**Primer.** Velja

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Ko pomnožimo z $(x-1)(x^2+x+1)$ in uredimo, dobimo

$$1 = (A+B)x^2 + (A-B+C)x + A - C.$$

S primerjavo koeficientov dobimo sistem enačb

$$A + B = 0, \quad A - B + C = 0 \quad \text{in} \quad A - C = 1,$$

katerega rešitev je $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = -\frac{2}{3}$. Torej je

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x+2}{x^2+x+1}.$$

Najtežji je primer, ko kvadratni polinomi nastopajo v višji potenci.

**Primer.** Velja

$$\frac{1}{(x^3-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2} =$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+x+1)^2}.$$

Ko pomnožimo z $(x-1)^2(x^2+x+1)^2$ in uredimo, dobimo

$$\begin{aligned} 1 \;=\; & (A+C)x^5 + (A+B-C+D)x^4 + \\ & (A+2B-D+E)x^3 + (-A+3B-C-2E+F)x^2 + \\ & (-A+2B+C-D+E-2F)x + (-A+B+D+F). \end{aligned}$$

S primerjavo koeficientov dobimo sistem šestih enačb s šestimi neznankami, katerega rešitev je $A = -\frac{2}{9}$, $B = \frac{1}{9}$, $C = \frac{2}{9}$, $D = \frac{1}{3}$, $E = \frac{1}{3}$, $F = \frac{1}{3}$. Torej je

$$\frac{1}{(x^3-1)^2} = -\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{9}\cdot\frac{2x+3}{1+x+x^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x+1}{(1+x+x^2)^2}.$$

Kadar je stopnja polinoma $p(x)$ večja ali enaka stopnji polinoma $q(x)$, potem seveda funkcije $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ne moremo razcepiti na parcialne ulomke. V tem primeru z algoritmom za deljenje polinomov poiščemo taka polinoma $k(x)$ in $r(x)$, da velja $p(x) = k(x)q(x) + r(x)$ in da je stopnja polinoma $r(x)$ strogo manjša od stopnje polinoma $q(x)$. Odtod sledi, da je $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = k(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$, kjer $R_1(x) = \frac{r(x)}{q(x)}$ lahko razcepimo na parcialne ulomke. Torej se da vsako racionalno funkcijo razcepiti na vsoto polinoma in parcialnih ulomkov.

## 7.7. Integriranje parcialnih ulomkov

Namen tega razdelka je izračunati nedoločena integrala

$$\int \frac{A}{(x-a)^m}\,dx \quad \text{in} \quad \int \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n}\,dx.$$

Ker se da vsako racionalno funkcijo razcepiti na vsoto polinoma in parcialnih ulomkov, lahko s pomočjo teh dveh nedoločenih integralov izračunamo nedoločeni integral poljubne racionalne funkcije.

Najprej se spomnimo, da velja

$$\int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C \quad \text{in} \quad \int \frac{1}{t^n}\,dt = \frac{1}{(1-n)t^{n-1}} + C, \text{ če } n \geq 2.$$

Z uvedbo nove spremenljivke $t = x - a$ dobimo odtod, da je

$$\boxed{\begin{gathered} \int \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{x-a}}\,\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{A}\ln|\boldsymbol{x-a}| + \boldsymbol{E} \quad \textbf{in} \\ \int \frac{\boldsymbol{A}}{(\boldsymbol{x-a})^{\boldsymbol{n}}}\,\boldsymbol{dx} = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{1-n}}\cdot\frac{\boldsymbol{1}}{(\boldsymbol{x-a})^{\boldsymbol{n-1}}} + \boldsymbol{E},\ \textbf{če } \boldsymbol{n \geq 2}, \\ \textbf{kjer je } \boldsymbol{E} \textbf{ poljubna konstanta.} \end{gathered}}$$

Oglejmo si še parcialne ulomke druge vrste. S uvedbo nove spremenljivke $s = t^2$ dobimo, da velja

$$\int \frac{t}{t^2 + a^2}\, dt = \frac{1}{2} \ln(t^2 + a^2) + E.$$

S uvedbo nove spremenljivke $t = as$ dobimo, da velja

$$\int \frac{1}{t^2 + a^2}\, dt = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + E.$$

Iz teh dveh integralov s pomočjo nove spremenljivke $t = x + \frac{b}{2}$ izpeljemo, da velja

$$\boxed{\begin{gathered} \int \frac{\boldsymbol{Bx + C}}{\boldsymbol{x^2 + bx + c}}\, \boldsymbol{dx} = \\ = \frac{\boldsymbol{B}}{\mathbf{2}} \ln|\boldsymbol{x^2 + bx + c}| + \frac{\boldsymbol{2C - Bb}}{\sqrt{\boldsymbol{-D}}} \operatorname{\mathbf{arctg}} \frac{\boldsymbol{2x + b}}{\sqrt{\boldsymbol{-D}}} + \boldsymbol{E}, \\ \textbf{kjer predpostavljamo, da je } \boldsymbol{D = b^2 - 4c < 0}. \end{gathered}}$$

Bolj zanimivo postane, kadar ima imenovalec eksponent $n \geq 2$. Z novo spremenljivko $s = t^2$ dobimo, da velja

$$\int \frac{t}{(t^2 + a^2)^n}\, dt = \frac{1}{2(1-n)} \cdot \frac{1}{(t^2 + a^2)^{n-1}} + E, \text{ če } n \geq 2.$$

Integral

$$I_n = \int \frac{1}{(t^2 + a^2)^n}\, dt$$

pa lahko izračunamo s pomočjo rekurzivne formule

$$I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)} \left( \frac{t}{(t^2 + a^2)^{n-1}} + (2n-3) I_{n-1} \right), \text{ če } n \geq 2,$$

in formule $I_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C$. Velja namreč

$$I_{n-1} = \int \frac{t^2 + a^2}{(t^2 + a^2)^n}\, dt = \int t \cdot \frac{t}{(t^2 + a^2)^n}\, dt + a^2 I_n =$$

$$= t \cdot \frac{1}{2(1-n)} \cdot \frac{1}{(t^2 + a^2)^{n-1}} - \int 1 \cdot \frac{1}{2(1-n)} \cdot \frac{1}{(t^2 + a^2)^{n-1}}\, dt + a^2 I_n =$$

$$= \frac{1}{2(1-n)} \cdot \frac{t}{(t^2 + a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)} I_{n-1} + a^2 I_n,$$

odkoder lahko izrazimo $I_n$ s pomočjo $I_{n-1}$. Na primer za $n = 2$ dobimo

$$I_2 = \frac{1}{2a^2} \left( \frac{t}{t^2 + a^2} + I_1 \right) = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{t}{t^2 + a^2} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + E.$$

Iz teh dveh integralov dobimo s pomočjo zamenjave $t = x + \frac{b}{2}$, da velja recimo

$$\boxed{\begin{gathered} \int \frac{\boldsymbol{Bx + C}}{\boldsymbol{(x^2 + bx + c)^2}}\, \boldsymbol{dx} = \\ = \frac{\boldsymbol{(2C - bB)x + (bC - 2cB)}}{\boldsymbol{(-D)(x^2 + bx + c)}} + \frac{\boldsymbol{2(2C - bB)}}{\boldsymbol{(-D)\sqrt{-D}}} \,\textbf{arctan}\, \frac{\boldsymbol{2x + b}}{\boldsymbol{\sqrt{-D}}} + \boldsymbol{E}, \\ \textbf{kjer predpostavljamo, da je } \boldsymbol{D = b^2 - 4c < 0}. \end{gathered}}$$

Za $n > 2$ je formula še bolj zapletena.

## 7.8. Uporaba integralov racionalnih funkcij

Številni integrali se s primerno zamenjavo spremenljivke prevedejo na integrale racionalnih funkcij. Treba pa je priznati, da to mnogokrat ni najkrajša metoda za njihovo računanje. Poglejmo si nekaj primerov. V nadaljevanju bo črka $R$ pomenila racionalno funkcijo v eni ali v dveh spremenljivkah, se pravi

$$R(x) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{m} a_i x^i}{\sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k} \quad \text{ali} \quad R(x,y) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{m} \sum\limits_{j=0}^{m-i} c_{ij}\, x^i y^j}{\sum\limits_{k=0}^{n} \sum\limits_{l=0}^{n-k} d_{kl}\, x^k y^l}.$$

**Primer.** Izračunajmo integral

$$\int R\big(x, \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{\frac{m}{n}}\,\big)\, dx,$$

kjer je $ad - bc \neq 0$. Vpeljimo novo spremenljivko

$$t = \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{\frac{1}{n}} = \phi^{-1}(x) \quad \text{in} \quad x = \frac{-dt^n + b}{ct^n - a} = \phi(t).$$

Dobimo

$$\int R\big(x, \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{\frac{m}{n}}\,\big)\, dx = \int R(\phi(t), t^m)\phi'(t)\, dt\Big|_{t=\phi^{-1}(x)},$$

kjer je $R_1(t) = R(\phi(t), t^m)\phi'(t)$ racionalna funkcija v spremenljivki $t$.

**Primer.** (Eulerjevi substituciji) Radi bi izračunali integral

$$\int R(x, \sqrt{a + bx + cx^2})\, dx,$$

kjer je $D = b^2 - 4ac \neq 0$. Če je $D > 0$, potem ima polinom $a + bx + cx^2$ dva različna realna korena, recimo $\alpha$ in $\beta$. V tem primeru napravimo zamenjavo

$$t = \frac{\sqrt{a + bx + cx^2}}{x - \alpha} = \sqrt{c\frac{x - \beta}{x - \alpha}} = \phi^{-1}(x) \quad \text{in} \quad x = \frac{\alpha t^2 - \beta c}{t^2 - c} = \phi(t).$$

Dobimo

$$\int R(x, \sqrt{a + bx + cx^2})\, dx = \int R(\phi(t), t(\phi(t) - \alpha))\phi'(t)\, dt\Big|_{t=\phi^{-1}(x)}.$$

Funkcija $R_1(t) = R(\phi(t), t(\phi(t) - \alpha))\phi'(t)$ je racionalna v spremenljivki $t$, zato znamo integral na desni vedno izračunati. Preostane še primer, ko je $D < 0$. V tem primeru napravimo zamenjavo

$$t = \sqrt{a + bx + cx^2} \pm x\sqrt{c} = \phi^{-1}(x) \quad \text{in} \quad x = \frac{t^2 - a}{b \pm 2t\sqrt{c}} = \phi(t).$$

Dobimo

$$\int R(x, \sqrt{a + bx + cx^2})\, dx = \int R(\phi(t), t \mp \phi(t)\sqrt{c})\phi'(t)\, dt\Big|_{t=\phi^{-1}(x)}.$$

Spet je funkcija $R_1(t) = R(\phi(t), t \mp \phi(t)\sqrt{c})\phi'(t)$ je racionalna v spremenljivki $t$, tako da integral na desni znamo izračunati.

**Primer.** (Splošna trigonometrijska substitucija) Integral

$$\int R(\cos x, \sin x)\, dx$$

lahko izračunamo tako, da napravimo uvedbo nove spremenljivke

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \phi^{-1}(x) \quad \text{in} \quad x = 2\operatorname{arctg} t = \phi(t).$$

Krajši račun pokaže, da velja

$$\cos t = \frac{1 - (\operatorname{tg}\frac{x}{2})^2}{1 + (\operatorname{tg}\frac{x}{2})^2} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{in} \quad \sin t = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + (\operatorname{tg}\frac{x}{2})^2} = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Odtod dobimo

$$\int R(\cos x, \sin x)\, dx = \int R(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2})\frac{2}{1 + t^2}\, dt,$$

kjer je $R_1(t) = R(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})\frac{2}{1+t^2}$ racionalna funkcija v spremenljivki $t$.

**Primer.** Integral

$$\int R(e^x)\, dx$$

zlahka uženemo s zamenjavo

$$t = e^x = \phi^{-1}(x) \quad \text{in} \quad x = \ln t = \phi(t).$$

Dobimo

$$\int R(e^x)\,dx = \int R(t)\frac{1}{t}\,dt,$$

kjer je $R_1(t) = R(t)\frac{1}{t}$ racionalna funkcija v spremenljivki $t$.

Poseben primer tega integrala je

$$\int R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)\,dx.$$

## 7.9. Vprašanja za ponavljanje

(1) (Definicija, obstoj in enoličnost nedoločenega integrala)
  (a) Kako je definiran nedoločeni integral funkcije?
  (b) Kaj vemo o enoličnosti nedoločenega integrala?
  (c) Kaj vemo o obstoju nedoločenega integrala?

(2) (Integracija po delih)
  (a) Kaj pravi pravilo za odvajanje produkta?
  (b) Povej pravilo za integracijo po delih za nedoločeni integral in ga izpelji!
  (c) Uporabi pravilo za integracijo po delih na primeru!

(3) (Uvedba nove spremenljivke)
  (a) Kaj pravi pravilo za odvajanje posredne funkcije?
  (b) Povej pravilo za uvedbo nove spremenljivke v nedoločenem integralu in ga izpelji!
  (c) Uporabi pravilo za uvedbo nove spremenljivke na primeru!

(4) (Integracija racionalnih funkcij)
  (a) Kako razcepimo racionalno funkcijo na parcialne ulomke?
  (b) Kako integriramo parcialne ulomke oblike $\frac{A}{(x-a)^n}$?
  (c) Kako integriramo parcialne ulomke oblike $\frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$?

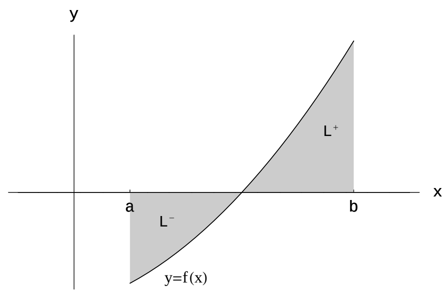
(5) (Osnovni tipi nedoločenih integralov) Naj bo $R(x,y)$ racionalna funkcija v dveh spremenljivkah.
  (a) Kako izračunamo $\int R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)\ dx$?
  (b) Kako izračunamo $\int R(\cos x, \sin x)\ dx$?
  (c) Kako izračunamo $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\ dx$?
  (d) Kako izračunamo $\int R\big(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}\big)\ dx$?

POGLAVJE 8

# Določeni integral

## 8.1. Definicija določenega integrala

Recimo, da je funkcija $f$ definirana na intervalu $[a, b]$. Lik, ki leži nad absciso, vendar pod grafom funkcije $f$ označimo z $L^+$, lik, ki leži pod absciso, vendar nad grafom funkcije $f$, pa označimo z $L^-$. Razliko njunih ploščin $\mathrm{pl}(L^+) - \mathrm{pl}(L^-)$ označimo z $\int_a^b f(x)\,dx$ in ji pravimo **določeni integral** funkcije $f$ na $[a, b]$.




$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{pl}(L^+) - \mathrm{pl}(L^-).$$

Oglejmo si, kako poiščemo približno vrednost za $\int_a^b f(x)\,dx$.

(1) Interval $[a, b]$ razdelimo na manjše kose $[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \ldots \cup [x_{n-1}, x_n]$, kjer je $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

(2) Nad vsakim kosom $[x_{i-1}, x_i]$ narišemo pravokotnik z višino $f(\xi_i)$, kjer je $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ poljubna točka.

(3) Naj bo $P^+$ vsota ploščin vseh pravokotnikov, ki ležijo nad absciso, $P^-$ pa vsota ploščin vseh pravokotnikov, ki ležijo pod absciso. Potem je $P^+ - P^- = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$. To je iskani približek.

Množici $\rho = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ iz točke (1) pravimo **delitev** intervala $[a, b]$, množici $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ iz točke (2) pravimo **izbira točk**, ki je usklajena z delitvijo $\rho$, vsoto $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ iz točke (3) pa označimo z $R(f; \rho, \xi)$ in ji pravimo **Riemannova vsota** funkcije $f$, ki pripada delitvi $\rho$ in z njo usklajeni izbiri točk $\xi$.

**Primer.** Izračunajmo Riemannovo vsoto funkcije $f(x) = 1 - x^2$, $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$, ki pripada delitvi $\rho = \{\frac{i}{4} \colon i = 0, 1, \ldots, 6\}$ intervala $[0, \frac{3}{2}]$ in z njo usklajeni izbiri točk $\xi = \{\frac{i}{4} - \frac{1}{8} \colon i = 1, \ldots, 6\}$.

Velja $x_i = \frac{i}{4}$ za $i = 0, 1, \ldots, 6$ in $\xi_i = \frac{i}{4} - \frac{1}{8}$ za $i = 1, \ldots, 6$, torej je

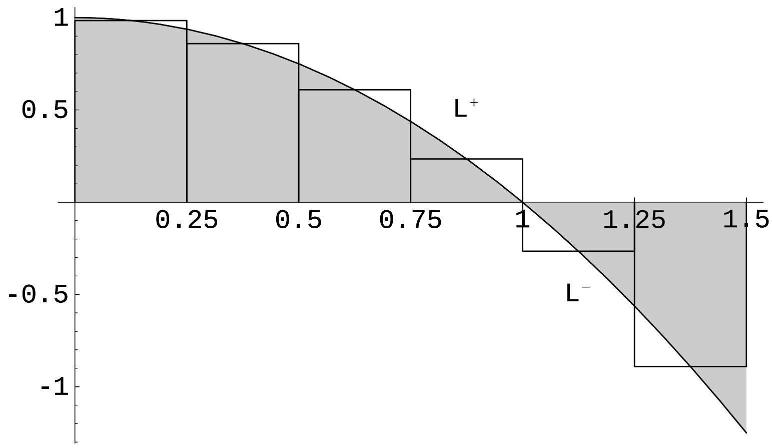
$$R(f; \rho, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \frac{63}{64} \cdot \frac{1}{4} + \frac{55}{64} \cdot \frac{1}{4} + \frac{39}{64} \cdot \frac{1}{4} + \frac{15}{64} \cdot \frac{1}{4} + \left(-\frac{17}{64}\right) \cdot \frac{1}{4} + \left(-\frac{57}{64}\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{49}{128}.$$

Pojasnimo še geometrijski pomen te Riemannove vsote in ga primerjajmo z geometrijskim pomenom določenega integrala

$$\int_0^{3/2} (1 - x^2)\, dx.$$

Na skici so prikazani pravokotniki, katerih ploščine smo upoštevali v Riemannovi vsoti. Vrednost določenega integrala je razlika ploščin likov $L^+$ (pobarvani del nad absciso) in $L^-$ (pobarvani del pod absciso).




Riemannova vsota $R(f; \rho, \xi)$ je tem boljši približek za določeni integral $\int_a^b f(x)\, dx$, čim drobnejša je delitev $\rho$. Kako drobna je delitev $\rho$, merimo z njenim **premerom** $\mu(\rho) = \max_{i=1,\ldots,n}(x_i - x_{i-1})$, ki je enak dolžini najdaljšega od podintervalov $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$. Velja torej

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\mu(\rho) \to 0} R(f; \rho, \xi).}$$

V nadaljevanju bomo to formulo vzeli za definicijo določenega integrala. Vpeljava določenega integrala preko ploščin je sicer geometrijsko bolj nazorna, ni pa dovolj natančna, saj bi bilo treba prej definirati pojem ploščine, kar je za bolj zapletene like vse prej kot preprosto.

Pojasnimo še, kako je limita v gornji formuli sploh definirana.

**Trditev. Pravimo, da je število $I$ določeni integral funkcije $f$ na intervalu $[a, b]$ in pišemo $I = \int_a^b f(x)\, dx$, če za vsako število $\epsilon > 0$ obstaja tako število $\delta > 0$, da za vsako delitev $\rho$ intervala $[a, b]$, pri kateri je $\mu(\rho) < \delta$, in za vsako izbiro točk $\xi$, ki je podrejena delitvi $\rho$, velja $|R(f; \rho, \xi) - I| < \epsilon$.**

Če vemo, da določeni integral $\int_a^b f(x)\, dx$ obstaja, ga lahko izračunamo tako, da izračunamo približek $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ z $x_i = \xi_i = a + \frac{b-a}{n} i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, in limitiramo $n$ proti neskončno.

**Primer.** Če $\int_0^{3/2} (1 - x^2)\, dx$ obstaja, potem je

$$\int_0^{3/2} (1 - x^2)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \left(1 - \left(\frac{3i}{2n}\right)^2\right) \frac{3}{2n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2n} n - \left(\frac{3}{2n}\right)^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^3 \frac{2}{6} = \frac{3}{8},$$

kjer smo uporabili formulo

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

ki jo zlahka dokažemo s popolno indukcijo.

V razdelku 8.5 bomo dokazali, da določeni integral obstaja za vse zvezne in vse monotone funkcije na zaprtem intervalu, torej je predpostavka o obstoju integrala v gornjem primeru izpolnjena.

Kljub temu gornja metoda za računanje določenega integrala ni najbolj priročna, saj je vsote težko izračunati. Kasneje bomo spoznali boljšo metodo, ki nam pove, kako določeni integral izračunamo s pomočjo nedoločenega integrala, tako imenovano Newton-Leibnitzovo formulo.

## 8.2. Funkcije, ki nimajo določenega integrala

Ne sme nas presenetiti, da nimajo vse funkcije določenega integrala.

**Trditev. Če je $f$ neomejena funkcija na zaprtem intervalu $[a, b]$, potem določeni integral $\int_a^b f(x)\, dx$ ne obstaja.**

Dokaz: Predpostavimo, da določeni integral $I = \int_a^b f(x)\,dx$ obstaja in dokažimo, da je potem $f$ omejena. Vzemimo nek $\epsilon$ (recimo $\epsilon = 1$) in naj bo $\delta$ tak kot v definiciji določenega integrala. Vzemimo neko naravno število $n > \frac{1}{\delta}$ in definirajmo $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$. Dokazali bomo, da je za vsak $j$ med 1 in $n$ skrčitev $f|_{[x_{j-1},x_j]}$ omejena, odkoder takoj sledi da je funkcija $f$ omejena. Vzemimo poljuben $j$ in poljuben $x \in [x_{j-1}, x_j]$ ter definirajmo $\xi_j = x$ in $\xi_i = x_i$ za vsak $i \neq j$. Ker velja $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ in $x_i - x_{i-1} < \delta$ za vsak $i = 1, \ldots, n$ in $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ za vsak $i = 1, \ldots, n$, mora po izbiri števila $\delta$ veljati $|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I| < \epsilon$. Odtod sledi, da je

$$\frac{I - \epsilon - \sum\limits_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{x_j - x_{j-1}} < f(x) < \frac{I + \epsilon + \sum\limits_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{x_j - x_{j-1}},$$

torej je skrčitev $f|_{[x_{j-1},x_j]}$ res omejena. $\square$

Žal niti vse omejene funkcije nimajo določenega integrala, kot pokaže naslednji primer.

**Primer.** Če je

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

potem določeni integral $\int_0^1 f(x)\,dx$ ne obstaja. Razlog je v tem, da lahko za poljubno delitev $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ intervala $[0,1]$ izberemo take točke $\xi_i', \xi_i'' \in [x_{i-1}, x_i]$, da velja

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i')(x_i - x_{i-1}) = 1 \quad \text{in} \quad \sum_{i=1}^n f(\xi_i'')(x_i - x_{i-1}) = 0.$$

(za $\xi_i'$ vzemi poljubno točko iz $[x_{i-1}, x_i] \cap \mathbb{Q}$, za $\xi_i''$ pa poljubno točko iz $[x_{i-1}, x_i] \setminus \mathbb{Q}$.) Če bi obstajala limita približkov po čedalje drobnejših delitvah, potem bi bila po prvi formuli enaka 1, po drugi pa 0. To je seveda protislovje, saj ne moremo imeti dveh različnih limit.

## 8.3. Enakomerno zvezne funkcije

Nemen tega razdelka je dokazati Heine-Cantorjev izrek, ki ga bomo potrebovali v razdelku 8.5 pri dokazu obstoja določenega integrala za zvezne funkcije na zaprtem intervalu.

Pravimo, da je funkcija $f$ **enakomerno zvezna**, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za poljubna $x, y \in D(f)$, ki zadoščata $|x - y| < \delta$ velja $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Na prvi pogled se zdi, da je ta definicija povsem enaka definiciji zvezne funkcije. Zapišimo obe definiciji z logičnimi simboli:

$$f \text{ je enakomerno zvezna} \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D(f) \ \forall y \in D(f) : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

$$f \text{ je zvezna } \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0 \ \forall x \in D(f) \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in D(f) : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Razlika je samo v vrstem redu simbolov $\forall x \in D(f)$ in $\exists \delta > 0$. Pri enakomerno zveznih funkcijah moramo najti tak $\delta$, ki je“dober” za vse $x$, pri zveznih funkcijah pa zadošča, da za vsak $x$ posebej najdemo tak $\delta$, ki je “dober” zanj. Iz te opazke takoj sledi, da je vsaka enakomerno zvezna funkcija tudi zvezna. Da obratno ni res nas prepriča naslednji primer.

**Primer.** Oglejmo si funkcijo

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad 0 < x \leq 1.$$

Ta funkcija je zvezna, ker je skrčitev racionalne funkcije. Pokažimo, da ni enakomerno zvezna. Poiskati moramo tak $\epsilon > 0$, da za vsak $\delta > 0$ obstajata taka $x, y \in (0, 1]$, ki zadoščata $|x-y| < \delta$ in $|f(x)-f(y)| \geq \epsilon$. Vzemimo $\epsilon = 1$, $x = \min\{\delta, 1\}$, $y = \frac{1}{2}\min\{\delta, 1\}$. Potem je $|x - y| = \frac{1}{2}\min\{\delta, 1\} < \delta$ in $|f(x) - f(y)| = \frac{1}{\min\{\delta,1\}} \geq 1 = \epsilon$.

**Heine-Cantorjev izrek. Vsaka zvezna funkcija na zaprtem intervalu je enakomerno zvezna.**

Dokaz: Recimo, da je $f$ zvezna funkcija z definicijskim območjem $I = [a, b]$. Če $f$ ni enakomerno zvezna, potem obstaja tak $\epsilon > 0$, da za vsak $\delta > 0$ obstajata taka $x = x(\delta)$ in $y = y(\delta)$ iz $I$, da velja $|x - y| < \delta$ in $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$. Pišimo $x_k = x(\frac{1}{k})$ in $y_k = y(\frac{1}{k})$. Ker sta $x_k$ in $y_k$ omejeni zaporedji, obstajata konvergentni podzaporedji $x_{\phi(k)}$ in $y_{\phi(k)}$. Ker za vsak $k$ velja $|x_k - y_k| < \frac{1}{k}$, imata zaporedji $x_{\phi(k)}$ in $y_{\phi(k)}$ isto limito, recimo ji $t$. Po predpostavki je $f$ zvezna v točki $t$, zato zaporedji $f(x_{\phi(k)})$ in $f(y_{\phi(k)})$ limitirata proti $f(t)$. Toda za dovolj velike $k$ odtod sledi, da je $|f(x_{\phi(k)}) - f(t)| < \frac{\epsilon}{2}$ in $|f(y_{\phi(k)})-f(t)| < \frac{\epsilon}{2}$. Odtod sledi, da je $|f(x_{\phi(k)})-f(y_{\phi(k)})| < \epsilon$, kar je v protislovju z izbiro $x_{\phi(k)}$ in $y_{\phi(k)}$. Torej $f$ mora biti enakomerno zvezna. $\square$

## 8.4. Pomožni izrek

V tem razdelku bomo izpeljali pomožni izrek, ki ga bomo potrebovali v razdelkih 8.5 in 8.6. Najprej moramo uvesti nekaj oznak.

Za poljubno omejeno funkcijo $f$ na $[a, b]$ in za poljubno delitev $\rho$ intervala $[a, b]$ pišimo

$$\overline{R}(f;\rho) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{in} \quad \underline{R}(f;\rho) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}),$$

kjer je

$$M_i = \sup\{f(x)|\, x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{in} \quad m_i = \inf\{f(x)|\, x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

**Trditev. Za poljubni delitvi $\rho_1$ in $\rho_2$ intervala $[a, b]$ velja $\underline{R}(f;\rho_1) \le \overline{R}(f;\rho_2)$.**

Dokaz: Dokazali bomo levi neenačaj v

$$\underline{R}(f;\rho_1) \le \underline{R}(f;\rho_1 \cup \rho_2) \le \overline{R}(f;\rho_1 \cup \rho_2) \le \overline{R}(f;\rho_2).$$

Srednji neenačaj je namreč očiten, dokaz desnega pa je skoraj enak dokazu levega. Naj bo $\{t_1, \ldots, t_r\} = \rho_2 \setminus \rho_1$. Dokazali bomo, da velja

$$\underline{R}(f;\rho_1) \le \underline{R}(f;\rho_1 \cup \{t_1\}) \le \underline{R}(f;\rho_1 \cup \{t_1, t_2\}) \le \ldots \le \underline{R}(f;\rho_1 \cup \{t_1, \ldots, t_r\}).$$

Ker je $\rho_1 \cup \{t_1, \ldots, t_r\}) = \rho_1 \cup \rho_2$, je desna stran enaka $\underline{R}(f;\rho_1 \cup \rho_2)$. Dokazali bomo samo prvo od teh neenakosti, ker je dokaz ostalih enak. Recimo, da je $\rho_1 = \{x_0, \ldots, x_n\}$ in da $t_1 \in [x_{j-1}, x_j]$. Pišimo $m_j = \inf f|_{[x_{j-1}, x_j]}$, $m'_j = \inf f|_{[x_{j-1}, t_1]}$ in $m''_j = \inf f|_{[t_1, x_j]}$. Ker $m'_j \ge m_j$ in $m''_j \ge m_j$, je $\underline{R}(f;\rho_1 \cup \{t_1\}) - \underline{R}(f;\rho_1) = m'_j(t_1 - x_{j-1}) + m''_j(x_j - t_1) - m_j(x_j - x_{j-1}) = (m'_j - m_j)(t_1 - x_{j-1}) + (m''_j - m_j)(x_j - t_1) \ge 0$. □

**Pomožni izrek. Če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsako delitev $\rho$ intervala $[a, b]$, ki zadošča $\mu(\rho) < \delta$, velja $\overline{R}(f;\rho) - \underline{R}(f;\rho) < \epsilon$, potem določeni integral $\int_a^b f(x)\,dx$ obstaja.**

Dokaz: Vzemimo omejene funkcijo $f$ na $[a, b]$ in definirajmo

$$\overline{I} = \inf_{\rho} \overline{R}(f;\rho), \quad \underline{I} = \sup_{\rho} \underline{R}(f;\rho),$$

kjer v obeh primerih $\rho$ teče po vseh delitvah intervala $[a, b]$. Iz ocene $\underline{R}(f;\rho_1) \le \overline{R}(f;\rho_2)$ sledi, da velja $\underline{I} \le \overline{I}$.

Vzemimo sedaj poljuben $\epsilon > 0$ in izberimo tak $\delta > 0$ kot je zahtevan v trditvi. Za poljubno delitev $\rho = \{x_0, \ldots, x_n\}$ intervala $[a, b]$ s premerom

$\mu(\rho) < \delta$ in za poljubno izbiro točk $\xi_1, \ldots, \xi_n$, kjer $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ za vsak $i = 1, \ldots, n$, velja

$$\underline{R}(f;\rho) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \overline{R}(f;\rho) \quad \text{in} \quad \underline{R}(f;\rho) \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq \overline{R}(f;\rho).$$

Odtod sledi, da je

$$|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \underline{I}| < \overline{R}(f;\rho) - \underline{R}(f;\rho) < \epsilon.$$

Po definiciji določenega integrala to pomeni, da je $\underline{I}$ določeni integral funkcije $f$ na $[a,b]$. Isti dokaz nam pove, da je v tem primeru tudi $\overline{I}$ določeni integral funkcije $f$ na $[a,b]$, zato je $\underline{I} = \overline{I}$. □

**Obrat pomožnega izreka. Če določeni integral $I = \int_a^b f(x)\,dx$ obstaja, potem za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsako delitev $\rho$ intervala $[a,b]$ z $\mu(\rho) < \delta$ velja $\overline{R}(f;\rho) - \underline{R}(f;\rho) < \epsilon$.**

Dokaz: Po definiciji določenega integrala $I$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsako delitev $\rho = \{x_0, \ldots, x_n\}$ intervala $[a,b]$ z $\mu(\rho) < \delta$ in za vsako izbiro točk $\xi_1, \ldots, \xi_n$, kjer $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, velja $|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I| < \frac{\epsilon}{4}$. Za poljuben tak $\rho$ pišimo $M_i = \sup f|_{[x_{i-1},x_i]}$ in $m_i = \inf f|_{[x_{i-1},x_i]}$. Vzemimo taka $\eta_i, \zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, da je $f(\eta_i) > M_i - \frac{\epsilon}{4(b-a)}$ in $f(\zeta_i) < m_i + \frac{\epsilon}{4(b-a)}$. Potem $\overline{R}(f;\rho) - \underline{R}(f;\rho) \leq |\sum_{i=1}^n (M_i - f(\eta_i))(x_i - x_{i-1})| + |\sum_{i=1}^n f(\eta_i)(x_i - x_{i-1}) - I| + |I - \sum_{i=1}^n f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1})| + |\sum_{i=1}^n (f(\zeta_i) - m_i)(x_i - x_{i-1})| \leq 4\frac{\epsilon}{4} = \epsilon$. □

## 8.5. Funkcije, ki imajo določeni integral

Oglejmo si preprost primer, kjer ni težav z obstojem integrala.

**Trditev. Za vsako konstantno funkcijo $C$ in vsak zaprti interval $[a,b]$ določeni integral $\int_a^b C\,dx$ obstaja in je enak $C(b-a)$.**

Dokaz: Poljuben približek konstantne funkcije $C$ na intervalu $[a,b]$ je enak $C(b-a)$, saj za poljubno delitev $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ in poljubno izbiro točk $\xi_1, \ldots, \xi_n$ velja $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = C\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = C(b-a)$. Odtod sledi, da je tudi limita približkov enaka $C(b-a)$. □

Izkaže se, da imajo določeni integral tudi vse zvezne funkcije in vse monotone funkcije.

**Izrek. Za vsako zvezno funkcijo $f$ na zaprtem intervalu $[a, b]$ obstaja določeni integral $\int_a^b f(x)\,dx$.**

Dokaz: Vzemimo pojuben $\epsilon > 0$. Ker je funkcija $f$ zvezna na zaprtem intervalu $[a, b]$, je po Heine-Cantorjev izreku tudi enakomerno zvezna. Torej obstaja tak $\delta > 0$, da za poljubna $x, y \in [a, b]$, ki zadoščata $|x - y| < \delta$ velja $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}$. Vzemimo poljubno delitev $\rho = \{x_0, \ldots, x_n\}$, ki zadošča $\mu(\rho) < \delta$. Ker je $f$ zvezna funkcija, obstajajo take točke $\xi_i', \xi_i'' \in [x_{i-1}, x_i]$, da velja $f(\xi_i') = M_i$ in $f(\xi_i'') = m_i$. Odtod sledi, da je

$$\overline{R}(f; \rho) - \underline{R}(f; \rho) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i')(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i'')(x_i - x_{i-1}) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \big(f(\xi_i') - f(\xi_i'')\big)(x_i - x_{i-1}) \leq \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\epsilon}{b-a}(b - a) = \epsilon.$$

Zdaj nam pomožni izrek zagotavlja obstoj integrala $\int_a^b f(x)\,dx$. □

**Izrek. Za vsako monotono funkcijo $f$ na zaprtem intervalu $[a, b]$ obstaja določeni integral $\int_a^b f(x)\,dx$.**

Dokaz: Recimo, da je $f$ monotona funkcija na $[a, b]$. Če je $f$ konstantna, potem že vemo, da $\int_a^b f(x)\,dx$ obstaja. Oglejmo si primer, kjer je $f$ naraščajoča nekonstantna funkcija na $[a, b]$ (podoben dokaz velja za padajoče nekonstantne funkcije). Potem je $f(a) < f(b)$. Vzemimo poljuben $\epsilon > 0$ in definirajmo $\delta = \frac{\epsilon}{f(b)-f(a)}$. Za poljubno delitev $\rho = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ intervala $[a, b]$, ki zadošča $\mu(\rho) < \delta$, velja

$$\overline{R}(f; \rho) - \underline{R}(f; \rho) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\delta =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)\delta = (f(b) - f(a))\delta = \epsilon.$$

Po pomožnem izreku odtod sledi, da obstaja integral $\int_a^b f(x)\,dx$. □

## 8.6. Osnovne lastnosti določenega integrala

V tem razdelku si bomo ogledali tri osnovne lastnosti določenega integrala. Prvi dve sta linearnost in integriranje neenakosti.

**Trditev. Za poljubni funkciji $f$ in $g$ definirani na zaprtem intervalu $[a,b]$ in za poljubno realno število $\alpha$ velja**

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

**in**

$$\int_a^b \big(\alpha f(x)\big)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$$

**Trditev. Če sta funkciji $f$ in $g$ definirani na intervalu $[a,b]$, če obstajata integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ in $\int_a^b g(x)\,dx$ in če velja**

$$f(x) \le g(x)$$

**za vsak $x \in [a,b]$, potem je**

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

Teh dveh trditev ne bomo dokazovali, ker je njun dokaz zelo podoben dokazu ustreznih lastnosti za limite funkcij v točki. Dokaz prve trditve je podoben dokazu formule $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$, dokaz druge trditve pa je podoben dokazu trditve, da iz $f(x) \le g(x)$ za vsak $x$, sledi $\lim\limits_{x\to a} f(x) \le \lim\limits_{x\to a} g(x)$, če le obe limiti obstajata.

Zanimivejša je tretja formula.

**Trditev. Če je funkcija $f$ definirana na intervalu $[a,b]$, če velja $a < c < b$ in če obstaja bodisi integral $\int_a^b f(x)\,dx$ bodisi oba integrala $\int_a^c f(x)\,dx$ in $\int_c^b f(x)\,dx$, potem obstajajo vsi trije integrali in velja**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Dokaz: Predpostavimo, da obstajata integrala $I_1 = \int_a^c f(x)\,dx$ in $I_2 = \int_c^b f(x)\,dx$. Vzemimo poljuben $\epsilon > 0$. Po definiciji določenega integrala obstajata taka $\delta_1 > 0$ in $\delta_2 > 0$, da velja:

- $|\sum_{j=1}^r f(\eta_j)(y_j - y_{j-1}) - I_1| < \frac{\epsilon}{3}$ za poljubno delitev $\{y_0, \ldots, y_r\}$ intervala $[a,c]$ in poljubne $\eta_1, \ldots, \eta_r$, kjer je $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$ za vsak $j = 1, \ldots, r$.
- $|\sum_{k=1}^s f(\zeta_j)(z_k - z_{k-1}) - I_2| < \frac{\epsilon}{3}$ za poljubno delitev $\{z_0, \ldots, z_s\}$ intervala $[c,b]$ in poljubne $\zeta_1, \ldots, \zeta_s$, kjer je $\zeta_k \in [z_{j-1}, z_j]$ za vsak $k = 1, \ldots, s$.

Po izreku iz razdelka 8.2 sta skrčitvi $f|_{[a,c]}$ in $f|_{[c,b]}$ omejeni. Odtod sledi, da je tudi funkcija $f$ omejena. Naj bo $M = \sup f$ in $m = \inf f$. Naj bo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \frac{\epsilon}{3(M-m+1)}\}$ in naj bo $\rho = \{x_0, \ldots, x_n\}$ poljubna delitev intervala $[a, b]$ s premerom $\mu(\rho) < \delta$. Vzemimo tudi poljubne točke $\xi_1, \ldots, \xi_n$, kjer je $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ za vsak $i = 1, \ldots, n$.

Če $c \in \rho$, potem je $c = x_m$ za nek $m$. Odtod sledi, da je $\rho_1 = \rho \cap [a, c]$ delitev za $[a, c]$ s premerom $\mu(\rho_1) < \delta_1$ in da je $\rho_2 = \rho \cap [b, c]$ delitev za $[c, b]$ s premerom $\mu(\rho_2) < \delta_2$. Po izbiri $\delta_1$ in $\delta_2$ odtod sledi, da je

$$|\textstyle\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I_1| \leq \frac{\epsilon}{3} \quad \text{in} \quad |\textstyle\sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I_2| \leq \frac{\epsilon}{3},$$

torej je $|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - (I_1 + I_2)| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon$.

Če $c \notin \rho$, potem obstaja tak $m$, da velja $x_{m-1} < c < x_m$. Pišimo

$$\xi'_m = \min\{\xi_m, c\}, \quad R_1 = \textstyle\sum_{i=1}^{m-1} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + f(\xi'_m)(x - x_{m-1}),$$

$$\xi''_m = \max\{\xi_m, c\}, \quad R_2 = f(\xi''_m)(x_m - c) + \textstyle\sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Množica $\rho_1 = \{x_0, \ldots, x_{m-1}, c\}$ je delitev intervala $[a, c]$ z premerom $\mu(\rho_1) < \mu(\rho) < \delta < \delta_1$, zato je

$$|R_1 - I_1| \leq \tfrac{\epsilon}{3}.$$

Podobno je množica $\rho_2 = \{c, x_m, \ldots, x_n\}$ delitev intervala $[b, c]$ s premerom $\mu(\rho_2) < \delta_2$, zato je tudi

$$|R_2 - I_2| \leq \tfrac{\epsilon}{3}.$$

Dokažimo še oceno

$$|\textstyle\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - (R_1 + R_2)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Ker je $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - (R_1 + R_2) = f(\xi_m)(x_m - x_{m-1}) - f(\xi'_m)(c - x_{m-1}) - f(\xi''_m)(x_m - c) = (f(\xi_m) - f(\xi'_m))(c - x_{m-1}) + (f(\xi_m) - \xi''_m))(x_m - c)$, sledi $|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - (R_1 + R_2)| \leq (M - m)(c - x_{m-1}) + (M - m)(x_m - c) = (M - m)(x_m - x_{m-1}) \leq (M - m)\delta \leq \frac{\epsilon}{3}$. Iz teh treh neenakosti dobimo

$$|\textstyle\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - (I_1 + I_2)| \leq$$

$$\leq |\textstyle\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - (R_1 + R_2)| + |R_1 - I_1| + |R_2 - I_2| < \epsilon.$$

S tem smo dokazali, da določeni integral $\int_a^b f(x)\,dx$ obstaja in da je enak $I_1 + I_2$.

Oglejmo si še drugi del izreka. Predpostavimo, da integral $I = \int_a^b f(x)\,dx$ obstaja. Dokazati moramo, da potem obstajata tudi integrala $\int_a^c f(x)\,dx$ in $\int_c^b f(x)\,dx$.

Vzemimo poljuben $\epsilon > 0$ in naj bo $\delta > 0$ takšen kot v obratu pomožnega izreka. Vzemimo poljubno delitev $\rho_1$ intervala $[a, c]$ z $\mu(\rho_1) < \delta$ in poljubno delitev $\rho_2$ intervala $[c, b]$ z $\mu(\rho_2) < \delta$. Potem tudi za delitev $\rho = \rho_1 \cup \rho_2$ velja $\mu(\rho) < \delta$, od koder sledi, da je $\overline{R}(f; \rho) - \underline{R}(f; \rho) < \epsilon$. Ker je $\overline{R}(f; \rho) - \underline{R}(f; \rho) = \big(\overline{R}(f; \rho_1) - \underline{R}(f; \rho_1)\big) + \big(\overline{R}(f; \rho_2) - \underline{R}(f; \rho_2)\big)$, sledi odtod, da je $\overline{R}(f; \rho_1) - \underline{R}(f; \rho_1) < \epsilon$ in $\overline{R}(f; \rho_2) - \underline{R}(f; \rho_2) < \epsilon$. Pomožni izrek nam sedaj pove, da integrala $\int_a^c f(x)\,dx$ in $\int_c^b f(x)\,dx$ obstajata. $\square$

Čeprav $\int_a^b f(x)\,dx$ ni smiselno definiran v primeru $b \leq a$, bi radi definicijo določenega integrala razširili tudi na ta primer. Dogovorimo se, da velja.

$$\boldsymbol{\int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad \text{in} \quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.}$$

Zapomniti si moramo, da ta formula ni izrek, ampak definicija. Uporabnost te definicije je v tem, da formula

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

sedaj velja za poljubne $a, b, c$, ne glede kakšen je njihov vrstni red.

## 8.7. Izrek o povprečju, osnovni izrek infinitezimalnega računa

**Povprečje** funkcije $f$ na intervalu $[a, b]$ je število

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

V nadaljevanju bomo potrebovali naslednjo trditev.

**Izrek o povprečju. Če je $\boldsymbol{f}$ zvezna funkcija na intervalu $\boldsymbol{[a, b]}$, potem obstaja tak $\boldsymbol{c \in [a, b]}$, da velja**

$$\boldsymbol{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c).}$$

Dokaz: Po predpostavki je $f$ zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$, zato je tudi omejena. Naj bo $m = \inf f|_{[a,b]}$ in $M = \sup f|_{[a,b]}$. Ko integriramo oceno

$$m \leq f(x) \leq M$$

od $a$ do $b$, dobimo

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int M\,dx.$$

Upoštevajmo, da je

$$\int_a^b m\,dx = m(b-a) \quad \text{in} \quad \int_a^b M\,dx = M(b-a),$$

pa imamo

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M.$$

Ker je $f$ zvezna funkcija, zavzame na intervalu $[a,b]$ tako vrednosti $m$ in $M$ kot tudi vsako vrednost med njima. Posebej zavzame tudi vrednost $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. Torej res obstaja tak $c \in [a,b]$, da velja

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c). \qquad \square$$

Izrek o povprečju je poleg izreka o obstoju določenega integrala za zvezne funkcije na zaprtem intervalu glavni korak v dokazu naslednjega izreka, ki nam zagotavlja obstoj nedoločenega integrala za zvezne funkcije na povezani množici.

**Osnovni izrek infinitezimalnega računa. Če je $f$ taka zvezna funkcija, da je $D(f)$ povezana množica, ki vsebuje neskončno števil, potem je za vsak $a \in D(f)$ funkcija**

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

**nedoločeni integral funkcije $f$.**

Dokaz: Najprej se prepričajmo, da je funkcija $F(x)$ smiselno definirana za vsak $x \in D(f)$. Ker je $f$ zvezna na $D(f)$, je zvezna tudi na $[a,x]$ oziroma $[x,a]$ za vsak $x \in D(f)$. Dokazali smo že, da ima vsaka funkcija, ki je zvezna na zaprtem intervalu, določeni integral. Torej integral $\int_a^x f(t)\,dt$ res obstaja za vsak $x \in D(f)$.

Dokazati še moramo, da velja $F'(x) = f(x)$ za vsak $x \in D(f)$. Velja

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \lim_{h\to 0} f(c) = f(x).$$

Pri prvem enačaju smo uporabili definicijo odvoda, pri drugem definicijo funkcije $F(x)$, pri tretjem formulo $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, pri četrtem izrek o srednji vrednosti in pri petem zveznost funkcije $f$ v točki $x$ (ker je $c$ med $x$ in $x+h$, gre $c$ proti $x$, ko gre $h$ proti 0). $\square$

## 8.8. Newton-Leibnitzova formula in posledice

Naslednji izrek nam pove, kako lahko določeni integral izračunamo s pomočjo nedoločenega integrala. V dokazu bomo uporabili osnovni izrek infinitezimalnega računa.

**Newton-Leibnitzova formula. Če je $f$ zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$ in če je $\Phi$ njen nedoločeni integral, potem velja**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Dokaz: Po osnovnem izreku infinitezimalnega računa je funkcija $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ nedoločeni integral funkcije $f$. Po predpostavki je tudi funkcija $\Phi$ nedoločeni integral funkcije $f$. Ker je $D(f) = [a, b]$, obstaja po izreku o enoličnosti nedoločenega integrala taka konstanta $C$, da velja $\Phi(x) = F(x) + C$ za vsak $x \in [a, b]$. Odtod sledi

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = (\Phi(b) - C) - (\Phi(a) - C) = \Phi(b) - \Phi(a). \quad \square$$

Newton-Leibnitzovo formulo ponavadi pišemo v obliki

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(x)\Big|_{x=a}^{x=b},$$

kjer je

$$\Phi(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = \Phi(b) - \Phi(a).$$

**Primer.**

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{4}.$$

Pred uporabo Newton-Leibnitzove formule moramo preveriti, če je funkcija $f$ res definirana in zvezna v vsaki točki intervala $[a, b]$, sicer lahko dobimo napačen rezultat.

**Primer.** Naslednji račun ni pravilen

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_{x=-1}^{x=1} = -1 - 1 = -2,$$

saj je integral na levi pozitiven, ker je funkcija $\frac{1}{x^2}$ pozitivna, rezultat na desni pa je negativen. Problem je v tem, da funkcija $\frac{1}{x^2}$ ni definirana v točki $0 \in [-1, 1]$, zato sploh ne bi smeli uporabiti Newton-Leibnitzove formule.

Newton-Leibnitzova formula nam omogoča, da formuli za uvedbo nove spremenljivke in za integracijo po delih prilagodimo tudi za določene integrale.

**Uvedba nove spremenljivke v določenem integralu. Če je $\phi$ strogo monotona zvezno odvedljiva funkcija in če je $f$ zvezna funkcija, potem velja**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t)\,dt.$$

Dokaz: Velja

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx\Big|_{x=a}^{x=b} = \int f(\phi(t))\phi'(t)\,dt\Big|_{t=\phi^{-1}(x)}\Big|_{x=a}^{x=b} =$$

$$= \int f(\phi(t))\phi'(t)\,dt\Big|_{t=\phi^{-1}(a)}^{t=\phi^{-1}(b)} = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t)\,dt. \qquad \square$$

Pred uporabo se moramo prepričati, da je $\phi$ res strogo monotona, sicer inverzna funkcija $\phi$ ni smiselno definirana.

**Primer.** Radi bi izračunali integral

$$\int_0^\pi \sin x\,dx.$$

Kaj je narobe z naslednjim računom? Napravimo zamenjavo

$$t = \sin x = \phi^{-1}(x) \quad \text{in} \quad x = \arcsin t = \phi(t).$$

Po formuli za zamenjavo spremenljivke je

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = \int_{\phi^{-1}(0)}^{\phi^{-1}(\pi)} \big(\sin\phi(t)\big)\phi'(t)\,dt = \int_0^0 t\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 0.$$

To ne more biti res, saj je integral pozitivne funkcije pozitiven. Problem je v tem, da funkcija arcsin ni definirana na intervalu $[0,\pi]$, ampak na $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Pravilni rezultat je

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_{x=0}^{x=\pi} = 2.$$

**Integracija po delih v določenem integralu. Za poljubni zvezno odvedljivi funkciji $f$ in $g$ na intervalu $[a,b]$ velja**

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Dokaz: Velja

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \int f(x)g'(x)\,dx\Big|_{x=a}^{x=b} =$$

$$= \left(f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx\right)\Big|_{x=a}^{x=b} =$$

$$= f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

□

**Primer.** Funkcija $\Gamma(x)$ je definirana z

$$\Gamma(x) = \lim_{b\to+\infty}\lim_{a\to 0^+}\int_a^b t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

Izkaže se, da je smiselno definirana za vsak $x > 0$. S pomočjo Newton-Leibnitzove formule dokažemo, da je $\Gamma(1) = 1$. S pomočjo gornje formule za integracijo po delih bomo dokazali, da za vsak $x > 0$ velja

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Velja namreč

$$\int_a^b t^x e^{-t}\,dt = t^x(-e^{-t})\Big|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b (xt^{x-1})(-e^{-t})\,dt =$$
$$= -t^x e^{-t}\Big|_{t=a}^{t=b} + x\int_a^b t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

Ker je

$$\lim_{b\to+\infty}\lim_{a\to 0^+} t^x e^{-t}\Big|_{t=a}^{t=b} = 0,$$

odtod sledi

$$\Gamma(x+1) = \lim_{b\to+\infty}\lim_{a\to 0^+}\int_a^b t^x e^{-t}\,dt =$$
$$= \lim_{b\to+\infty}\lim_{a\to 0^+} x\int_a^b t^{x-1}e^{-t}\,dt = x\Gamma(x).$$

Iz lastnosti $\Gamma(1) = 1$ in $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ sledi, da za vsako naravno število $n$ velja

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

## 8.9. Vprašanja za ponavljanje

(1) (Definicija določenega integrala)
   (a) Razloži geometrijski pomen določenega integrala $\int_a^b f(x)dx$!
   (b) Kako izračunamo približek za $\int_a^b f(x)dx$ s pomočjo Riemannovih vsot?
   (c) Kako definiramo točno vrednost za $\int_a^b f(x)dx$?

(2) (Funkcije, ki nimajo določenega integrala)
   (a) Kaj vemo o določenih integralih neomejenih funkcij?
   (b) Povej primer omejene funkcije, ki nima določenega integrala. Odgovor utemelji!
   (c) Povej primer omejene funkcije, ki ima določeni integral. Odgovor utemelji!

(3) (Funkcije, ki imajo določeni integral)
   (a) Kako sta definirana izraza $\overline{R}(f;\rho)$ in $\underline{R}(f;\rho)$? Kaj pravi pomožni izrek?
   (b) Dokaži, da ima določeni integral vsaka monotona funkcija na zaprtem intervalu!
   (c) Kaj pravi Heine-Cantorjev izrek?
   (d) Dokaži, da ima določeni integral vsaka zvezna funkcija na zaprtem intervalu!

(4) (Lastnosti določenega integrala)
   (a) Dokaži, da je določeni integral vsote enak vsoti določenih integralov!
   (b) S primerom pokaži, da določeni integral produkta ni nujno enak produktu določenih integralov!
   (c) Kako določeni integral razcepimo na dva "krajša" določena integrala?

(5) (Povprečje)
   (a) Kako je definirano povprečje funkcije $f(x)$ na intervalu $[a,b]$?
   (b) Kaj pravi izrek o povprečni vrednosti?
   (c) Kaj je geometrijska interpretacija izreka o povprečni vrednosti?

(6) (Osnovni izrek infinitezimalnega računa) Naj bo funkcija $f(x)$ zvezna na intervalu $[a,b]$ in $F(x)=\int_a^x f(t)dt$.
   (a) Dokaži, da je funkcija $F(x)$ zvezna na $[a,b]$!
   (b) Dokaži, da je funkcija $F(x)$ odvedljiva na $(a,b)$ in da je $F'(x)=f(x)$!
   (c) Kaj pravi Newton-Leibnitzova formula?
   (d) Kaj pravi osnovni izrek infinitezimalnega računa?

(7) (Posledice Newton-Leibnitzove formule)

(a) Kaj pravi formula za uvedbo nove spremenljivke v nedoločenem integralu?
(b) Kaj pravi formula za uvedbo nove spremenljivke v določenem integralu?
(c) Kaj pravi formula za integracijo po delih v nedoločenem integralu?
(d) Kaj pravi formula za integracijo po delih v določenem integralu?

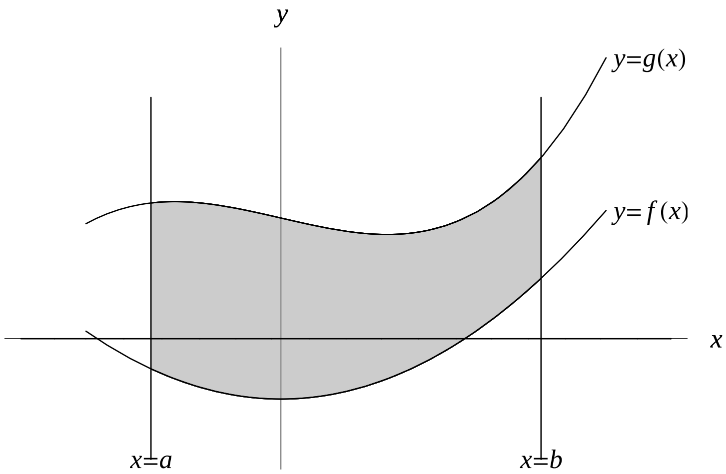
(8) (Gama funkcija)
(a) Kako je definirana funkcija $\Gamma(x)$?
(b) Dokaži, da je $\Gamma(1) = 1$!
(c) Dokaži, da je $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ za vsako naravno število $n$!
(d) Dokaži, da je $\Gamma(n) = (n-1)!$ za vsako naravno število $n$!

POGLAVJE 9

# Uporaba določenega integrala

## 9.1. Ploščine ravninskih likov

Oglejmo si najprej ploščine ravninskih likov posebnih oblik.




**Trditev. Če je lik $L$ omejen od spodaj s krivuljo $y = f(x)$, od zgoraj s krivuljo $y = g(x)$, z leve s premico $x = a$ in z desne s premico $x = b$ (glej sliko), potem je njegova ploščina enaka**

$$\mathrm{pl}(L) = \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx.$$

**Predpostavljamo, da sta funkciji $f$ in $g$ zvezni.**

Dokaz: Vzemimo poljubno delitev $a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$ intervala $[a, b]$ in razrežimo lik z navpičnimi premicami $x = x_i$ na manjše dele. Naj bo $L_i$ del lika, ki se nahaja med premicama $x = x_{i-1}$ in $x = x_i$. Za vsak $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ se ploščina lika $L_i$ približno ujema s ploščino pravokotnika z osnovnico $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ in višino $g(\xi_i) - f(\xi_i)$, se pravi

$$\mathrm{pl}(L) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{pl}(L_i) \approx \sum_{i=1}^{n} (g(\xi_i) - f(\xi_i))\Delta x_i.$$

Izraz na desni je ravno Riemannova vsota funkcije $g(x) - f(x)$, ki pripada delitvi $a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$ in izbiri točk $\xi_i$, torej

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\ dx \approx \sum_{i=1}^n (g(\xi_i) - f(\xi_i))\Delta x_i.$$

Če vzamemo limito po čedalje drobnejših delitvah, torej dobimo

$$\mathrm{pl}(L) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n (g(\xi_i) - f(\xi_i))\Delta x_i = \int_a^b (g(x) - f(x))\ dx. \qquad \square$$

Podobno se prepričamo, da velja tudi naslednje:

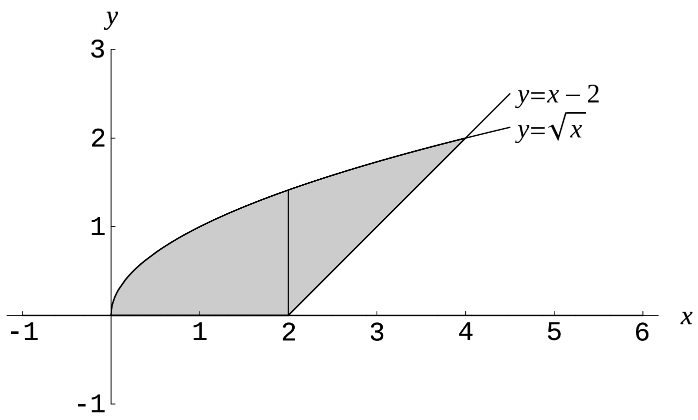
**Trditev. Če je lik $L$ omejen od spodaj s premico $y = c$, od zgoraj s premico $y = d$, z leve s krivuljo $x = h(y)$ in z desne s krivuljo $x = k(y)$, potem je njegova ploščina enaka**

$$\mathbf{pl}(\boldsymbol{L}) = \int_c^d (\boldsymbol{k}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y}))\ \boldsymbol{dy}.$$

**Predpostavljamo, da sta funkciji $k$ in $h$ zvezni.**

Ploščino bolj zapletenih likov izračunamo tako, da jih razrežemo na manjše like, katerih ploščine se izračunajo po eni od gornjih dveh formul.

**Primer.** Izračunajmo ploščino lika omejenega s krivuljami $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ in $y = x - 2$ (glej sliko).




Najprej lik prerežemo s premico $x = 2$ na dva manjša lika, katerih ploščino izračunamo po prvi formuli. Ploščina levega lika je

$$\int_0^2 (\sqrt{x} - 0)\ dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{4\sqrt{2}}{3},$$

ploščina desnega pa

$$\int_2^4 (\sqrt{2} - (x-2))\ dx = \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{x=2}^{x=4} = \frac{10-4\sqrt{2}}{3}.$$

Ploščina celotnega lika je torej

$$\mathrm{pl}(L) = \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{10-4\sqrt{2}}{3} = \frac{10}{3}.$$

Lahko pa bi ploščino lika tudi direktno izračunali po drugi formuli. Ker je lik omejen z $y=0$, $y=2$, $x=y^2$ in $x=y+2$, velja

$$\mathrm{pl}(L) = \int_0^2 (y+2-y^2)\ dy = \left(\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=0}^{y=2} = \frac{10}{3}.$$

.

## 9.2. Središča ravninskih likov

**Središče** ravninskega lika $L$ je taka točka $(x^*, y^*)$, kjer je $x^*$ povprečje $x$ koordinat vseh točk lika $L$, $y^*$ pa povprečje $y$ koordinat vseh točk lika $L$. Središče lika ne leži nujno znotraj lika. Kadar ima lik konstantno gostoto, se pojem središča ujema s pojmom težišča, v splošnem pa se ta pojma razlikujeta.

**Primer.** Središče pravokotnika, omejenega s premicami $x=a$, $x=b$, $y=c$ in $y=d$ je točka $(x^*, y^*)$, kjer je $x^* = \frac{a+b}{2}$ in $y^* = \frac{c+d}{2}$.

**Primer.** Kadar je lik $L$ sestavljen iz več manjših likov $L_1, \ldots, L_n$, katerih središča so $(x_1^*, y_1^*), \ldots, (x_n^*, y_n^*)$, potem je središče lika $L$ točka $(x^*, y^*)$, kjer je

$$x^* = \frac{x_1^*\,\mathrm{pl}(L_1) + \ldots + x_n^*\,\mathrm{pl}(L_n)}{\mathrm{pl}(L)} \quad \text{in} \quad y^* = \frac{y_1^*\,\mathrm{pl}(L_1) + \ldots + y_n^*\,\mathrm{pl}(L_n)}{\mathrm{pl}(L)}.$$

Bralec se bo vprašal zakaj nismo vzeli kar navadno povprečje. Razlog je v tem, da imajo liki z večjo ploščino "več" točk in zato prinesejo večji delež k povprečju.

**Trditev. Kadar je lik $L$ omejen z leve s premico $x=a$, z desne s premico $x=b$, od spodaj s krivuljo $y=f(x)$ in od zgoraj s krivuljo $y=g(x)$, potem sta koordinati njegovega središča**

$$x^* = \frac{\int_a^b x(g(x)-f(x))\ dx}{\int_a^b (g(x)-f(x))\ dx} \ \text{in}\ y^* = \frac{\int_a^b \frac{1}{2}(g(x)^2 - f(x)^2)\ dx}{\int_a^b (g(x)-f(x))\ dx}.$$

**Predpostavljamo, da sta funkciji $f$ in $g$ zvezni.**

Dokaz: Približno koordinate središča izračunamo tako, da lik razdelimo na unijo disjunktnih pravokotnikov in izračunamo uteženo povprečje njihovih središč. Razložimo to podrobneje. Vzamemo delitev $\rho$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ in definirajmo $\xi_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ za vsak $i = 1, \ldots, n$. Naj bo $L_i$ pravokotnik omejen s premicami $x = x_{i-1}$, $x = x_i$, $y = f(\xi_i)$ in $y = g(\xi_i)$. Njegovo središče ima (kot v prvem primeru) koordinate $(\xi_i, \frac{f(\xi_i)+g(\xi_i)}{2})$. Središče lika $L_\rho = L_1 \cup \ldots \cup L_n$ ima torej (kot v drugem primeru) koordinate

$$x^*_\rho = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i \operatorname{pl}(L_i)}{\sum_{i=1}^n \operatorname{pl}(L_i)} = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i (g(\xi_i) - f(\xi_i))\Delta x_i}{\sum_{i=1}^n (g(\xi_i) - f(\xi_i))\Delta x_i} \qquad \text{in}$$

$$y^*_\rho = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(f(\xi_i) + g(\xi_i)) \operatorname{pl}(L_i)}{\sum_{i=1}^n \operatorname{pl}(L_i)} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(f(\xi_i) + g(\xi_i))(g(\xi_i) - f(\xi_i))\Delta x_i}{\sum_{i=1}^n (g(\xi_i) - f(\xi_i))\Delta x_i}.$$

V limiti po čedalje drobnejših delitvah preide $L_\rho$ v $L$, koordinate njegovega središča pa v

$$x^* = \lim_\rho x^*_\rho = \frac{\lim_\rho \sum_{i=1}^n \xi_i (g(\xi_i) - f(\xi_i))\Delta x_i}{\lim_\rho \sum_{i=1}^n (g(\xi_i) - f(\xi_i))\Delta x_i} = \frac{\int_a^b x(g(x) - f(x))\, dx}{\int_a^b (g(x) - f(x))\, dx},$$

$$y^* = \lim_\rho y^*_\rho = \frac{\lim_\rho \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(g(\xi_i)^2 - f(\xi_i)^2)\Delta x_i}{\lim_\rho \sum_{i=1}^n (g(\xi_i) - f(\xi_i))\Delta x_i} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2}(g(x)^2 - f(x)^2)\, dx}{\int_a^b (g(x) - f(x))\, dx}. \quad \square$$

Analogno velja naslednja trditev.

**Trditev. Če je lik $L$ omejen od spodaj s premico $y = c$, od zgoraj s premico $y = d$, z leve s krivuljo $x = h(y)$ in z desne s krivuljo $x = k(y)$, potem sta koordinati njegovega središča**

$$x^* = \frac{\int_c^d \frac{1}{2}(k(y)^2 - h(y)^2)\, dy}{\int_c^d (k(y) - h(y))\, dy} \quad \text{in} \quad y^* = \frac{\int_c^d y(k(y) - h(y))\, dy}{\int_c^d (k(y) - h(y))\, dy}.$$

**Predpostavljamo, da sta funkciji $h$ in $k$ zvezni.**

Bolj komplicirane like razrežemo na manjše kose, katerih težišča znamo izračunati po eni od gornjih dveh formul in nato uporabimo formulo iz drugega primera.

**Primer.** Izračunajmo središče lika omejenega s krivuljami $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ in $y = x - 2$ (glej primer iz razdelka 9.1). Ker je lik omejen z $y = 0$, $y = 2$, $x = y^2$ in $x = y + 2$, dobimo po drugi formuli

$$x^* = \frac{\int_0^2 \frac{1}{2}((y+2)^2 - (y^2)^2)\, dy}{\int_0^2 (y + 2 - y^2)\, dy} = \frac{\frac{92}{15}}{\frac{10}{3}} = \frac{46}{25} = 1.84 \qquad \text{in}$$

$$y^* = \frac{\int_0^2 y(y+2-y^2)\ dy}{\int_0^2 (y+2-y^2)\ dy} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{10}{3}} = \frac{4}{5} = 0.8.$$

Lahko pa tudi lik s premico $x = 2$ prerežemo na dva manjša lika. Levi lik ima ploščino $\mathrm{pl}_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ in središče s koordinatama

$$x_1^* = \frac{\int_0^2 x(\sqrt{x} - 0)\ dx}{\mathrm{pl}_1} = \frac{\frac{8\sqrt{2}}{5}}{\mathrm{pl}_1}$$

in

$$y_1^* = \frac{\int_0^2 \frac{1}{2}(\sqrt{x}^2 - 0)\ dx}{\mathrm{pl}_1} = \frac{1}{\mathrm{pl}_1}.$$

Drugi lik ima ploščino $\mathrm{pl}_2 = \frac{10-4\sqrt{2}}{3}$ in središče s koordinatama

$$x_2^* = \frac{\int_2^4 x(\sqrt{x} - (x-2))\ dx}{\mathrm{pl}_2} = \frac{\frac{92}{15} - \frac{8\sqrt{2}}{5}}{\mathrm{pl}_2}$$

in

$$y_2^* = \frac{\int_2^4 \frac{1}{2}(\sqrt{x}^2 - (x-2)^2)\ dx}{\mathrm{pl}_2} = \frac{\frac{5}{3}}{\mathrm{pl}_2}.$$

Torej je

$$x^* = \frac{x_1^*\,\mathrm{pl}_1 + x_2^*\,\mathrm{pl}_2}{\mathrm{pl}_1 + \mathrm{pl}_2} = \frac{46}{25} \quad \text{in} \quad y^* = \frac{y_1^*\,\mathrm{pl}_1 + y_2^*\,\mathrm{pl}_2}{\mathrm{pl}_1 + \mathrm{pl}_2} = \frac{4}{5}.$$

## 9.3. Prostornine vrtenin

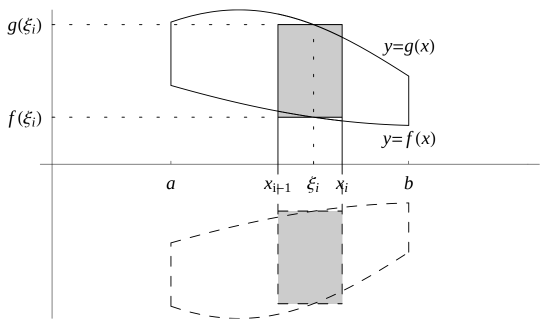
**Vrtenina** je telo, ki ga dobimo z vrtenjem ravninskega lika okrog premice, ki leži v isti ravnini kot lik in ki ne deli lika v dva dela. Tej premici pravimo **simetrijska os** vrtenine, liku pa **prerez** vrtenine.

V tem razdelku se bomo naučili, kako izračunamo prostornino vrtenine. Koordinatni sistem v prostoru lahko izberemo tako, da je simetrijska os kar os $x$, lik pa leži v gornji polovici $xy$-ravnine.

**Trditev. Vrtenina s simetrijsko osjo $x$ in prerezom, ki je omejen z leve s premico $x = a$, z desne s premico $x = b$, od spodaj s krivuljo $y = f(x)$ in od zgoraj s krivuljo $y = g(x)$, ima prostornino**

$$V = \pi \int_a^b (g(x)^2 - f(x)^2)\ dx.$$

**Predpostavljamo, da sta funkciji $f$ in $g$ zvezni in pozitivni.**




Dokaz: Vzemimo neko delitev $\rho$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ intervala $[a, b]$ in neko izbiro točk $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ za vsak $i = 1, \ldots, n$. Potem je del vrtenine, ki se nahaja med ravninama $x = x_{i-1}$ in $x = x_i$, približno enak votlemu valju z višino $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, notranjim polmerom $f(\xi_i)$ in zunanjim polmerom $g(\xi_i)$. Prostornina tega valja je enaka $V_i = \pi(g(\xi_i)^2 - f(\xi_i)^2)\Delta x_i$. Približek za celotno prostornino je torej

$$V_\rho = \sum_{i=1}^{n} V_i = \pi \sum_{i=1}^{n} (g(\xi_i)^2 - f(\xi_i)^2)\Delta x_i.$$

V limiti po čedalje drobnejših delitvah dobimo

$$V = \lim_{\rho} V_\rho = \pi \lim_{\rho} \sum_{i=1}^{n} (g(\xi_i)^2 - f(\xi_i)^2)\Delta x_i = \pi \int_a^b (g(x)^2 - f(x)^2)\, dx.$$

Metodi, ki smo jo uporabili v tem dokazu, pravimo tudi **metoda rezin**. □

Tokrat pri izpeljavi naslednje trditve ne moremo uporabiti analogije.

**Trditev. Vrtenina s simetrijsko osjo $x$ in prerezom, ki je omejen od spodaj s krivuljo $y = c$, od zgoraj s krivuljo $y = d$, z leve s krivuljo $x = h(y)$ in z desne s krivuljo $x = k(y)$, ima prostornino**

$$V = 2\pi \int_c^d y(k(y) - h(y))\, dy.$$

**Predpostavljamo, da sta funkciji $h$, $k$ zvezni in pozitivni.**

Dokaz: Vzemimo neko delitev $\sigma$: $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d$ intervala $[c, d]$ in izbiro točk $\eta_i = \frac{y_{i-1}+y_i}{2}$ za $i = 1, \ldots, n$. Del vrtenine, ki se nahaja med valjema s polmeroma $y = y_{i-1}$ in $y = y_i$, je približno enak votlemu valju z višino $k(\eta_i) - h(\eta_i)$, katerega prostornina je enaka

$$V_i = \pi(k(\eta_i) - h(\eta_i))(y_i^2 - y_{i-1}^2) = \pi(k(\eta_i) - h(\eta_i))(y_i + y_{i-1})(y_i - y_{i-1}) =$$

$$= \pi(k(\eta_i) - h(\eta_i))2\eta_i\Delta y_i = 2\pi\eta_i(k(\eta_i) - h(\eta_i))\Delta y_i.$$

Približek za celotno prostornino je torej

$$V_\sigma = \sum_\sigma V_i = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \eta_i (k(\eta_i) - h(\eta_i))\Delta y_i.$$

V limiti po čedalje drobnejših delitvah dobimo

$$V = \lim_\sigma V_\sigma = 2\pi \lim_\sigma \sum_{i=1}^{n} \eta_i (k(\eta_i) - h(\eta_i))\Delta y_i = 2\pi \int_c^d y(k(y) - f(y))\, dy.$$

Metodi, ki smo jo uprabili v tem dokazu, pravimo tudi **metoda lupin**. □

Prostornino vrtenine z bolj zapletenim prerezom izračunamo tako, da jo razdelimo v več manjših vrtenin, katerih prerez je enega od gornjih dveh tipov, in nato njihove prostornine seštejemo.

**Primer.** Izračunajmo prostornino stožca s polmerom $R$ in višino $h$. Prerez je trikotnik omejen z $x = 0$, $y = 0$ in $\frac{x}{h} + \frac{y}{R} = 1$. Lahko uporabimo bodisi formulo $V = \pi \int_a^b (g(x)^2 - f(x)^2)\, dx$ z $a = 0$, $b = h$, $f(x) = 0$ in $g(x) = R(1-\frac{x}{h})$ bodisi formulo $V = 2\pi \int_c^d y(k(y)-f(y))\, dy$ s $c = 0$, $d = R$, $h(y) = 0$ in $k(y) = h(1 - \frac{y}{R})$. V obeh primerih dobimo $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

**Primer.** Izračunajmo prostornino krogelnega odseka s polmerom $R$ in višino $h$. Prerez je krožni odsek omejen z $x = R - h$, $x = R$, $y = 0$ in $x^2 + y^2 = R^2$. Lahko uporabimo bodisi formulo $V = \pi \int_a^b (g(x)^2 - f(x)^2)\, dx$ z $a = R - h$, $b = R$, $f(x) = 0$ in $g(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ bodisi formulo $V = 2\pi \int_c^d y(k(y) - f(y))\, dy$ s $c = 0$, $d = \sqrt{2Rh - h^2}$, $h(y) = 0$ in $k(y) = \sqrt{R^2 - y^2}$. V obeh primerih dobimo $V = \pi h^2 (R - \frac{h}{3})$.

Prostornina krogelnega izseka je $V = \frac{2\pi}{3} R^2 h$. Dobimo jo tako, da k prostornini krogelnega odseka prištejemo prostornino stožca z višino $R - h$ in polmerom $\sqrt{2Rh - h^2}$.

Kadar poznamo središče prereza, je prostornino lažje izračunati z naslednjim pravilom.

**Prvo Guldinovo pravilo. Prostornina vrtenine je enaka produktu ploščine prereza in dolžine poti, ki jo pri enem vrtljaju opiše središče prereza.**

Dokaz: Naj bo $p$ ploščina prereza in $y^*$ druga koordinata težišča. Pot, ki jo opravi središče pri enem vrtljaju je torej $2\pi y^*$.

Kadar je prerez omejen z dvema navpičnima črtama, velja

$$V = \pi \int_a^b (g(x)^2 - f(x)^2)\ dx =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{\int_a^b \frac{1}{2}(g(x)^2 - f(x)^2)\ dx}{\int_a^b (g(x) - f(x))\ dx} \cdot \int_a^b (g(x) - f(x))\ dx = 2\pi y^* p.$$

Kadar pa je prerez omejen z dvema vodoravnima črtama, velja

$$V = 2\pi \int_c^d y(k(y) - f(y))\ dy =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{\int_c^d y(k(y) - h(y))\ dy}{\int_c^d (k(y) - h(y))\ dy} \cdot \int_c^d (k(y) - h(y))\ dy = 2\pi y^* p.$$

V obeh primerih torej velja trditev. Če je prerez sestavljen iz več manjših delov, za katere velja trditev, potem je

$$V = \sum_i V_i = 2\pi \sum_i y_i^* p_i = 2\pi \cdot \frac{\sum_i y_i^* p_i}{\sum_i p_i} \cdot \sum_i p_i = 2\pi y^* p,$$

tako da trditev velja tudi v tem primeru. □

**Primer.** Prostornina torusa z velikim polmerom $a$ in malim polmerom $b$ je

$$V = 2\pi y^* p = 2\pi \cdot a \cdot \pi b^2 = 2\pi^2 a b^2.$$

## 9.4. Dolžina ravninske krivulje

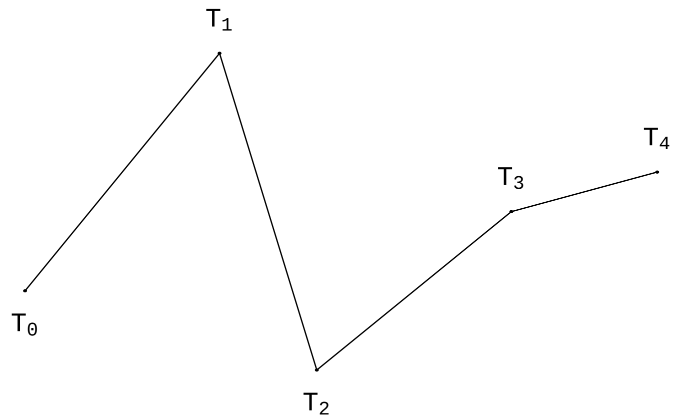
Dolžina daljice med točkama $A(a_1, a_2)$ in $B(b_1, b_2)$ je enaka

$$l = d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$

To formulo dobimo tako, da izračunamo dolžino hipotenuze pravokotnega trikotnika $ABC$, kjer je $C = (a_1, b_2)$. Dolžini katet tega trikotnika sta $|a_1 - b_1|$ in $|a_2 - b_2|$, dolžino hipotenuze pa dobimo po Pitagorovem izreku. Krivulji, ki jo lahko razrežemo v končno mnogo daljic, pravimo **lomljenka**. Njeno dolžino dobimo tako, da seštejemo dolžine daljic, ki jo sestavljajo.

**Primer.** Določi dolžino lomljenke s krajišči

$$T_0(1, 2), \quad T_1(3, 5), \quad T_2(4, 1), \quad T_3(6, 3) \quad \text{in} \quad T_4(7.5, 3.5).$$




Rezultat je

$$l = d(T_0, T_1) + d(T_1, T_2) + d(T_2, T_3) + d(T_3, T_4) =$$

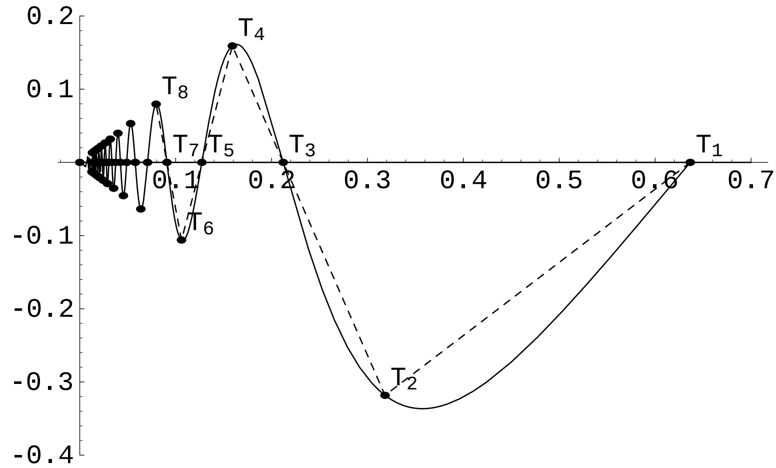
$$= \sqrt{13} + \sqrt{17} + 2\sqrt{2} + \sqrt{10}/2 \approx 12.1382.$$

**Dolžino** bolj komplicirane krivulje definiramo kot supremum dolžin vseh lomljenk s krajišči na tej krivulji. Dolžina krivulje seveda ni nujno končna.

**Primer.** Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x}, & x \in (0, \frac{2}{\pi}], \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

je zvezna in definirana na zaprtem intervalu. Pokažimo, da je njen graf (glej sliko) krivulja z neskončno dolžino.



Potegnimo lomljenko skozi točke $T_k(\frac{2}{k\pi}, f(\frac{2}{k\pi}))$, kjer $k \in \mathbb{N}$. Pri lihih $k$ velja $f(\frac{2}{k\pi}) = 0$, torej točka $T_k$ leži na abcisi. Označimo z $l_k$ dolžino tistega dela grafa funkcije $f$, ki leži med točkama $T_{2k-1}$ in $T_{2k+1}$. Točka $T_{2k}$ je oddaljena od abcise za $|f(\frac{2}{2k\pi})| = \frac{1}{k\pi}$, zato lahko ocenimo

$$l_k > d(T_{2k-1}, T_{2k}) + d(T_{2k}, T_{2k+1}) > \frac{1}{k\pi} + \frac{1}{k\pi} = \frac{2}{k\pi}.$$

Za vsak $n$ velja

$$l > \sum_{i=1}^{2^n} l_k = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k},$$

kjer je $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}) + \ldots + (\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}) > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = 1 + (n-1) \cdot \frac{1}{2}$. Torej je $l = +\infty$.

Pri računanju dolžin si pomagamo z naslednjo formulo.

**Trditev. Dolžina krivulje $\boldsymbol{y = f(x)}$, kjer je $\boldsymbol{a \leq x \leq b}$, je**

$$\boldsymbol{l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.}$$

**Predpostavljamo, da je funkcija $\boldsymbol{f}$ zvezno odvedljiva.**

Dokaz: Ker predpostavljamo, da je odvod zvezen, integral na desni strani obstaja. Vzemimo sedaj neko delitev $\rho$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ intervala $[a, b]$. Dolžina lomljenke skozi točke $T_i(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \ldots, n$, je

$$l_\rho = \sum_{i=1}^{n} d(T_i, T_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Na vsakem od intervalov $[x_{i-1}, x_i]$ lahko uporabimo Lagrangeov izrek. Za vsak $i = 1, \ldots, n$ obstaja tak $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, da velja $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$. Odtod sledi

$$l_\rho = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}(x_i - x_{i-1}).$$

Ko napravimo limito po čedalje drobnejših delitvah, dobimo

$$l = \sup_\rho l_\rho = \lim_\rho l_\rho = \lim_\rho \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}\ \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx,$$

kar smo želeli pokazati. Pri drugem enačaju smo upoštevali, da je $l_\rho \geq l_\sigma$, če je $\rho \supseteq \sigma$. □

Podobno dokažemo naslednjo trditev.

**Trditev. Dolžina krivulje $x = h(y)$, kjer je $c \leq y \leq d$, je**

$$l = \int_c^d \sqrt{1 + h'(y)^2}\, dy.$$

**Predpostavljamo, da je funkcija $h$ zvezno odvedljiva.**

**Primer.** Dolžina krivulje

$$y = \operatorname{ch} x, \quad x \in [0, 1],$$

je

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + \operatorname{ch}'(x)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \operatorname{sh}(x)^2}\, dx =$$
$$= \int_0^1 \operatorname{ch}(x)\, dx = \operatorname{sh}(x)\Big|_{x=0}^{x=1} = \operatorname{sh}(1).$$

## 9.5. Središče ravninske krivulje

**Središče** ravninske krivulje $K$ je točka $(x^*, y^*)$, kjer je $x^*$ povprečje $x$ koordinat vseh točk krivulje $K$, $y^*$ pa povprečje $y$ koordinat vseh točk krivulje $K$. Središče krivulje ne leži nujno na krivulji. Pri krivuljah s konstantno gostoto je središče isto kot težišče.

**Primer.** Središče daljice, ki povezuje točki $(x_1, y_1)$ in $(x_2, y_2)$ je točka $(x^*, y^*)$, kjer je $x^* = \frac{x_1+x_2}{2}$ in $y^* = \frac{y_1+y_2}{2}$.

**Primer.** Če je krivulja $K$ sestavljena iz več manjših krivulj $K_1, \ldots, K_n$, katerih središča so $(x_1^*, y_1^*), \ldots, (x_n^*, y_n^*)$ in katerih dolžine so $l_1, \ldots, l_n$, potem ima središče krivulje $K$ koordinati

$$x^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^* l_i}{\sum_{i=1}^n l_i} \quad \text{in} \quad y^* = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^* l_i}{\sum_{i=1}^n l_i}.$$

Pri računanju središč bolj kompliciranih krivulj si pomagamo z naslednjim izrekom.

**Trditev. Središče krivulje $y = f(x)$, kjer je $a \leq x \leq b$, ima koordinati**

$$x^* = \frac{\int_a^b x\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx}{l} \quad \text{in} \quad y^* = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx}{l},$$

**pri čemer je $l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$ dolžina krivulje. Predpostavljamo, da je funkcija $f$ zvezno odvedljiva.**

Dokaz: Ker je funkcija $f$ zvezno odvedljiva, vsi integrali obstajajo. Vzemimo neko delitev $\rho$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ intervala $[a, b]$ in narišimo točke $T_i(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \ldots, n$ na krivulji $y = f(x)$. Vemo že, da je dolžina odseka med točkama $T_{i-1}$ in $T_i$ približno enaka

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}\Delta x_i,$$

kjer $x_{i-1} < \xi_i < x_i$, koordinati njenega središča pa sta približno $x_i^* = \xi_i$ in $y_i^* = f(\xi_i)$. Koordinati središča celotne krivulje sta torej približno enaki

$$x_\rho^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^* l_i}{\sum_{i=1}^n l_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}\Delta x_i}{\sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}\Delta x_i}$$

in

$$y_\rho^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^* l_i}{\sum_{i=1}^n l_i} = \frac{\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}\Delta x_i}{\sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}\Delta x_i}.$$

V limiti po čedalje drobnejših delitvah dobimo

$$x^* = \lim_\rho x_\rho^* = \frac{\lim_\rho \sum_{i=1}^n \xi_i \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}\Delta x_i}{\lim_\rho \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}\Delta x_i} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1 + f'(x)^2}\ dx}{\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\ dx}$$

in

$$y^* = \lim_\rho y_\rho^* = \frac{\lim_\rho \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}\Delta x_i}{\lim_\rho \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}\Delta x_i} = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\ dx}{\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\ dx}. \ \square$$

Podobno dokažemo naslednjo trditev.

**Trditev. Središče krivulje $x = h(y)$, kjer je $c \leq y \leq d$, ima koordinati**

$$x^* = \frac{\int_c^d h(y)\sqrt{1 + h'(y)^2}\ dy}{l} \quad \text{in} \quad y^* = \frac{\int_c^d y\sqrt{1 + h'(y)^2}\ dy}{l},$$

**pri čemer je $l = \int_c^d \sqrt{1 + h'(y)^2}\ dy$ dolžina krivulje. Predpostavljamo, da je funkcija $h$ zvezno odvedljiva.**

**Primer.** Določimo koordinate središča polkrožnice $y = \sqrt{1 - x^2}$. V gornji formuli vstavimo $a = -1$, $b = 1$ in $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Potem je

$$\sqrt{1 + f'(x)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Se pravi, da je

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\ dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\ dx = \arcsin x \Big|_{x=-1}^{x=1} = \pi$$

in

$$x^* = \frac{1}{l}\int_a^b x\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2}\Big|_{x=-1}^{x=1} = 0$$

in

$$y^* = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 1\,dx = \frac{1}{\pi}x\Big|_{x=-1}^{x=1} = \frac{2}{\pi}.$$

## 9.6. Površina vrtenine

Radi bi izračunali površino robne ploskve vrtenine. Spomnimo se, da vrtenino dobimo z vrtenjem prereza okrog simetrijske osi. Robno ploskev vrtenine potem dobimo z vrtenjem robne krivulje prereza. Naučiti se torej moramo, kako izračunamo površino ploskve, ki jo dobimo z vrtenjem neke ravninske krivulje.

**Primer.** Površina stožca se sestoji iz površine plašča in površine osnovne ploskve. Površina osnovne ploskve je seveda $\pi R^2$, kjer je $R$ polmer osnovne ploskve stožca. Pokažimo, da je površina plašča enaka $\pi R\sqrt{R^2+h^2}$, kjer je $h$ višina stožca. Če plašč prerežemo po višini in odvijemo v ravnino, dobimo krožni izsek, katerega ploščina se ujema s površino plašča. Dobljeni krožni izsek ima polmer $\sqrt{R^2+h^2}$ in dolžino loka $2\pi R$ (obseg osnovne ploskve stožca), torej je njegova ploščina enaka $\pi(\sqrt{R^2+h^2})^2 \cdot \frac{2\pi R}{2\pi\sqrt{R^2+h^2}} = \pi R\sqrt{R^2+h^2}$.

**Primer.** Privzemimo, da sta števili $y_1$ in $y_2$ nenegativni. Če daljico, ki povezuje točki $T_1(x_1, y_1)$ in $T_2(x_2, y_2)$ zavrtimo okrog $x$ osi, potem dobimo ploskev s površino

$$P = 2\pi \cdot \frac{y_1+y_2}{2} \cdot \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

Ločimo primera $y_1 = y_2$ in $y_1 \neq y_2$. V prvem primeru je premica skozi $T_1$ in $T_2$ vzporedna z osjo $x$, torej je naša ploskev plašč valja z višino $h = x_2 - x_1$ in polmerom $r = y_1 = y_2$. Njena površina je $2\pi r h$, kar se ujema z gornjo formulo. (Preveri!) V drugem primeru premica skozi $T_1$ in $T_2$ seka abcisno os v točki $(\frac{x_2y_1-x_1y_2}{y_1-y_2}, 0)$, torej je naša ploskev razlika plaščev dveh stožcev z vrhom v točki $T$. Prvi ima višino $h_1 = |\frac{x_2y_1-x_1y_2}{y_1-y_2} - x_1|$ in polmer $R_1 = y_1$, drugi pa ima višino $h_2 = |\frac{x_2y_1-x_1y_2}{y_1-y_2} - x_2|$ in polmer $R_2 = y_2$. Tudi v tem primeru velja gornja formula saj je $P = |\pi R_1\sqrt{R_1^2+h_1^2} - \pi R_2\sqrt{R_2^2+h_2^2}|$, kar se ujema z gornjo formulo. (Preveri!)

Za bolj zapletene krivulje uporabimo naslednjo trditev.

**Trditev. Ploskev, ki jo dobimo z vrtenjem krivulje $y = f(x)$, kjer je $a \leq x \leq b$, okrog osi $x$, ima površino**

$$\boldsymbol{P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\ dx,}$$

**če je le funkcija $f$ zvezno odvedljiva in pozitivna.**

Dokaz: Ker je funkcija $f$ zvezno odvedljiva, vsi integrali obstajajo. Vzemimo neko delitev $\rho$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ intervala $[a, b]$ in narišimo lomljenko skozi točke $T_i(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \ldots, n$, na krivulji $y = f(x)$. Površina, ki jo dobimo z vrtenjem te lomljenke, je

$$P_\rho = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Če upoštevamo, da je $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ za nek $\xi_i$ med $x_{i-1}$ in $x_i$ in da je $\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}$ približno enako $f(\xi_i)$, dobimo

$$P = \lim_\rho P_\rho = \lim_\rho 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}\ \Delta x_i =$$

$$= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\ dx. \qquad \square$$

Podobno dokažemo naslednjo trditev.

**Trditev. Ploskev, ki jo dobimo z vrtenjem krivulje $x = h(y)$, kjer je $c \leq y \leq d$, okrog osi $x$, ima površino**

$$\boldsymbol{P = 2\pi \int_c^d y\sqrt{1 + h'(y)^2}\ dy,}$$

**če je le funkcija $h$ zvezno odvedljiva in $c \geq 0$.**

**Primer.** Izračunajmo površino plašča krogelnega odseka z višino $h$ in polmerom $R$. Vzamemo $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $a = R - h$ in $b = R$. Velja

$$f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{R - x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R - x^2}} = R,$$

zato je

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\ dx = 2\pi \int_{R-h}^{R} R\ dx = 2\pi Rh.$$

**Primer.** Celotno površino krogelnega odseka dobimo tako, da k površini njegovega plašča prištejemo ploščino osnovne ploskve, se pravi kroga s polmerom $r = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \sqrt{2Rh - h^2}$. Skupaj je to $P_o = \pi(4Rh - h^2)$.

Celotno površino krogelnega izseka dobimo tako, da k površini njegovega plašča prištejemo površino plašča stožca z višino $R - h$ in polmerom $r = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \sqrt{2Rh - h^2}$. Skupaj je to $P_i = 2\pi Rh + \pi r\sqrt{r^2 + h^2} = \pi R(2h + r)$.

Kadar poznamo središče krivulje, je površino vrtenine lažje izračunati z naslednjim pravilom.

**Drugo Guldinovo pravilo. Površina ploskve, ki jo dobimo z vrtenjem krivulje okrog premice, je enaka produktu dolžine te krivulje in dolžine poti, ki jo pri enem obratu napravi središče te krivulje.**

Dokaz: Če je krivulja oblike $y = f(x)$, kjer je $a \le x \le b$, potem velja

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx} \cdot \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = 2\pi y^* l,$$

kjer je $2\pi y^*$ ravno dolžina poti, ki jo pri enem obratu napravi središče $(x^*, y^*)$, $l$ pa je dolžina krivulje. Podobno postopamo tudi v primeru, ko je krivulja oblike $x = h(y)$, kjer $c \le y \le d$.

Pokažimo sedaj, da pravilo velja za splošnejše krivulje. Razrežimo krivuljo $K$ na več manjših krivulj $K_i$, $i = 1, \ldots, n$, ki so bodisi oblike $y = f_i(x)$ bodisi oblike $x = h_i(y)$. Označimo s $(x_i^*, y_i^*)$ središče, z $l_i$ pa dolžino krivulje $K_i$. Potem je površina ploskve, ki jo dobimo z vrtenjem $K$, enaka vsoti površin ploskev, ki jih dobimo z vrtenjem posameznih $K_i$, se pravi $P = 2\pi y_1^* \cdot l_1 + \ldots + 2\pi y_n^* \cdot l_n = 2\pi \cdot \frac{y_1^* l_1 + \ldots + y_n^* l_n}{l_1 + \ldots + l_n} \cdot (l_1 + \ldots + l_n) = 2\pi y^* l$, kjer je $2\pi y^*$ ravno pot središča, $l$ pa dolžina krivulje. $\square$

**Primer.** Površina torusa z velikim polmerom $a$ in malim polmerom $b$ je

$$P = 2\pi y^* l = 2\pi \cdot a \cdot 2\pi b = 4\pi^2 ab.$$

## 9.7. Vprašanja za ponavljanje

(1) (Ploščina in obsega lika)
   (a) Kako izračunamo ploščino lika omejenega s premicama $x = a$, $x = b$ in krivuljama $y = f(x)$, $y = g(x)$?

   (b) Kako izračunamo obseg lika iz točke (a)?
   (c) Kako izračunamo ploščino lika omejenega s premicama $y = c$, $y = d$ in krivuljama $x = k(y)$, $x = h(y)$?
   (d) Kako izračunamo obseg lika iz točke (c)?
(2) (Središče ravninskega lika)
   (a) Kako izračunamo središče lika omejenega s premicama $x = a$, $x = b$ in krivuljama $y = f(x)$, $y = g(x)$?
   (b) Kako izračunamo središče lika omejenega s premicama $y = c$, $y = d$ in krivuljama $x = k(y)$, $x = h(y)$?
   (c) Recimo, da lik lahko razrežemo na manjše kose, katerih središča in ploščine poznamo. Kako izračunamo središče tega lika?
(3) (Prostornina vrtenine)
   (a) Kako izračunamo prostornino vrtenine s simetrijsko osjo $x$ in prerezom omejenim s premicama $x = a$, $x = b$ in krivuljama $y = f(x)$, $y = g(x)$?
   (b) Kako izračunamo prostornino vrtenine s simetrijsko osjo $x$ in prerezom omejenim s premicama $y = c$, $y = d$ in krivuljama $x = k(y)$, $x = h(y)$?
   (c) Kaj pravi prvo Guldinovo pravilo?
(4) (Središče ravninske krivulje)
   (a) Kako izračunamo središče krivulje $y = f(x)$, kjer $a \leq x \leq b$?
   (b) Kako izračunamo središče krivulje $x = h(y)$, kjer je $c \leq y \leq d$?
   (c) Recimo, da krivuljo lahko razrežemo na manjše kose, katerih središča in dolžine poznamo. Kako izračunamo središče te krivulje?
(5) (Površina vrtenine)
   (a) Kako izračunamo površino ploskve, ki jo dobimo z vrtenjem krivulje $y = f(x), a \leq x \leq b$ okrog $x$ osi?
   (b) Kako izračunamo površino ploskve, ki jo dobimo z vrtenjem krivulje $x = h(y), c \leq y \leq d$ okrog $x$ osi?
   (c) Kaj pravi drugo Guldinovo pravilo?
(6) (Krogelni odseki in izseki)
   (a) Koliko je prostornina krogelnega odseka? Izpelji!
   (b) Koliko je prostornina krogelnega izseka? Izpelji!
   (c) Koliko je površina krogelnega odseka? Izpelji!
   (d) Koliko je površina krogelnega izseka? Izpelji!
(7) (Stožci in torusi)
   (a) Koliko je prostornina stožca? Izpelji!
   (b) Koliko je površina stožca? Izpelji!

(c) Koliko je prostornina torusa? Izpelji!
(d) Koliko je površina torusa? Izpelji!

# Del 4

# Linearna algebra

POGLAVJE 10

# Afine množice v $\mathbb{R}^n$

## 10.1. Urejene $n$-terice

Naj bo $n$ neko fiksno naravno število (običajno je $n = 2$ ali $n = 3$). Množico vseh urejenih $n$-teric realnih števil označimo z $\mathbb{R}^n$. Množico $\mathbb{R}^n$ si predstavljamo kot $n$-razsežen prostor z izbranim koordinatnim sistemom, urejeno $n$-terico $(x_1, \ldots, x_n)$ pa si lahko predstavljamo kot točko v $n$-razsežnem prostoru, ki ima v izbranem koordinatnem sistemu koordinate $(x_1, \ldots, x_n)$. Točki $(0, \ldots, 0)$ pravimo tudi **izhodišče**.

**Geometrijski vektor** je usmerjena daljica med dvema točkama. Geometrijskemu vektorju, ki se začne v izhodišču pravimo tudi **algebrski vektor**, na kratko pa kar **vektor**. Algebrski vektor je natanko določen s svojo končno točko, ta pa je natanko določena z $n$-terico svojih koordinat. Zato bomo v nadaljevanju besede urejena $n$-terica, točka v $\mathbb{R}^n$ in (algebrski) vektor uporabljali kot sinonime. Pravimo, da sta dva geometrijska vektorja **enaka**, če sta vzporedna, enako dolga in kažeta v isto smer. Vsak geometrijski vektor lahko vzporedno premaknemo tako, da njegov rep pade v izhodišče. Torej je vsak geometrijski vektor enak natanko enemu algebrskemu vektorju. Koordinate algebrskega vektorja, ki je enak geometrijskemu vektorju iz točke $(x_1, \ldots, x_n)$ v točko $(y_1, \ldots, y_n)$, so $(y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n)$.

Algebrske vektorje lahko seštevamo in jih množimo s skalarji, tj. realnimi števili. **Vsota** vektorjev $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ in $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ je vektor $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$. Ta vektor lahko konstruiramo tako, da rep vektorja $\mathbf{y}$ z vzporednim premikom prestavimo na glavo vektorja $\mathbf{x}$ in povežemo rep $\mathbf{x}$ z glavo premaknjenega $\mathbf{y}$. **Produkt** vektorja $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ in skalarja $\alpha$ je vektor $\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$. Če je $\alpha > 0$, potem $\alpha\mathbf{x}$ dobimo tako, da $\mathbf{x}$ raztegnemo za faktor $\alpha$. Če pa je $\alpha < 0$, potem $\alpha\mathbf{x}$ dobimo tako, da $\mathbf{x}$ raztegnemo za faktor $|\alpha|$ in ga prezrcalimo preko izhodišča. Osnovne lastnosti seštevanja in množenja s skalarjem so:

| | |
|---|---|
| $(i)$ $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$, | $(v)$ $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$, |
| $(ii)$ $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$, | $(vi)$ $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$, |
| $(iii)$ $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$, | $(vii)$ $(\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x})$, |
| $(iv)$ $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} + \mathbf{0}$, | $(viii)$ $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$. |

Pravimo, da je vektor $\mathbf{x}$ **linearna kombinacija** vektorjev $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$, če obstajajo taki skalarji $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, da velja $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \ldots + \alpha_m \mathbf{x}_m$.

**Primer.** Dana je daljica $AB$. Iščemo tako točko $C$ na tej daljici, da velja $\overline{AC} : \overline{CB} = \lambda : \mu$. Označimo z $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$ in $\mathbf{r}_C$ algebrske vektorje, ki ustrezajo točkam $A$, $B$ in $C$. Radi bi izrazili $\mathbf{r}_C$ z $\mathbf{r}_A$ in $\mathbf{r}_B$. Ker je $\overrightarrow{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$ in $\overrightarrow{AC} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\overrightarrow{AB}$, je

$$\mathbf{r}_C = \overrightarrow{0A} + \overrightarrow{AC} = \mathbf{r}_A + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) = \frac{1}{\lambda+\mu}(\mu \mathbf{r}_A + \lambda \mathbf{r}_B).$$

**Primer.** Točki $\frac{1}{m}(\mathbf{r}_1 + \ldots + \mathbf{r}_m)$ pravimo **središče** točk $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_m$. Ogledali si bomo geometrijsko konstrukcijo središča točk. Naj bo $\mathbf{p}_1 = \mathbf{r}_1$. Za vsak $i = 2, \ldots, m$ naj bo $\mathbf{p}_i$ taka točka na daljici med $\mathbf{p}_{i-1}$ in $\mathbf{r}_i$, ki to daljico deli v razmerju $1 : (i-1)$. Trdimo, da je potem $\mathbf{p}_m$ središče točk $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_m$.

Ker je $\mathbf{p}_1 = \mathbf{r}_1$ in ker za vsak $i = 2, \ldots, m$ velja

$$\mathbf{p}_i = \frac{i-1}{i}\mathbf{p}_{i-1} + \frac{1}{i}\mathbf{r}_i,$$

lahko s popolno indukcijo dokažemo, da je

$$\mathbf{p}_i = \frac{1}{i}(\mathbf{r}_1 + \ldots + \mathbf{r}_i)$$

za vsak $i = 1, \ldots, m$. Trditev namreč drži za $i = 1$ in če velja za $i$, potem velja tudi za $i+1$, saj je $\mathbf{p}_{i+1} = \frac{i}{i+1}\mathbf{p}_i + \frac{1}{i+1}\mathbf{r}_{i+1} = \frac{i}{i+1} \cdot \frac{1}{i}(\mathbf{r}_1 + \ldots + \mathbf{r}_i) + \frac{1}{i+1}\mathbf{r}_{i+1} = \frac{1}{i+1}(\mathbf{r}_1 + \ldots + \mathbf{r}_i) + \frac{1}{i+1}\mathbf{r}_{i+1} = \frac{1}{i+1}(\mathbf{r}_1 + \ldots + \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_{i+1})$. Posebej je $\mathbf{p}_m = \frac{1}{m}(\mathbf{r}_1 + \ldots + \mathbf{r}_m)$, kar smo tudi želeli dokazati.

Vektorji $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_m$ so **linearno odvisni**, če je eden od njih enak linearni kombinaciji preostalih $m-1$ vektorjev, sicer pa pravimo, da so **linearno neodvisni**.

**Primer.** Dva vektorja sta linearno neodvisna natanko tedaj, ko ne ležita na isti premici skozi izhodišče. Trije vektorji so linearno neodvisni natanko tedaj, ko ne ležijo na isti ravnini skozi izhodišče.

Če so vektorji $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_m$ linearno neodvisni in velja

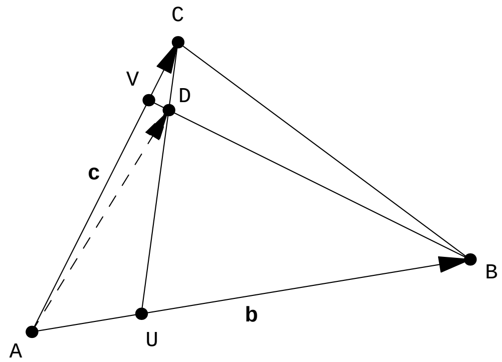
$$\alpha_1 \mathbf{r}_1 + \ldots + \alpha_m \mathbf{r}_m = \beta_1 \mathbf{r}_1 + \ldots + \beta_m \mathbf{r}_m,$$

za neke skalarje $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_m$, potem je

$$\alpha_i = \beta_i \text{ za vsak } i = 1, \ldots, m.$$

Oglejmo si primer uporabe te lastnosti.

**Primer.** Vzemimo trikotnik s oglišči $A, B, C$. Naj bo $U$ taka točka na daljici $AB$, da je $\overline{AU} : \overline{UB} = 1 : 3$ in naj bo $V$ taka točka na daljici $AC$, da velja $\overline{AV} : \overline{VC} = 4 : 1$. Naj bo točka $D$ presečišče daljic $CU$ in $BV$. Izrazimo vektor $\overrightarrow{AD}$ z vektorjema $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$ in $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$!




Ker je $\overrightarrow{AU} = \frac{1}{4}\mathbf{b}$, $\overrightarrow{AV} = \frac{4}{5}\mathbf{c}$, $\overrightarrow{UC} = \mathbf{c} - \frac{1}{4}\mathbf{b}$ in $\overrightarrow{VB} = \mathbf{b} - \frac{4}{5}\mathbf{c}$, velja

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AU} + \lambda\overrightarrow{UC} = \frac{1}{4}\mathbf{b} + \lambda(\mathbf{c} - \frac{1}{4}\mathbf{b}) = \frac{1-\lambda}{4}\mathbf{b} + \lambda\mathbf{c}$$

in

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AV} + \mu\overrightarrow{VB} = \frac{4}{5}\mathbf{c} + \mu(\mathbf{b} - \frac{4}{5}\mathbf{c}) = \mu\mathbf{b} + \frac{4(1-\mu)}{5}\mathbf{c},$$

kjer skalarjev $\lambda$ in $\mu$ še ne poznamo. Ker sta $\mathbf{b}$ in $\mathbf{c}$ linearno neodvisna, odtod sledi, da je

$$\frac{1-\lambda}{4} = \mu \quad \text{in} \quad \lambda = \frac{4(1-\mu)}{5}.$$

Rešitev tega sistema je $\lambda = \frac{3}{4}$ in $\mu = \frac{1}{16}$. Torej je $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{16}\mathbf{b} + \frac{3}{4}\mathbf{c}$.

## 10.2. Norma, skalarni in vektorski produkt

Za vsak vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definiramo njegovo **normo**

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Po Pitagorovem izreku je $\|\mathbf{x}\|$ ravno oddaljenost točke $\mathbf{x}$ od izhodišča, razdaljo med dvema točkama $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$ pa lahko izrazimo kot $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$. Namesto $\|\overrightarrow{AB}\|$ pišemo raje $\overline{AB}$.

**Skalarni produkt** vektorjev $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ in $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ je definiran z

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Zveza med skalarnim produktom in normo je $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2$. Osnovni algebrski lastnosti skalarnega produkta sta

(1) $\langle \alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \beta\langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ za vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ter $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ in

(2) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ za vse $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Dokaz je tako preprost, da ga prepustimo bralcu.

**Primer.** Dokažimo, da za vsak paralelogram $ABCD$ velja

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2(\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2).$$

Pišimo $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\mathbf{b} = \overrightarrow{AD}$. Potem je

$$\overline{AB} = \|\mathbf{a}\|, \quad \overline{AD} = \|\mathbf{b}\|, \quad \overline{AC} = \|\mathbf{a}+\mathbf{b}\| \quad \text{in} \quad \overline{BD} = \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|.$$

Formula sedaj sledi iz računa $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2 = \langle \mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}+\mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}-\mathbf{b}, \mathbf{a}-\mathbf{b} \rangle = (\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle + 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) + (\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle - 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) = 2(\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle) = 2(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2)$.

Oglejmo si sedaj, kako si skalarni produkt vektorjev $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$ geometrijsko predstavljamo. Najprej narišimo trikotnik $\triangle OAB$, kjer je $\mathbf{x} = \overrightarrow{OA}$ in $\mathbf{y} = \overrightarrow{OB}$. Kot pri $O$ označimo s $\phi$, projekcijo točke $A$ na premico $OB$ pa z $D$. Po Pitagorovem izreku je $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2$. Ker je $\overline{AD} = \overline{OA} \sin\phi$ in $\overline{DB} = |\overline{OB} - \overline{OD}| = |\overline{OB} - \overline{OA}\cos\phi|$, dobimo

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2\,\overline{OA}\;\overline{OB}\cos\phi.$$

Tej formuli pravimo **kosinusi izrek**. Če vanjo vstavimo

$$\overline{OA} = \|\mathbf{x}\|, \quad \overline{OB} = \|\mathbf{y}\| \quad \text{in} \quad \overline{AB} = \|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|,$$

dobimo

$$\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\phi.$$

Po drugi strani je

$$\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{y}-\mathbf{x}, \mathbf{y}-\mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}\|^2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

Po krajšanju dobimo formulo

$$\boxed{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\phi.}$$

Ta formula ima dve pomembni posledici. Prva je ta, da sta neničelna vektorja $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$ pravokotna natanko tedaj, ko je $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. To sledi iz dejstva, da je $\cos\phi = 0$ natanko tedaj, ko je $\phi = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Druga posledica je ocena za normo vsote. Vzemimo poljubna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ in označimo s $\phi$ kot med njima. Ker je $-1 \leq \cos\phi \leq 1$, se število $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\;\|\mathbf{y}\|\cos\phi$ nahaja med $\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 -$

$2\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| = (\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|)^2$ in $\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2$. Odtod sledi, da je

$$|\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|| \leq \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Desni strani te ocene pravimo **trikotniška neenakost**.

Za dva vektorja iz $\mathbb{R}^3$ lahko definiramo tudi njun **vektorski produkt**. Če je

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \quad \text{in} \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3),$$

potem definiramo

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

Osnovne algebrske lastnosti vektorskega produkta so:

- $\mathbf{x} \times \mathbf{x} = 0$ za vsak $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$,
- $\mathbf{y} \times \mathbf{x} = -(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$ za vsak $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ in $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$,
- $(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \times \mathbf{z} = \alpha(\mathbf{x} \times \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y} \times \mathbf{z})$ za vsak $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Geometrijski pomen vektorskega produkta $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ je naslednji.

- Dolžina vektorja $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ je $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \sin \phi$, kjer je $\phi$ kot med vektorjema $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$.
- Vektor $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ leži na premici skozi izhodišče, ki je pravototna tako na vektor $\mathbf{x}$ kot na vektor $\mathbf{y}$.
- Smer vektorja $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ določimo s **pravilom desnega vijaka**. Desni mezinec položimo na vektor $\mathbf{x}$ tako, da prsti kažejo v smeri vektorja $\mathbf{y}$. Potem palec kaže v smeri vektorja $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$.

Dokaz teh lastnosti prepustimo bralcu.

## 10.3. Premice v $\mathbb{R}^n$

Premico v $\mathbb{R}^n$ najpogostoje podamo s točko na premici in vektorjem v smeri premice. Če je $\mathbf{x}_0$ dana točka na premici in $\mathbf{p}$ dani vektor v smeri premice potem poljubno točko $\mathbf{x}$ na tej premici izrazimo kot

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{p},$$

kjer je $t$ poljubno realno število. Spremenljivki $t$ pravimo **parameter**, enačbi pa **parametrična enačba** premice. Če je $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n})$ in $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, potem lahko parametrično enačbo zapišemo po komponentah kot

$$x_1 = x_{01} + tp_1, \ldots, x_n = x_{0n} + tp_n.$$

Če se požvižgamo na morebitno deljenje z nič, potem lahko zapišemo

$$t = \frac{x_1 - x_{01}}{p_1} = \ldots = \frac{x_n - x_{0n}}{p_n}.$$

Tej enačbi pravimo **normalna enačba** premice.

**Primer.** Poiščimo normalno enačbo premice v $\mathbb{R}^3$, ki gre skozi točki $\mathbf{x}_1 = (0, -2, 1)$ in $\mathbf{x}_2 = (3, -2, -1)$.

Najprej poiščemo točko $\mathbf{x}_0$ na premici in vektor $\mathbf{p}$ v smeri premice. Vzemimo na primer

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1 = (0, -2, 1) \quad \text{in} \quad \mathbf{p} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = (3, 0, -2).$$

Normalna enačba se potem glasi

$$t = \frac{x_1}{3} = \frac{x_2 + 2}{0} = \frac{x_3 - 1}{-2}.$$

Najpogostejše naloge s premicami so:

- pravokotna projekcija točke na premico,
- zrcaljenje točke čez premico in
- razdalja točke od premice.

Če je premica podana z normalno enačbo, jo najprej pretvorimo v parametrično enačbo, saj je ta najprimernejša za računanje.

Recimo torej, da bi radi pravokotno projecirali točko $\mathbf{x}_1$ na premico $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{p}$. Iskano točko označimo z $\mathbf{x}_1'$. Ker točka $\mathbf{x}_1'$ leži na premici, obstaja tak parameter $t'$, da velja

$$\mathbf{x}_1' = \mathbf{x}_0 + t'\mathbf{p}.$$

Parameter $t'$ moramo določiti tako, da je vektor $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x_1}'$ pravokoten na vektor $\mathbf{p}$. Potem je $0 = \langle \mathbf{x}_1 - \mathbf{x_1}', \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \mathbf{p} \rangle - t' \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle$. Odtod sledi, da je

$$t' = \frac{\langle \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \mathbf{p} \rangle}{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle}.$$

Torej je

$$\mathbf{x}_1' = \mathbf{x}_0 + \frac{\langle \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \mathbf{p} \rangle}{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle} \mathbf{p}.$$

Sedaj lahko izračunamo tudi oddaljenost točke $\mathbf{x}_1$ od premice $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{p}$ in njeno zrcalno sliko $\mathbf{x}_1''$ glede na to premico. Velja

$$d = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1'\| \quad \text{in} \quad \mathbf{x}_1'' = 2\mathbf{x}_1' - \mathbf{x_1}.$$

Zadnja formula sledi iz dejstva, da je $\mathbf{x}_1'$ ravno razpolovišče daljice med $\mathbf{x}_1$ in $\mathbf{x}_1''$, se pravi $\mathbf{x}_1' = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_1'')$.

Kadar smo v $\mathbb{R}^3$, lahko pri računanju oddaljenosti točke $\mathbf{x}_1$ od premice $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{p}$ uporabimo vektorski produkt. Velja

$$d = \frac{\|(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{p}\|}{\|\mathbf{p}\|}.$$

Tako leva kot desna stran sta namreč enaki $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| \sin \phi$, kjer je $\phi$ kot med vektorjema $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ in $\mathbf{p}$.

## 10.4. Linearne enačbe, hiperravnine

Enačbi oblike

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = b,$$

kjer so $a_1, \ldots, a_n$ in $b$ dana števila, $x_1, \ldots, x_n$ pa neznanke, pravimo **linearna enačba**. Vektor $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ je **rešitev** te enačbe, če velja $a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n = b$. Označimo z $\mathcal{S}$ množico vseh rešitev gornje linearne enačbe. Imamo tri možnosti:

- če je $a_1 = \ldots = a_n = 0$ in $b = 0$, potem je $\mathcal{S} = \mathbb{R}^n$;
- če je $a_1 = \ldots = a_n = 0$ in $b \neq 0$, potem je $\mathcal{S} = \emptyset$;
- če je vsaj eden od $a_1, \ldots, a_n$ različen od nič, potem je $\emptyset \subsetneq \mathcal{S} \subsetneq \mathbb{R}^n$. V tem primeru množici $\mathcal{S}$ pravimo **hiperravnina** v $\mathbb{R}^n$.

Oglejmo si tretji primer z geometrijskega stališča. Označimo

$$\mathbf{n} = (a_1, \ldots, a_n).$$

Po predpostavki obstaja tak $i$, da je $a_i \neq 0$. Torej je $\mathbf{n}$ neničeln vektor. Označimo z $\mathbf{r} = (x_1, \ldots, x_n)$ vektor spremenljivk. Linearno enačbo lahko sedaj zapišemo v obliki

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{r} \rangle = b.$$

Izberimo eno rešitev te linearne enačbe in jo označimo z $\mathbf{r}_0$. Lahko vzamemo na primer $\mathbf{r}_0 = \frac{b}{a_i} \mathbf{e}_i$, kjer je $\mathbf{e}_i$ vektor, ki ima na $i$-tem mestu enko, drugod pa same ničle. Če od enačbe $\langle \mathbf{n}, \mathbf{r} \rangle = b$ odštejemo število $\langle \mathbf{n}, \mathbf{r}_0 \rangle = b$, dobimo ekvivalentno enačbo

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \rangle = 0.$$

Tej enačbi pravimo **normalna enačba** hiperravnine, vektorju $\mathbf{n}$ pa **normala**. Pove nam, da je hiperravnina ravno množica vseh točk $\mathbf{r}$, pri katerih je vektor iz točke $\mathbf{r}_0$ v točko $\mathbf{r}$ pravokoten na vektor $\mathbf{n}$.

Hiperravnine v $\mathbb{R}^2$ so ravno premice v $\mathbb{R}^2$, hiperravnine v $\mathbb{R}^3$ pa običajne ravnine v $\mathbb{R}^3$.

**Primer.** Poiščimo enačbo ravnine v $\mathbb{R}^3$, ki gre skozi točke $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ in $\mathbf{r}_3$. Ta naloga je smiselna samo v primeru, ko vektorji ne ležijo na isti premici. V tem primeru je normala $\mathbf{n} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)$ neničelna. Enačba ravnine se potem glasi $\langle \mathbf{n}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1 \rangle = 0$.

Normalna enačba je tudi zelo prikladna za računanje. Oglejmo si tri standardne naloge s hiperravninami:

- oddaljenost točke od hiperravnine,

- pravokotna projekcija točke na hiperravnino in
- zrcaljenje točke čez hiperravnino.

Recimo, da bi radi izračunali oddaljenost $d$ točke $\mathbf{r}_1$ od hiperravnine $\langle \mathbf{n}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \rangle = 0$. Velja

$$d = \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0\| \cos \phi,$$

kjer je $\phi$ kot med vektorjema $\mathbf{n}$ in $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$. Pri določanju kota si pomagamo s formulo $\langle \mathbf{n}, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 \rangle = \|\mathbf{n}\| \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0\| \cos \phi$. Odtod dobimo

$$d = \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 \rangle}{\|\mathbf{n}\|}.$$

Pravokotno projekcijo $\mathbf{r}_1'$ točke $\mathbf{r}_1$ na hiperravnino $\langle \mathbf{n}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \rangle = 0$ dobimo tako, da izračunamo presek hiperravnine s premico $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{n}$. Formulo za premico vstavimo v formulo za hiperravnino in izrazimo $t$. Dobimo

$$t = -\frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle}.$$

Ko ta $t$ vstavimo v enačbo premice, dobimo

$$\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_1 - \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle}\mathbf{n}.$$

Kot pri premicah lahko zrcalno slike točke $\mathbf{r}_1$ preko hiperravnine dobimo tako, da upoštevamo, da je pravokotna projekcija $\mathbf{r}_1'$ ravno razpolovišče daljice med točko $\mathbf{r}_1$ in njeno zrcalno sliko $\mathbf{r}_1''$.

## 10.5. Sistemi linearnih enačb

Vektor iz $\mathbb{R}^n$ je rešitev sistema $m$ linearnih enačb

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}$$

če je rešitev od vsake posamezne enačbe. Če je $\mathcal{S}_i$ množica vseh rešitev $i$-te enačbe, potem je množica vseh rešitev gornjega sistema enaka

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{S}_m.$$

Množica vseh rešitev linearnega sistema je bodisi prazna bodisi enoelementna bodisi neskončna. V prvem primeru pravimo, da je sistem **nerešljiv**, v drugem, da je **enolično rešljiv** in v tretjem, da je **neenolično rešljiv**.

Če ima sistem $m$ enačb in $n$ neznank, potem pravimo, da je njegova **velikost** $m \times n$. Glede na velikost delimo sisteme na **kvadratne** (če $m = n$), **predoločene** (če $m > n$) in **poddoločene** (če $m < n$).

Pogosto (vendar ne vedno) se zgodi, da je predoločen sistem nerešljiv, kvadraten sistem enolično rešljiv in poddoločen sistem neenolično rešljiv.

Sisteme linearnih enačb rešujemo z Gaussovo metodo. Ideja je zelo preprosta. V našem sistemu velikosti $m \times n$ vzamemo prvo spremenljivko, ki v vsaj eni od enačb nastopa z neničelnim koeficientom (recimo $x_{i_1}$) in jo izrazimo z ostalimi spremenljivkami. Dobljeni izraz za $x_{i_1}$ nato vstavimo v preostalih $m-1$ enačb in jih uredimo. Dobimo sistem velikosti $(m-1) \times (n-1)$. Sedaj isti postopek ponovimo na novem sistemu. Spet vzamemo prvo spremenljivko, ki v vsaj eni enačbi novega sistema nastopa z neničelnim koeficientom (recimo $x_{i_2}$) in jo izrazimo z ostalimi spremenljivkami. Dobljeni izraz za $x_{i_2}$ vstavimo v preostalih $m-2$ enačb in jih uredimo. Dobimo sistem velikosti $(m-2) \times (n-2)$. Postopek ponavljamo, dokler ne zmanjka bodisi enačb bodisi spremenljivk, ki vsaj enkrat nastopajo z neničelnim koeficientom. Če nam je zmanjkalo enačb, potem je sistem rešljiv. Če pa nam je zmanjkalo spremenljivk z neničelnimi koeficienti, potem so nam na koncu ostale samo še enačbe oblike $0 = c$, kjer je $c$ realno število. Če so vse oblike $0 = 0$, potem je sistem rešljiv, sicer pa je nerešljiv.

Povejmo še, kako v rešljivem primeru poiščemo rešitev. Recimo, da je $x_{i_r}$ zadnja spremenljivka, ki smo jo izrazili. Njeno formulo vstavimo v formule za spremenljivke $x_{i_{r-1}}, \ldots, x_{i_1}$. Nato novo formulo za $x_{i_{r-1}}$ vstavimo v nove formule za spremenljivke $x_{i_{r-2}}, \ldots, x_{i_1}$. Postopek ponavljamo, dokler ne pridemo do $x_{i_1}$. Končno rešitev $\mathbf{r} = (x_1, \ldots, x_n)$ dobimo tako, da spremenljivke $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ zamenjamo z njihovimi formulami. Lahko jo zapišemo v obliki

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \sum_{j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}} x_j \mathbf{p_j},$$

kjer so $\mathbf{r}_0$ in $\mathbf{p}_j$ konstantni vektorji. Krajši premislek nas prepriča, da so vektorji $\mathbf{p}_j$ linearno neodvisni.

**Primer.** Rešimo sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} 2x - y + 3u - 2v &= 1, \\ x + y + 2u - 2v &= 0, \\ x + 2u - 3v &= -2. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe izrazimo

$$x = \frac{1 + y - 3u + 2v}{2}.$$

Ko formulo za $x$ vstavimo v drugo in tretjo enačbo, dobimo enačbi

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}u-v &= -\frac{1}{2},\\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}u-2v &= -\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Iz prve enačbe dobimo

$$y=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}u+v}{\frac{3}{2}}=\frac{-1-u+2v}{3}.$$

Ko to vstavimo v drugo enačbo in uredimo, dobimo

$$\frac{1}{3}u-\frac{5}{3}v=-\frac{7}{3}.$$

Odtod izrazimo

$$u=\frac{-\frac{7}{3}+\frac{5}{3}v}{\frac{1}{3}}=-7+5v.$$

Sedaj nam je zmanjkalo enačb, torej je sistem rešljiv. Ko formulo za $u$ vstavimo v formuli za $y$ in $x$, dobimo

$$y=\frac{6-3v}{3}=2-v \quad \text{in} \quad x=\frac{22+y-13v}{2}.$$

Sedaj še formulo za $y$ vstavimo v formulo za $x$ in dobimo

$$x=\frac{24-14v}{2}=12-7v.$$

Končna rešitev je

$$\mathbf{r}=(x,y,u,v)=(12-7v,2-v,-7+5v,v)=(12,2,-7,0)+t(-7,-1,5,1).$$

Rešitev je torej premica v $\mathbb{R}^4$.

**Primer.** Rešimo sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned}y-2z &= 2,\\ -x-y+2z &= 1,\\ x-2y+4z &= 1.\end{aligned}$$

Iz druge enačbe izrazimo $x$:

$$x=-1-y+2z$$

in ga vstavimo v prvo in tretjo enačbo. Ker prva enačba ne vsebuje $x$, se ne spremeni. Imamo sistem

$$\begin{aligned}y-2z &= 2,\\ -3y+6z &= 2.\end{aligned}$$

Sedaj iz prve enačbe izrazimo $y$:

$$y = 2 + 2z$$

in ga vstavimo v drugo enačbo. Ko uredimo, dobimo

$$0 = 8.$$

Ker smo dobili protislovno enačbo, linearni sistem nima rešitve.

Če iz enačbe

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

izrazimo $x_1$ in ga vstavimo v enačbo

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = d,$$

potem dobimo

$$(c_2 - \frac{c_1}{a_1}a_2)x_2 + \ldots + (c_n - \frac{c_1}{a_1}a_n)x_n = d - \frac{c_1}{a_1}b.$$

Enak rezultat bi dobili, če bi od druge enačbe odšteli z $-\frac{c_1}{a_1}$ pomnoženo prvo enačbo. Ta opazka nam lahko precej skrajša reševanje linearnega sistema.

## 10.6. Afine množice

Pravimo, da je podmnožica $\mathcal{A}$ v $\mathbb{R}^n$ **afina**, če je enaka množici vseh rešitev kakega sistema linearnih enačb.

Definicijo afine množice lahko povemo tudi z geometrijskim besediščem. Pravimo, da je podmnožica $\mathcal{A}$ v $\mathbb{R}^n$ **afina**, če je enaka bodisi $\mathbb{R}^n$ bodisi preseku končno mnogo hiperravnin v $\mathbb{R}^n$.

Glavni rezultat prejšnjega razdelka lahko povzamemo v naslednjo ugotovitev. Če je $\mathcal{A}$ afina množica v $\mathbb{R}^n$, potem je $\mathcal{A}$

- prazna množica ali
- enoelementna množica ali
- obstaja taka točka $\mathbf{r_0} \in \mathbb{R}^n$, tako naravno število $l$ in taki linearno neodvisni vektorji $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_l \in \mathbb{R}^n$, da je

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{r}_0 + t_1\mathbf{p}_1 + \ldots + t_l\mathbf{p}_l : \; t_1, \ldots, t_l \in \mathbb{R}\}.$$

Velja tudi obrat. Množica, ki je enega od teh treh tipov je afina. Prazna množica je množica rešitev linearne enačbe

$$0 \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_n = 1.$$

Enoelementna množica $\{(c_1, \ldots, c_n)\}$ je množica rešitev sistema

$$x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n.$$

V primeru, ko je afina množica podana s parametrično enačbo

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t_1\mathbf{p}_1 + \ldots + t_l\mathbf{p}_l,$$

kjer so $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_l$ linearno neodvisni, ločimo dva primera. Če je $l = n$, potem je afina množica enaka $\mathbb{R}^n$, ki je množica rešitev linearne enačbe

$$0 \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0.$$

Če je $l < n$, potem parametrično enačbo zapišemo po komponentah:

$$\begin{array}{ccccccc} p_{11}t_1 & + & \ldots & + & p_{l1}t_l & = & x_1 - c_1, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ p_{1n}t_1 & + & \ldots & + & p_{ln}t_l & = & x_n - c_n. \end{array}$$

Zanima nas, za katere vrednosti spremenljivk $x_1, \ldots, x_n$ je to rešljiv sistem linearnih enačb v spremenljivkah $t_1, \ldots, t_l$. Ko ta sistem obdelamo z Gaussovo metodo, dobimo na koncu enačbe oblike $0 = f_k(x_1, \ldots, x_n)$, $k = l + 1, \ldots, n$. To je iskani sistem linearnih enačb.

**Primer.** Poiščimo normalno enačbo ravnine v $\mathbb{R}^3$, ki je podana parametrično z enačbo

$$\mathbf{r} = (1, 2, -1) + s(2, 1, 3) + t(-1, 1, 1).$$

Zapišimo enačbo po komponentah:

$$x = 1 + 2s - t, \quad y = 2 + s + t, \quad z = -1 + 3s + t,$$

kar preoblikujemo v sistem linearnih enačb v $s$ in $t$:

$$2s - t = x - 1, \quad s + t = y - 2, \quad 3s + t = z + 1.$$

Iz prve enačbe izrazimo $s$ in ga vstavimo v drugo in tretjo enačbo. Dobimo

$$\frac{3}{2}t = -\frac{1}{2}x + y - \frac{3}{2} \quad \text{in} \quad \frac{5}{2}t = -\frac{3}{2}x + z + \frac{5}{2}.$$

Iz prve enačbe izrazimo $t$ in ga vstavimo v drugo enačbo. Dobimo

$$0 = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}y + z + 5.$$

To je iskana implicitna enačba ravnine.

**Primer.** Premico v $\mathbb{R}^3$, ki je podana s parametrično enačbo

$$\mathbf{r} = (1, 1, 2) + t(-1, 2, 2),$$

izrazimo kot presek dveh ravnin.

Enačbo premice zapišemo po komponentah in izrazimo $t$. Dobimo

$$t = \frac{x - 1}{-1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 2}{2}.$$

Za enačbi ravnin lahko vzamemo na primer $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2}$ in $\frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{2}$. Ko ti enačbi uredimo, dobimo

$$2x + y = 1 \quad \text{in} \quad y - z = -1.$$

## 10.7. Pravokotna projekcija točke na afino množico

Podan je vektor $\mathbf{r}_1$ v $\mathbb{R}^n$ in afina množica $\mathcal{A}$ v $\mathbb{R}^n$. Iščemo tako točko $\mathbf{r}_1'$ v $\mathcal{A}$, ki je najbližje točki $\mathbf{r}_1$. Točki $\mathbf{r}_1'$ pravimo **pravokotna projekcija** točke $\mathbf{r}_1$ na afino množico $\mathcal{A}$. Izkaže se, da taka točka vedno obstaja in da je ena sama. Ogledali si bomo dve metodi za določanje $\mathbf{r}_1'$.

Če je afina množica $\mathcal{A}$ podana s sistemom linearnih enačb

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}$$

potem pravokotno projekcijo točke $\mathbf{r}_1 = (c_1, \ldots, c_n)$ na $\mathcal{A}$ izračunamo po naslednjem receptu. Prvi korak: nastavek

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & c_1 + a_{11}\lambda_1 + \ldots + a_{m1}\lambda_m, \\ \vdots & & \\ x_n & = & c_n + a_{1n}\lambda_1 + \ldots + a_{mn}\lambda_m, \end{array}$$

vstavimo v gornji linearni sistem in uredimo. Dobimo sistem $m$ linearnih enačb za $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Drugi korak: poiščemo eno rešitev tega $m \times m$ sistema. Izkaže se, da je ta sistem vedno rešljiv, a ne nujno enolično. Tretji korak: Izbrano rešitev sistema vstavimo v nastavek za $x_1, \ldots, x_n$. Dobimo koordinate iskane pravokotne projekcije. Rezultat je neodvisen od tega, katero rešitev $m \times m$ sistema vstavimo.

**Primer.** Poišči pravokotno projekcijo točke

$$\mathbf{r}_1 = (1, 1, -1, -1)$$

na afino množico, ki je podana implicitno s sistemom

$$\begin{array}{rcl} 2x - y + 3u - 2v & = & 1, \\ x + y + 2u - 2v & = & 0, \\ x + 2u - 3v & = & -2. \end{array}$$

Projekcijo iščemo z nastavkom

$$\begin{array}{rcl} x & = & 1 + 2\lambda + \mu + \nu, \\ y & = & 1 - \lambda + \mu, \\ u & = & -1 + 3\lambda + 2\mu + 2\nu, \\ v & = & -1 - 2\lambda - 2\mu - 3\nu. \end{array}$$

ko ta nastavek vstavimo v linearen sistem in uredimo, dobimo

$$\begin{aligned} 18\lambda + 11\mu + 14\nu &= 1, \\ 11\lambda + 10\mu + 11\nu &= -2, \\ 14\lambda + 11\mu + 14\nu &= -4. \end{aligned}$$

Rešitev tega linearnega sistema je

$$\lambda = \frac{5}{4}, \quad \mu = \frac{16}{19}, \quad \nu = -\frac{167}{76}.$$

Od tod sledi, da je $\mathbf{r}_1' = (x, y, u, v)$, kjer je

$$x = \frac{163}{76}, \quad y = \frac{45}{76}, \quad u = \frac{3}{76}, \quad v = \frac{107}{76}.$$

Bralca vabim, da rezultat preveri s formulo za projekcijo točke na premico.

Dokažimo sedaj, da ta metoda res da pravilen rezultat.

Dokaz: Če pišemo $\mathbf{r} = (x_1, \ldots, x_n)$ in $\mathbf{u}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ za $i = 1, \ldots, m$, potem lahko linearni sistem zapišemo kot

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{u}_1 \rangle = b_1, \ldots, \langle \mathbf{r}, \mathbf{u}_m \rangle = b_m,$$

nastavek pa kot

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_1} + \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + \lambda_m \mathbf{u}_m.$$

Ko vstavimo nastavek v sistem, dobimo sistem velikosti $m \times m$ za spremenljivke $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Naj bo $\lambda_1', \ldots, \lambda_m'$ rešitev tega sistema. Dokaz rešljivosti tega sistema bomo preskočili. Trdimo, da je

$$\mathbf{r}_1' = \mathbf{r_1} + \lambda_1' \mathbf{u}_1 + \ldots + \lambda_m' \mathbf{u}_m$$

edina pravokotna projekcija točke $\mathbf{r}_1$ na množico $\mathcal{A}$. Dokazati moramo, da za poljubno točko $\mathbf{z} \in \mathcal{A}$, ki je različna od $\mathbf{r}_1'$, velja

$$\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{z}\| > \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1'\|.$$

Naj bo $\mathbf{a} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1'$ in $\mathbf{b} = \mathbf{r}_1' - \mathbf{z}$. Ker je $\mathbf{z} \neq \mathbf{r}_1'$, je $\mathbf{b} \neq 0$. Dokažimo najprej, da je $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$. Ker sta $\mathbf{r}_1'$ in $\mathbf{z}$ rešitvi sistema linearnih enačb, velja $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{r}_1' \rangle = b_i$ in $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{z} \rangle = b_i$ za vsak $i = 1, \ldots, m$. Torej je $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{r}_1' \rangle - \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{z} \rangle = b_i - b_i = 0$ za vsak $i = 1, \ldots, m$. Ker je $\mathbf{a} = -\sum_{i=1}^m \lambda_i' \mathbf{u}_i$, odtod sledi, da res velja $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = -\sum_{i=1}^m \lambda_i' \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{b} \rangle = 0$. Iz $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$ in $\mathbf{b} \neq 0$ sledi, da je $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 > \|\mathbf{a}\|^2$. Torej je res $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| > \|\mathbf{a}\|$. $\square$

Če je afina množica $\mathcal{A}$ podana s parametrično enačbo

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t_1 \mathbf{p}_1 + \ldots + t_l \mathbf{p}_l,$$

kjer so $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_l$ (ne nujno linearno neodvisni) vektorji v $\mathbb{R}^n$, potem pravokotno projekcijo točke $\mathbf{r}_1$ na $\mathbf{A}$ izračunamo tako, da gornji nastavek za $\mathbf{r}$ vstavimo v enačbe

$$\langle \mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1 \rangle = 0, \ldots, \langle \mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_m \rangle = 0.$$

Dobimo rešljiv sistem $m$ enačb za spremenljivke $t_1, \ldots, t_m$. Če je $t_1', \ldots, t_m'$ rešitev tega $m \times m$ sistema, potem je iskana točka

$$\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_0 + t_1'\mathbf{p}_1 + \ldots + t_l'\mathbf{p}_l.$$

**Primer.** Projecirajmo točko $\mathbf{r}_1 = (1, 3, 2)$ na ravnino, ki je podana s parametrično enačbo

$$\mathbf{r} = (1, 2, -1) + s(2, 1, 3) + t(-1, 1, 1).$$

Izraz $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = (0, -1, -3) + s(2, 1, 3) + t(-1, 1, 1)$, moramo vstaviti v enačbi

$$\langle \mathbf{r} - \mathbf{r}_1, (2, 1, 3) \rangle = 0 \quad \text{in} \quad \langle \mathbf{r} - \mathbf{r}_1, (-1, 1, 1) \rangle = 0.$$

Ko uredimo, dobimo sistem dveh enačb za $s$ in $t$:

$$14s + 2t = -1 \quad \text{in} \quad 2s + 3t = 0.$$

Odtod sledi, da je $s = -\frac{3}{38}$ in $t = \frac{1}{19}$. Torej je

$$\mathbf{r_1}' = (1, 2, -1) - \frac{3}{38}(2, 1, 3) + \frac{1}{19}(-1, 1, 1) = (\frac{15}{19}, \frac{75}{38}, -\frac{45}{38}).$$

Dokaz, da metoda vedno deluje, je zelo podoben kot pri prejšnji metodi.

Dokaz: Naj bo

$$\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_0 + t_1'\mathbf{p}_1 + \ldots + t_l'\mathbf{p}_l$$

taka točka, ki zadošča enačbam

$$\langle \mathbf{r_1}' - \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1 \rangle = 0, \ldots, \langle \mathbf{r_1}' - \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_m \rangle = 0.$$

(Dokaz obstoja take točke spet preskočimo.) Trdimo, da potem za vsako točko

$$\mathbf{z} = \mathbf{r}_0 + t_1\mathbf{p}_1 + \ldots + t_l\mathbf{p}_l,$$

ki se razlikuje od $\mathbf{r}_1'$, velja

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{r}_1\| > \|\mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_1\|.$$

Naj bo spet $\mathbf{a} = \mathbf{z} - \mathbf{r}_1' \neq 0$ in $\mathbf{b} = \mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_1$. Ker je $\langle \mathbf{r_1}' - \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_i \rangle = 0$ za $i = 1, \ldots, m$, velja $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \sum_{i=1}^m (t_i - t_i')\mathbf{p_i}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{i=1}^m (t_i - t_i')\langle \mathbf{p_i}, \mathbf{b} \rangle = 0$, Sledi, da je $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 > \|\mathbf{b}\|^2$. Torej je res $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| > \|\mathbf{b}\|$. $\square$

## 10.8. Regresijska premica in posplošitve

Iščemo tako premico $y = ax+b$, ki se najbolje prilega danim točkam

$$(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n).$$

Za vsak $i$ naj bo $d_i$ razdalja med dano točko $(x_i, y_i)$ in točko $(x_i, ax_i+b)$ na premici. Velja torej $d_i = |y_i - (ax_i + b)|$. Kot mero za natančnost prileganja vzamemo izraz $d_1^2+\ldots+d_n^2$. Koeficienta $a$ in $b$ želimo določiti tako, da bo ta izraz najmanjši možen. Potem pravimo, da je $y = ax+b$ premica, ki se po metodi najmanjših kvadratov najbolje prilega točkam $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.

Pišimo $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ in $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$. Potem je

$$d_1^2 + \ldots + d_n^2 = \|\mathbf{y} - (a\mathbf{x} + b\mathbf{1})\|^2.$$

Ta izraz je najmanjši pri tistih $a$ in $b$, ko je točka $a\mathbf{x}+b\mathbf{1}$ najbližje točki $\mathbf{y}$. V prejšnjem razdelku smo se naučili, da se to zgodi v primeru, ko je $\langle a\mathbf{x} + b\mathbf{1} - \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle = 0$ in $\langle a\mathbf{x} + b\mathbf{1} - \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle = 0$. Rešiti torej moramo sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} a\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + b\langle \mathbf{1}, \mathbf{x}\rangle &= \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle, \\ a\langle \mathbf{x}, \mathbf{1}\rangle + b\langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle &= \langle \mathbf{y}, \mathbf{1}\rangle. \end{aligned}$$

Delimo sistem z $n$ in uvedimo naslednje oznake

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2, \quad \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Potem se sistem enačb za $a$ in $b$ glasi

$$\begin{aligned} a\overline{x^2} \;+\; b\bar{x} &= \overline{xy}, \\ a\bar{x} \;+\; b &= \bar{y}. \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad \text{in} \quad b = \frac{\overline{x^2}\,\bar{y} - \overline{xy}\,\bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}.$$

**Primer.** Poiščimo premico, ki se po metodi najmanjših kvadratov najbolje prilega točkam

$$(1, 1), \quad (2, -1), \quad (3, 0), \quad (4, -1).$$

Najprej izračunamo

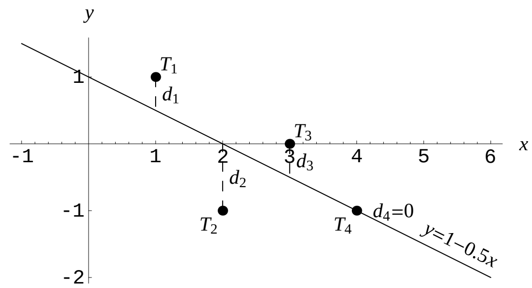
$$\bar{x} = 2.5, \quad \bar{y} = -0.25, \quad \overline{x^2} = 7.5, \quad \overline{xy} = -1.25.$$

Potem je

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = -0.5, \quad b = \frac{\overline{x^2}\,\bar{y} - \overline{xy}\,\bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = 1,$$

torej je iskana premica

$$y = 1 - 0.5x.$$




Metodo najmanjših kvadratov lahko posplošimo na polinome višjih stopenj in tudi na več spremenljivk. Ponazorimo to z dvema primeroma.

Najprej poiščimo kvadratno parabolo $y = ax^2 + bx + c$, ki se najbolje prilega danim točkam $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ po metodi najmanjših kvadratov. V tem primeru je $d_i = |y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)|$ in

$$d_1^2 + \ldots + d_n^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{r}\|^2,$$

kjer je

$$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n), \quad \mathbf{r} = a(x_1^2, \ldots, x_n^2) + b(x_1, \ldots, x_n) + c(1, \ldots, 1).$$

Iz prejšnjega razdelka vemo, da bo ta izraz najmanjši, ko bo vektor $\mathbf{y} - \mathbf{r}$ pravokoten na vektorje $(x_1^2, \ldots, x_n^2)$, $(x_1, \ldots, x_n)$ in $(1, \ldots, 1)$. Rešiti torej moramo sistem enačb

$$\begin{aligned} a\sum x_i^4 + b\sum x_i^3 + c\sum x_i^2 &= \sum x_i^2 y_i, \\ a\sum x_i^3 + b\sum x_i^2 + c\sum x_i &= \sum x_i y_i, \\ a\sum x_i^2 + b\sum x_i + c\sum 1 &= \sum y_i, \end{aligned}$$

kjer pri vseh vsotah $i$ teče od 1 do $n$.

Poiščimo po metodi najmanjših kvadratov še ravnino $z = ax + by + c$, ki se najbolje prilega danim točkam $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_n, y_n, z_n)$. Velja $d_i = |z_i - (ax_i + by_i + c)|$ in

$$d_1^2 + \ldots + d_n^2 = \|\mathbf{z} - a\mathbf{x} - b\mathbf{y} - c\mathbf{1}\|^2,$$

kjer je $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ in $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)$. Ta izraz bo najmanši, ko bo vektor $\mathbf{z} - a\mathbf{x} - b\mathbf{y} - c\mathbf{1}$

pravokoten na vektorje $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ in $\mathbf{1}$. Rešiti moramo sistem

$$\begin{aligned}
a\sum x_i^2 + b\sum x_i y_i + c\sum x_i &= \sum x_i z_i,\\
a\sum x_i y_i + b\sum y_i^2 + c\sum y_i &= \sum y_i z_i,\\
a\sum x_i + b\sum y_i + c\sum 1 &= \sum z_i,
\end{aligned}$$

kjer pri vseh vsotah $i$ teče od 1 do $n$.

## 10.9. Vprašanja za ponavljanje

(1) (Geometrijski in algebrski vektorji)
   (a) Kaj je geometrijski vektor? Kaj je algebrski vektor?
   (b) Kdaj sta dva geometrijska vektorja enaka? Kaj pa dva algebrska?
   (c) Kako geometrijskemu vektorju priredimo ustrezen algebrski vektor?
   (d) Pojasni zvezo med algebrskimi vektorji in točkami?

(2) (Linearne kombinacije) Dani so vektorji $\mathbf{a} = (-1, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 1)$ in $\mathbf{c} = (1, -2)$.
   (a) Določi točko, ki deli daljico med točkama $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ v razmerju $1 : 2$!
   (b) Določi središče točk $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ in $\mathbf{c}$!
   (c) Dokaži, da sta vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ linearno neodvisna!
   (d) Dokaži, da so vektorji $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ in $\mathbf{c}$ linearno odvisni!

(3) (Norma, skalarni in vektorski produkt)
   (a) Kako je definirana norma vektorja? Kdaj je enaka 0?
   (b) Kako je definiran skalarni produkt dveh vektorjev? Kdaj je enak 0?
   (c) Kako je definiran vektorski produkt dveh vektorjev? Kdaj je enak 0?

(4) (Premice v $\mathbb{R}^n$)
   (a) Premica je podana z dvema točkama $\mathbf{r}_1$ in $\mathbf{r}_2$. Določi parametrično in normalno enačbo te premice!
   (b) Pojasni, kako izračunamo oddaljenost točke $T$ od te premice!
   (c) Pojasni, kako določimo projekcijo točke $T$ na to premico!

(5) (Ravnine v $\mathbb{R}^3$)
   (a) Določi parametrično in normalno enačbo ravnine, ki gre skozi točke $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ in $\mathbf{r}_3$!
   (b) Pojasni, kako izračunamo oddaljenost točke $T$ od te ravnine!
   (c) Pojasni, kako določimo projekcijo točke $T$ na to ravnino!

(6) (Sistemi linearnih enačb)
   (a) Kako poiščemo rešitev sistema linearnih enačb z metodo zaporednega izločanja spremenljivk?
   (b) Kako poiščemo rešitev sistema linearnih enačb z Gaussovo eliminacijo?
   (c) Pojasni zvezo med obema metodama!

(7) (Afine množice v $\mathbb{R}^n$)
   (a) Kaj je afina množica? Povej definicijo in nekaj primerov!
   (b) Kako izračunamo projekcijo točke na afino množico, ki je podana implicitno?
   (c) Kako izračunamo projekcijo točke na afino množico, ki je podana parametrično?

(8) (Regresijska premica) Iščemo premico, ki se najbolje prilega danim točkam $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.
   (a) Kateri izraz meri ujemanje premice z danimi točkami?
   (b) Kako poiščemo najmanjšo vrednost izraza iz (a)?
   (c) Izpelji formuli za koeficienta iskane premice!

(9) (Posplošitve regresijske premice)
   (a) Kako poiščemo kvadratno parabolo $y = ax^2 + bx + c$, ki se najbolje prilega danim točkam $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$?
   (b) Kako poiščemo ravnino $z = ax + by + c$, ki se najbolje prilega danim točkam $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_n, y_n, z_n)$?
   (c) Kolikšno je najmanjše število točk, pri katerem sta problema iz (a) in (b) smiselna?

POGLAVJE 11

# Matrike in determinante

## 11.1. Operacije z matrikami

**Matrika** velikosti $m \times n$ je urejena $m$-terica urejenih $n$-teric realnih števil, torej element prostora $(\mathbb{R}^n)^m$. V primeru, ko je $m = 1$ ali $n = 1$ lahko $m \times n$ matriko smatramo za vektor, v primeru $m = n = 1$ pa jo lahko smatramo za skalar. Matrike običajno označujemo z velikimi tiskanimi črkami. Namesto

$$A = ((a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, (a_{m1}, \dots, a_{mn}))$$

pišemo raje

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Vektorju

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}$$

pravimo $i$-ta **vrstica** matrika $A$, vektorju

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

pa $j$-ti **stolpec** matrike $A$. Skalar

$$a_{ij}$$

je $(i, j)$-ti **element** matrike $A$.

Z matrikami lahko računamo. Osnovne računske operacije so seštevanje matrik, množenje matrike s skalarjem, množenje matrik in transponiranje. Pri vsaki od naštetih operacij si bomo ogledali definicijo in nekaj osnovnih lastnosti.

**Vsota dveh matrik**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

je matrika

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Če matriki $A$ in $B$ nista iste velikosti, potem njune vsote ne moremo definirati.

Definirajmo sedaj **produkt matrike s skalarjem**. Če je $\lambda$ skalar in $A$ kot zgoraj, potem je

$$\lambda A=\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Namesto $(-1)\cdot A$ pišemo kar $-A$.

Naj bo $O$ matrika iz samih ničel velikosti $m\times n$. Potem za poljubne matrike $A, B, C$ velikosti $m\times n$ in poljubna skalarja $\lambda,\mu$ velja

(1) $A+B=B+A$, (5) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$,
(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$, (6) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu B$,
(3) $A+O=O+A=A$, (7) $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$,
(4) $A+(-A)=(-A)+A=O$, (8) $1\cdot A=A$.

Najzanimivejša operacija je **množenje dveh matrik**. Povejmo definicijo najprej za poseben primer. Če je

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

potem je

$$AB=a_1b_1+\ldots+a_nb_n=\sum_{k=1}^{n} a_kb_k.$$

V splošnem $(i,j)$-ti element produkta $AB$ dobimo tako, da na gornji način zmnožimo $i$-to vrstico matrike $A$ z $j$-tim stolpcem matrike $B$. Zapišimo to še na dolgo. Če je

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{bmatrix},$$

potem je

$$AB=\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kp} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{kp} \end{bmatrix}.$$

Opazimo, da je produkt definiran samo v primeru, ko je število stolpcev matrike $A$ enako številu vrstic matrike $B$. Opazimo tudi, da ima produkt $AB$ toliko vrstic kot matrika $A$ in toliko stolpcev kot matrika $B$.

**Primer.** Zmnožimo matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Velja

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad BA = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ta primer nas nauči, da ni vseeno, v kakšnem vrstnem redu zmnožimo dve matriki.

**Primer.** Tovarna proizvaja izdelke $I_1$, $I_2$ in $I_3$. Pri tem se uporabljajo surovine $S_1$, $S_2$, $S_3$ in $S_4$. Količina surovin, potrebnih za posamezen izdelek je podana s tabelo $A$:

| $A$ | $I_1$ | $I_2$ | $I_3$ |
|---|---|---|---|
| $S_1$ | 2 | 0 | 1 |
| $S_2$ | 1 | 3 | 3 |
| $S_3$ | 0 | 2 | 1 |
| $S_4$ | 4 | 1 | 0 |

Planirana proizvodnja izdelkov $I_1$, $I_2$ in $I_3$ v mesecih $M_1$ in $M_2$ je podana s tabelo $B$:

| $B$ | $M_1$ | $M_2$ |
|---|---|---|
| $I_1$ | 400 | 300 |
| $I_2$ | 200 | 150 |
| $I_3$ | 100 | 250 |

Koliko surovin moramo kupiti posamezen mesec, da bomo izpolnili plan? Odgovor je podan s tabelo $C$:

| $C$ | $M_1$ | $M_2$ |
|---|---|---|
| $S_1$ | $2 \cdot 400 + 0 \cdot 200 + 1 \cdot 100 = 900$ | $2 \cdot 300 + 0 \cdot 150 + 1 \cdot 250 = 850$ |
| $S_2$ | $1 \cdot 400 + 3 \cdot 200 + 3 \cdot 100 = 1300$ | $1 \cdot 300 + 3 \cdot 150 + 3 \cdot 250 = 1500$ |
| $S_3$ | $0 \cdot 400 + 2 \cdot 200 + 1 \cdot 100 = 500$ | $0 \cdot 300 + 2 \cdot 150 + 1 \cdot 250 = 550$ |
| $S_4$ | $4 \cdot 400 + 1 \cdot 200 + 0 \cdot 100 = 1800$ | $4 \cdot 300 + 1 \cdot 150 + 0 \cdot 250 = 1350$ |

**Transponiranka** matrike $A$ velikosti $m\times n$ je matrika $A^T$ velikosti $n\times m$, ki ima na $(i,j)$-tem mestu element $a_{ji}$. Zapišimo na dolgo

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix} \Longrightarrow A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix}.$$

Osnovne lastnosti množenja matrik in transponiranja so

(9) $(AB)C=A(BC)$, (13) $(A^T)^T=A$,
(10) $(A+B)C=AC+BC$, (14) $(AB)^T=B^TA^T$,
(11) $A(B+C)=AB+AC$, (15) $(A+B)^T=A^T+B^T$,
(12) $(\lambda A)B=A(\lambda B)=\lambda(AB)$, (16) $(\lambda A)^T=\lambda A^T$.

Pri vsaki formuli predpostavljamo, da so matrike take velikosti, da so vsa seštevanja in množenja definirana.

Naj bo $I_k$ kvadratna matrika velikosti $k\times k$ naslednje oblike

$$I_k=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix}.$$

Taki matriki pravimo **identična matrika**. Za poljubno matriko $A$ velikosti $m\times n$ in poljubno naravno število $k$ velja

(17) $I_mA=AI_n=A$ in (18) $I_k^T=I_k$.

## 11.2. Matrični zapis linearnega sistema

Sistem linearnih enačb

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1,\\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots\\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m,\end{array}$$

lahko s pomočjo matričnega množenja zapišemo v obliki

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b},$$

kjer je

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\quad \text{in}\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}.$$

Spomnimo se, da sistem rešujemo z uporabo naslednjih treh tipov **elementarnih transformacij**:

(1) k eni od enačb lahko prištejemo večkratnik druge enačbe;
(2) lahko zamenjamo vrstni red dveh enačb;

(3) enačbo lahko pomnožimo z neničelno konstanto.

Transformacija prvega tipa nastopa, recimo, v primeru, ko iz druge enačbe izrazimo eno od spremenljivk in jo vstavimo v prvo. Poskusimo te transformacije zapisati z matrikami.

Definirajmo **elementarne matrike** $E_{ij}(\alpha)$, $P_{ij}$ in $E_i(\beta)$ takole:

(1) matriko $E_{ij}(\alpha)$ dobimo tako, da v identični matriki $I_m$ k $i$-ti vrstici prištejemo $\alpha$-kratnik $j$-te vrstice;
(2) matriko $P_{ij}$ dobimo tako, da v $I_m$ zamenjamo $i$-to in $j$-to vrstico;
(3) matriko $E_i(\beta)$ dobimo tako, da v $I_m$ množimo $i$-to vrstico z $\beta$.

Krajši račun pokaže, da lahko elementarne transformacije opišemo s pomočjo elementarnih matrik takole:

(1) če v sistemu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ k $i$-ti enačbi prištejemo $\alpha$-kratnik $j$-te enačbe, potem dobimo sistem $E_{ij}(\alpha)A\mathbf{x} = E_{ij}(\alpha)\mathbf{b}$;
(2) če v sistemu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ zamenjamo $i$-to in $j$-to enačbo, potem dobimo sistem $P_{ij}A\mathbf{x} = P_{ij}\mathbf{b}$;
(3) če v sistemu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pomnožimo $i$-to enačbo z $\beta$, potem dobimo sistem $E_i(\beta)A\mathbf{x} = E_i(\beta)\mathbf{b}$.

Gaussovo metodo lahko povemo takole: sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ toliko časa množimo z elementarnimi matrikami z leve, dokler ne dobimo sistema $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$, pri katerem je $A'$ **stopničaste oblike**. To pomeni, da je za vsak $i = 1, \ldots, m$ na začetku $i + 1$-te vrstice v $A'$ vsaj ena ničla več, kot na začetku $i$-te vrstice. Tak sistem znamo potem rešiti.

**Primer.** Matrika

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

je stopničaste oblike.

Tudi splošno rešitev linearnega sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{10} + p_{11}t_1 + \ldots + p_{r1}t_r, \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n0} + p_{1n}t_1 + \ldots + p_{rn}t_r \end{aligned}$$

lahko zapišemo v matrični obliki s parametrično enačbo.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + P\mathbf{t},$$

kjer je $\mathbf{x}$ kot zgoraj in

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{r1} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{1n} & \dots & p_{rn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_r \end{bmatrix}.$$

Oglejmo si še, kako z matrikami zapišemo formuli za projekcijo točke na afino množico. Če je afina množica $\mathcal{A}$ podana z linearnim sistemom

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

potem projekcijo točke $\mathbf{x}_1$ na $\mathcal{A}$ iščemo z nastavkom

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + A^T\mathbf{c},$$

kjer je $\mathbf{c}$ neznani vektor. Ko to vstavimo v sistem, dobimo

$$AA^T\mathbf{c} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_1.$$

Če je $\mathbf{c}'$ rešitev tega sistema, potem je iskana projekcija

$$\mathbf{x}_1' = \mathbf{x}_1 + A^T\mathbf{c}'.$$

Če pa je afina množica $\mathcal{A}$ podana s parametrično enačbo

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + P\mathbf{t},$$

potem projekcijo točke $\mathbf{x}_1$ na $\mathcal{A}$ poiščemo tako, da gornji nastavek vstavimo v enačbo $P^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) = 0$. Dobimo

$$P^TP\mathbf{t} = P^T(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0).$$

Če je $\mathbf{t}'$ rešitev tega sistema, potem je iskana projekcija

$$\mathbf{x}_1' = \mathbf{x}_0 + P\mathbf{t}'.$$

## 11.3. Determinante

Vsaki kvadratni matriki $A$ bomo priredili realno število $\det A$, ki mu pravimo **determinanta** matrike $A$. Povedali bomo, kako izračunamo determinante matrik velikosti $1 \times 1$ in kako se determinante matrik velikosti $n \times n$ izražajo z determinantami matrik velikosti $(n-1) \times (n-1)$. Potem bomo znali izračunati determinanto matrik poljubne velikosti.

Najprej definirajmo determinanto za matrike velikosti $1 \times 1$.

$$\det [a] = a.$$

Za vsako matriko $A$ velikosti $n \times n$ in za vsak $i, j = 1, \dots, n$ označimo z $A_{ij}$ matriko velikosti $(n-1) \times (n-1)$, ki jo dobimo tako, da v matriki $A$ zbrišemo $i$-to vrstico in $j$-ti stolpec. Definirajmo

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} - \ldots + (-1)^n a_{1n} \det A_{1n}.$$

Na kratko to zapišemo s formulo $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{1+i} a_{1i} \det A_{1i}$.

**Primer.** Izpeljimo formulo za determinante matrik velikosti $2 \times 2$. Če je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

potem je $A_{11} = [a_{22}]$ in $A_{12} = [a_{21}]$. Po definiciji determinant matrik velikosti $1 \times 1$ je $\det A_{11} = a_{22}$ in $\det A_{12} = a_{21}$. Zato velja

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

**Primer.** Izpeljimo še formulo za determinante matrik velikosti $3 \times 3$. Če je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

potem je

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Po formuli iz prejšnjega primera je $\det A_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$, $\det A_{12} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$ in $\det A_{13} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$. Zato velja

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Formula za determinanto matrike velikosti $4 \times 4$ bi vsebovala $4! = 24$ členov, za $5 \times 5$ pa $5! = 120$ členov. To je preveč za praktično uporabo. Zato si bomo kasneje ogledali bolj praktično metodo za računanje determinant.

Povejmo, kaj je geometrijski pomen determinante $\det A$. Če je $A$ velikosti $2 \times 2$, potem je $|\det A|$ ravno ploščina paralelograma, ki ga določata stolpca matrike $A$. Če pa je $A$ velikosti $3 \times 3$, potem je $|\det A|$ volumen parelelepipeda, ki ga določajo stolpci matrike $A$. Tudi predznak $\det A$ ima geometrijski pomen, ki je povezan z orientacijo.

Brez dokaza povejmo naslednji formuli.

**Trditev. Če je $A$ matrika velikosti $n \times n$, potem za poljubna $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ veljata naslednji formuli:**

- **formula za razvoj $\det A$ po $i$-ti vrstici**
$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k} \det A_{ik};$$
- **formula za razvoj $\det A$ po $j$-tem stolpcu**
$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(-1)^{k+j} \det A_{kj}.$$

Formula za razvoj po prvi vrstici se ujema z definicijo determinante. Ponavadi razvijemo determinanto po tisti vrstici ali stolpcu, ki vsebuje največ ničel, saj to najbolj skrajša računanje.

**Primer.** Izračunajmo determinanto matrike
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$
z razvojem po prvem stolpcu. Velja
$$\det A = 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - 0 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$$
$$= 2 \cdot 2 - 0 \cdot 4 + 1 \cdot (-2) = 2.$$

## 11.4. Lastnosti determinant

V prejšnjem razdelku smo spoznali, da so formule za računanje determinant, ki jih dobimo s pomočjo definicije, običajno predolge za praktično računanje. V tem razdelku bomo spoznali bolj učinkovito metodo, ki je podobna Gaussovi metodi za reševanje linearnih sistemov. Ideja Gaussove metode je, da matriko z elementarnimi transformacijami po vrsticah prevedemo na gornje trikotno matriko.

Najprej si oglejmo, kako izračunamo determinanto gornje trikotne matrike. Z $n$-kratno uporabo formule za razvoj po prvem stolpcu lahko dokažemo formulo
$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Oglejmo si še, kako na vrednost determinante vplivajo elementarne transformacije po vrsticah.

**Trditve.**
**(1) Če v matriki $\boldsymbol{A}$ k eni vrstici prištejemo večkratnik druge vrstice, potem se njena determinanta ne spremeni.**
**(2) Če v matriki $\boldsymbol{A}$ zamenjamo dve vrstici, potem se njeni determinanti spremeni predznak.**
**(3) Če v matriki $\boldsymbol{A}$ eno vrstico pomnožimo z $\boldsymbol{\beta}$, potem se tudi njena determinanta pomnoži z $\boldsymbol{\beta}$.**
**Podobne trditve veljajo tudi za stolpce.**

S formulami gornjo trditev zapišemo takole

$$\det(E_{ij}(\alpha)A) = \det A,\ \det(P_{ij}A) = -\det A \text{ in } \det(E_i(\beta)A) = \beta \det A.$$

Dokaz: Dokazujemo z indukcijo po dimenziji matrike. Tretja trditev očitno velja za $1 \times 1$ matrike. Predpostavimo, da velja za $(n-1) \times (n-1)$ matrike, kjer $n \geq 2$. Vzemimo poljubno $n \times n$ matriko $A$ in poljuben $i = 1, \ldots, n$. Za poljuben $j \neq i$ lahko $\det E_i(\beta)A$ izračunamo tako, da jo razvijemo po $j$-ti vrstici, potem uporabimo na vsakem členu indukcijsko predpostavko, izpostavimo $\beta$ in upoštevamo formulo za razvoj $\det A$ po $j$-ti vrstici. Dobimo ravno $\beta \det A$.

Druga trditev velja za $2 \times 2$ matrike, ker je

$$\det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Predpostavimo, da trditev velja za $(n-1) \times (n-1)$ matrike, kjer je $n \geq 3$. Vzemimo poljubno $n \times n$ matriko $A$ in poljubna $i$ in $j$, ki sta različna. Potem za poljuben $k$, ki je različen od $i$ in $j$, lahko $\det P_{ij}A$ izračunamo tako, da jo razvijemo po $k$-ti vrstici, upoštevamo indukcijo predpostavko, izpostavimo $-1$ in upoštevamo formulo za razvoj $\det A$ po $k$-ti vrstici. Dobimo ravno $-\det A$.

Dokaz prve trditve je zelo podoben dokazu druge. Najprej pokažemo, da trditev velja za $2 \times 2$ matrike. Nato s podobnim računom kot pri drugi trditvi dokažemo, da iz primera $n \times n$, kjer $n \geq 3$, sledi primer $n \times n$. $\square$

Oglejmo si sedaj uporabo Gaussove metode na primeru.

**Primer.** S pomočjo Gaussove metode izračunaj determinanto matrike

$$\det A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

S transformacijama $E_{21}(-2)$ in $E_{31}(1)$ dobimo

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

S transformacijama $E_{32}(\frac{3}{4})$ in $E_{42}(\frac{1}{2})$ dobimo

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{11}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

S transformacijo $E_{43}(-\frac{6}{5})$ dobimo

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{5} \end{bmatrix}.$$

Formula za determinanto gornje trikotne matrike nam da

$$\det A = 1 \cdot (-4) \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{9}{5} = -9.$$

Zanimiva posledica gornjih lastnosti determinante je naslednja trditev.

**Trditev. Če ima matrika dve vrstici enaki, potem je njena determinanta enaka nič. Podobno velja za stolpce.**

Dokaz: Če sta $i$-ta in $j$-ta vrstica matrike $A$ enaki, potem je $P_{ij}A = A$. Od tod sledi $\det P_{ij}A = \det A$. Toda zgoraj smo dokazali, da je $\det P_{ij}A = -\det A$. Od tod sledi $\det A = -\det A$, torej je res $\det A = 0$. □

Izpeljimo sedaj formulo za determinanto produkta.

**Trditev. Za poljubni kvadratni matriki $\boldsymbol{A}$ in $\boldsymbol{B}$ velja $\det \boldsymbol{AB} = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{B}$.**

Dokaz: Če v formule

$$\det(E_{ij}(\alpha)B) = \det B, \quad \det(P_{ij}B) = -\det B \quad \text{in} \quad \det(E_i(\beta)B) = \beta \det B$$

vstavimo namesto $A$ identično matriko, dobimo

$$\det(E_{ij}(\alpha)) = 1, \quad \det(P_{ij}) = -1, \quad \det(E_i(\beta)) = \beta.$$

Odtod sledi

$$\begin{aligned}\det(E_{ij}(\alpha)B) &= \det E_{ij}(\alpha)\det B,\\ \det(P_{ij}B) &= \det P_{ij}\det B,\\ \det(E_i(\beta)B) &= \det E_i(\beta)\det B.\end{aligned}$$

Torej velja $\det AB = \det A \det B$ v primeru, ko je $A$ elementarna matrika. Formula velja tudi v primeru, ko ima matrika $A$ v eni vrstici same ničle, saj ima potem tudi matrika $AB$ v isti vrstici same ničle, torej je $\det A = \det AB = 0$, kar vidimo iz razvoja po tej vrstici.

Lotimo se sedaj splošnega primera. Vemo že, da obstajajo take elementarne matrike $E_1, \ldots, E_n$, da ima matrika $S = E_n \cdots E_1 A$ stopničasto obliko. Ločimo dva primera. Če ima matrika $S$ ničelno vrstico, potem velja

$$\begin{aligned}\det E_n \cdots \det E_1 \det AB &= \det(E_n \cdots E_1 A)B = \det SB = 0,\\ \det E_n \cdots \det E_1 \det A &= \det E_n \cdots E_1 A = \det S = 0.\end{aligned}$$

Po krajšanju dobimo $\det A = \det AB = 0$, odkoder sledi $\det AB = \det A \det B$. Če pa matrika $S$ nima ničelne vrstice, potem so vsi njeni diagonalni elementi neničelni. Zato lahko poiščemo take elementarne matrike $E_{n+1}, \ldots, E_m$, da je matrika $E_m \cdots E_{n+1} S$ identična. Odtod sledi, da je

$$\begin{aligned}\det E_m \cdots \det E_1 \det AB &= \det(E_m \cdots E_n A)B = \det IB = \det B,\\ \det E_m \cdots \det E_1 \det A &= \det E_n \cdots E_1 A = \det I.\end{aligned}$$

Drugo formulo pomnožimo z $\det B$ in primerjamo leve strani obeh formul. Po krajšanju spet dobimo $\det AB = \det A \det B$. $\square$

## 11.5. Cramerovo pravilo

Če je kvadratni sistem

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

enolično rešljiv, lahko njegovo rešitev poiščemo s pomočjo determinant. Za vsak $i = 1, \ldots, n$ namreč velja

$$x_i = \frac{\det C_i}{\det A},$$

kjer je $A$ matrika sistema, se pravi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

in $C_i$ matrika, ki jo dobimo tako, da v matriki $A$ zamenjamo $i$-ti stolpec z vektorjem

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Tej formuli pravimo **Cramerovo pravilo**.

**Primer.** Rešimo naslednji sistem s Cramerovim pravilom:

$$\begin{aligned} 2x + y &= -1, \\ x + 3y &= 2. \end{aligned}$$

Rešitev se glasi

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} = \frac{\det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}} = \frac{-5}{5} = -1,$$

$$y = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} = \frac{\det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}} = \frac{5}{5} = 1.$$

**Primer.** S pomočjo Cramerovega pravila rešimo sistem

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ 2x - y &= 1 \\ 3y + z &= -1. \end{aligned}$$

Ker je

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 9,$$

je rešitev sistema

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}{\det A} = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}}{\det A} = \frac{2}{9},$$

$$y = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix}}{\det A} = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}{\det A} = \frac{2}{9},$$

$$z = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}}{\det A} = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}}{\det A} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Za konec dodajmo še dokaz, da ima v primeru $\det A \neq 0$ sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ eno samo rešitev in da to rešitev res dobimo s Cramerovim pravilom.

Dokaz: Recimo, da bi radi iz linearnega sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ izrazili spremenljivko $x_j$. Za vsak $i = 1, \ldots, n$ pomnožimo $i$-to enačbo sistema z $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ in te enačbe seštejmo. Dobimo

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}(-1)^{i+j} \det A_{ij}\right) x_1 + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{ij}\right) x_i + \ldots +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{n} a_{in}(-1)^{i+j} \det A_{ij}\right) x_n = \sum_{j=i}^{n} b_i(-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Naj bo $C_j$ matrika, ki jo dobimo tako, da $j$-ti stolpec matrike $A$ zamenjamo z vektorjem $\mathbf{b}$. Če determinanto matrike $C_j$ razvijemo po $j$-tem stolpcu, dobimo

$$\det C_j = \sum_{j=i}^{n} b_i(-1)^{i+j} \det A_{ij},$$

kar je ravno desna stran gornje enačbe. Obdelajmo še levo stran. Za vsak $k = 1, \ldots, n$ označimo z $B_j^k$ matriko, ki jo dobimo tako, da v matriki $A$ zamenjamo $j$-ti stolpec s $k$-tim. Če razvijemo determinanto matrike $B_j^k$ po $k$-ti vrstici, dobimo

$$\det B_j^k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Torej gornjo enačbo lahko zapišemo v obliki

$$(\det B_j^1)x_1 + \ldots + (\det B_j^j)x_j + \ldots + (\det B_j^n)x_n = C_j.$$

Opazimo, da je $B_j^j = A$, zato je $\det B_j^j = \det A$. V primeru, ko je $k \neq j$, pa ima matrika $B_j^k$ dva stolpca enaka, zato je njena determinanta enaka nič. Torej se gornja enačba glasi

$$(\det A)x_j = \det C_j.$$

Če je $\det A \neq 0$, lahko odtod na en sam način izračunamo $x_j$. $\square$

## 11.6. Inverz matrike

**Inverz** kvadratne matrike $A$ je taka kvadratna matrika $B$, da velja $AB = BA = I$. Matrika ima lahko kvečjemu en inverz. Če sta namreč $B_1$ in $B_2$ dva inverza matrike $A$, potem velja $B_1 = IB_1 = (B_2A)B_1 = B_2(AB_1) = B_2I = B_2$. Če matrika $A$ ima inverz, ga označimo z $A^{-1}$. Ničelna matrika seveda nima inverza. Zanimivo pa je, da inverza nimajo tudi nekatere neničelne matrike.

**Primer.** Matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nima inverza. Za vsako matriko $B$ ima namreč matrika $AB$ ničlo v spodnjem desnem kotu in zato ne more biti enaka matriki $I$.

**Primer.** Elementarne matrike imajo inverze. Velja namreč

$$E_{ij}(\alpha)^{-1} = E_{ij}(-\alpha), \quad P_{ij}^{-1} = P_{ij} \quad \text{in} \quad E_i(\beta)^{-1} = E_i(\frac{1}{\beta}).$$

**Primer.** Če imajo matrike $A_1, \ldots, A_n$ inverze, potem ima inverz tudi njihov produkt. Velja namreč

$$(A_1 \cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

Inverze matrik lahko uporabimo pri reševanju linearnih sistemov. Če je $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kvadraten sistem in če je matrika $A$ obrnljiva, potem je $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ edina rešitev tega sistema.

Spoznali bomo dve metodi za računanje inverza. Prva metoda temelji na Gaussovi eliminaciji.

**Prva metoda za računanje inverza. Matriko $A$ razširimo na desno z identično matriko iste velikosti. Dobimo matriko $[A|I]$. To matriko obdelujemo z elementarnimi transformacijami po vrsticah toliko časa, dokler levo od črte ne dobimo bodisi matrike z ničelno vrstico bodisi identične matrike. V prvem primeru matrika $A$ nima inverza, v drugem primeru, pa je inverz tisto, kar stoji desno od črte.**

**Primer.** Izračunajmo inverz matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Razširjena matrika je

$$[A|I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Če k drugi vrstici prištejemo z $-3$ pomnoženo prvo vrstico, dobimo

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right].$$

Če drugo vrstico delimo s $-2$, dobimo

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Če k prvi vrstici prištejemo z $-2$ pomnožemo drugo vrstico, dobimo

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Torej je

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{cc} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Dokažimo sedaj, da ta metoda vedno deluje.

Dokaz: Naj bodo $E_1, \ldots, E_n$ take elementarne matrike, da ima matrika $S = E_n \cdots E_1 A$ stopničasto obliko. Ločimo dva primera. Če ima matrika $S$ ničelno vrstico, potem ni obrnljiva, saj ima potem tudi matrika $ST$ ničelno vrstico za vsak $T$ (glej prvi primer). Odtod sledi, da tudi matrika $A$ ni obrnljiva (uporabi drugi in tretji primer). Če pa matrika $S$ nima ničelne vrstice, potem so vsi njeni diagonalni elementi neničelni. Zato lahko poiščemo take elementarne matrike $E_{n+1}, \ldots, E_m$, da je matrika $E_m \cdots E_{n+1} S$ identična. Odtod sledi, da je matrika $A$ obrnljiva (uporabi drugi in tretji primer) in velja $A^{-1} = E_m \cdots E_{n+1} E_n \cdots E_1$. To pa je ravno tisto kar dobimo desno od črte, saj velja $[A|I] \stackrel{E_1}{\to} [E_1 A|E_1] \stackrel{E_2}{\to} \ldots \stackrel{E_m}{\to} [E_m \cdots E_1 A, E_m \cdots E_1] = [I|A^{-1}]$. $\square$

Spotoma smo dokazali, da ima matrika $A$ inverz natanko tedaj, ko je enaka produktu elementarnih matrik. Druga metoda za računanje inverza temelji na Cramerovem pravilu.

**Druga metoda za računanje inverza. Matrika $A$ ima inverz natanko tedaj, ko je $\det A \neq 0$. Velja**

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}^T,$$

**kjer je $\tilde{A}$ matrika, ki jo dobimo iz matrike $A$ tako, da za vsak $i, j \in \{1, \dots, n\}$ zamenjamo element $a_{ij}$ z $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$. Spomnimo se, da matriko $A_{ij}$ dobimo tako, da v matriki $A$ prečrtamo $i$-to vrstico in $j$-ti stolpec.**

Na dolgo:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \det A_{11} & -\det A_{12} & \dots & (-1)^{1+n} \det A_{1n} \\ -\det A_{21} & \det A_{22} & \dots & (-1)^{2+n} \det A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{n+1} \det A_{n1} & (-1)^{n+2} \det A_{n2} & \dots & \det A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Dokaz: Če matrika $A$ ima inverz, potem velja $\det A \det A^{-1} = \det AA^{-1} = \det I = 1$, torej je $\det A \neq 0$. Privzemimo sedaj, da je $\det A \neq 0$ in pokažimo, da je $\frac{1}{\det A}\tilde{A}^T$ res inverz matrike $A$. Velja

$$\tilde{A}^T A = \begin{bmatrix} \det B_1^1 & \det B_1^2 & \dots & \det B_1^n \\ \det B_2^1 & \det B_2^2 & \dots & \det B_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \det B_n^1 & \det B_n^2 & \dots & \det B_n^n \end{bmatrix} = (\det A) \cdot I,$$

kjer je $B_j^k$ matrika, ki jo dobimo iz matrike $A$ tako, da $j$-ti stolpec zamenjamo s $k$-tim. Pri zadnjem koraku smo upoštevali, da je

$$\det B_j^k = \begin{cases} \det A, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Podobno je

$$A\tilde{A}^T = \begin{bmatrix} \det C_1^1 & \det C_2^1 & \dots & \det C_n^1 \\ \det C_1^2 & \det C_2^2 & \dots & \det C_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \det C_1^n & \det C_2^n & \dots & \det C_n^n \end{bmatrix} = (\det A) \cdot I,$$

kjer je $C_j^k$ matrika, ki jo dobimo iz matrike $A$ tako, da $j$-to vrstico zamenjamo s $k$-to. Pri zadnjem koraku smo upoštevali, da je $\det C_j^k = 0$, če $j \neq k$ in $\det A$ sicer. $\square$

Dokažimo še naslednjo trditev.

**Trditev. Kvadratna matrika ima inverz natanko tedaj, ko so njene vrstice linearno neodvisne. Podobno velja za stolpce.**

Dokaz: Naj bo $A$ kvadratna $n \times n$ matrika. Označimo z $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ $i$-to vrstico matrike $A$. Če so vektorji $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ linearno odvisni, potem je eden od njih enak linearni kombinaciji drugih, recimo $\mathbf{a}_j = \sum_{i \neq j} c_i \mathbf{a}_i$. Determinanta matrike $A$ se ne spremeni, če za vsak $i$, ki ni enak $j$, prištejemo k $j$-ti vrstici z $-c_i$ pomnoženo $i$-to vrstico. Toda na ta način dobimo matriko z ničelno vrstico, ta pa ima ničelno determinanto. Sledi $\det A = 0$, torej matrika $A$ nima inverza.

Če so vektorji $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ linearno neodvisni, potem lahko vsak vektor izrazimo kot linearno kombinacijo teh vektorjev (to zahteva krajši premislek). Naj bo $\mathbf{e}_i$ vektor, ki ima na $i$-tem mestu enico, drugod pa same ničle. Razvijmo ga po vektorjih $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$:

$$\mathbf{e}_i = b_{i1}\mathbf{a}_1 + \ldots + b_{in}\mathbf{a}_n.$$

Naj bo $B$ matrika, katere $i$-ta vrstica je enaka $(b_{i1}, \ldots, b_{in})$ za vsak $i = 1, \ldots, n$. Bralec naj preveri, da velja

$$BA = I.$$

Odtod sledi, da je $\det A \neq 0$, torej je matrika $A$ obrnljiva.

Ker so stolpci matrike $A$ enaki vrsticam matrike $A^T$, in ker ima matrika $A^T$ inverz natanko tedaj, ko ima inverz matrika $A$ (preveri, da je $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$), sledi, da so stolpci matrike $A$ linearno neodvisni natanko tedaj, ko so linearno neodvisne njene vrstice. $\square$

Oglejmo si primer uporabe te trditve:

**Primer.** Poiščimo enačbo hiperravnine v $\mathbb{R}^n$, ki gre skozi dane točke $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$, kjer je $\mathbf{r}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$. Predpostavimo še, da so vektorji $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_1$ linearno neodvisni, saj drugače rešitev ni enolična. Točka $\mathbf{r} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ leži na tej hiperravnini natanko tedaj, ko so vektorji $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_1$ linearno odvisni, to pa velja natanko tedaj, ko je

$$\det \begin{bmatrix} x_1 - a_{11} & x_2 - a_{12} & \ldots & x_n - a_{1n} \\ a_{21} - a_{11} & a_{22} - a_{12} & \ldots & a_{2n} - a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} - a_{11} & a_{n2} - a_{12} & \ldots & a_{nn} - a_{1n} \end{bmatrix} = 0.$$

## 11.7. Vprašanja za ponavljanje

(1) (Pravokotne matrike)
   (a) Kako je definirano seštevanje matrik in kako množenje s skalarjem?
   (b) Naštej osnovne lastnosti teh dveh operacij. (Omeni tudi ničelne matrike!)
   (c) Kako je definirano množenje matrik? Kdaj je definicija smiselna?
   (d) Naštej osnovne lastnosti množenja! (Omeni tudi identične matrike!)

(2) (Elementarne matrike)
   (a) Definiraj elementarne matrike!
   (b) Kakšna je zveza med matrikama $A$ in $EA$, kjer je $E$ elementarna matrika?
   (c) Kakšna je zveza med matrikama $A$ in $AE$, kjer je $E$ elementarna matrika?

(3) (Gaussova eliminacija po matrično)
   (a) Kako sistem linearnih enačb zapišemo v matrični obliki?
   (b) Kako metodo Gaussove eliminacije zapišemo z elementarnimi matrikami?
   (c) Kakšno matriko dobimo na koncu Gaussove eliminacije? Kako rešimo pripadajoči sistem linearnih enačb?

(4) (Metoda najmanjših kvadratov po matrično)
   (a) Kako je definirano transponiranje matrik? Naštej osnovne lastnosti transponiranja!
   (b) S matrikami pojasni, kako poiščemo projekcijo točke na afino množico!
   (c) Z matrikami pojasni, kako poiščemo regresijsko premico!

(5) (Definicija determinante) Recimo da je $A$ matrika velikosti $3 \times 3$. Kako izračunamo njeno determinanto
   (a) po definiciji?
   (b) z razvojem po drugi vrstici?
   (c) z razvojem po tretjem stolpcu?

(6) (Računanje determinant)
   (a) Kako izračunamo determinanto gornje trikotne matrike?
   (b) Povej, kaj so elementarne transformacije in kako vplivajo na vrednost determinante!
   (c) Kako izračunamo determinanto s pomočjo elementarnih transformacij?

(7) (Cramerovo pravilo)
   (a) Formuliraj Cramerovo pravilo za sisteme velikosti $2 \times 2$!

   (b) Formuliraj Cramerovo pravilo za sisteme velikosti $3 \times 3$!
   (c) Kdaj ne moremo uporabiti Cramerovega pravila?

(8) (Definicija inverza)
   (a) Kako je definiran inverz matrike?
   (b) Poišči neničelno matriko, ki nima inverza!
   (c) Pokaži, da matrika ne more imeti dveh različnih inverzov!

(9) (Primeri matrik z inverzom)
   (a) Izračunaj inverze elementarnih matrik!
   (b) Dokaži, da ima matrika $AB$ inverz, če imata $A$ in $B$ inverza!
   (c) Dokaži, da ima matrika $A^T$ inverz, če ima inverz matrika $A$!

(10) (Obstoj inverza) Zanima nas ali ima dana matrika inverz.
   (a) Kako to ugotovimo z Gaussovo eliminacijo?
   (b) Kako to ugotovimo z determinantami?
   (c) Kako to ugotovimo z linearno neodvisnostjo?

(11) (Računanje inverza)
   (a) Kako izračunamo inverz matrike z Gaussovo eliminacijo?
   (b) Pojasni metodo iz (a) na $2 \times 2$ matrikah!
   (c) Kako izračunamo inverz matrike s pomočjo determinant?
   (d) Pojasni metodo iz (c) na $2 \times 2$ matrikah!

# Del 5

# Vektorske funkcije in funkcije več spremenljivk

POGLAVJE 12

# Krivulje v $\mathbb{R}^n$

## 12.1. Risanje vektorskih funkcij in vektorskih zaporedij

Funkcija iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}^n$ je podana z dvema podatkoma:

- z definicijskim območjem, se pravi podmnožico $D$ v $\mathbb{R}$,
- s predpisom, ki vsakemu elementu iz $D$ priredi natanko določen vektor v $\mathbb{R}^n$.

V primeru, ko je $n \geq 2$, pravimo takim funkcijam tudi **vektorske funkcije**. Označujemo jih, podobno kot vektorje, z malimi debelo tiskanimi črkami. Vektorsko funkcijo

$$t \mapsto \mathbf{r}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)), \quad t \in D,$$

lahko geometrijsko predstavimo z njenim **grafom**

$$\{(t, \mathbf{r}(t)) \colon t \in D\} = \{(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \colon t \in D\}$$

ali z njenim **tirom**, tj. zalogo vrednosti:

$$\{\mathbf{r}(t) \colon \ t \in D\} = \{(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \colon \ t \in D\}.$$

Graf je podmnožica v $\mathbb{R}^{n+1}$, zato ga lahko narišemo samo v primeru, ko je $n = 2$. Tir je podmnožica v $\mathbb{R}^3$, zato ga lahko narišemo samo v primeru, ko je $n = 2$ ali $n = 3$.

**Primer.** Naj bosta $\mathbf{r}_0$ in $\mathbf{p}$ dana vektorja v $\mathbb{R}^n$. Potem je

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{p}, \quad t \in \mathbb{R},$$

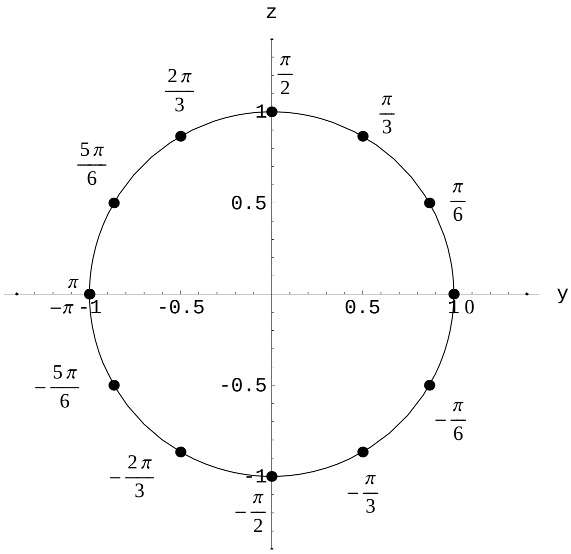
vektorska funkcija v $\mathbb{R}^n$. Njen tir je premica v $\mathbb{R}^n$, ki gre skozi točko $\mathbf{r}_0$ v smeri vektorja $\mathbf{p}$. Njen graf pa je premica v $\mathbb{R}^{n+1}$, ki gre skozi točko $(0, \mathbf{r}_0)$ v smeri vektorja $(1, \mathbf{p})$.

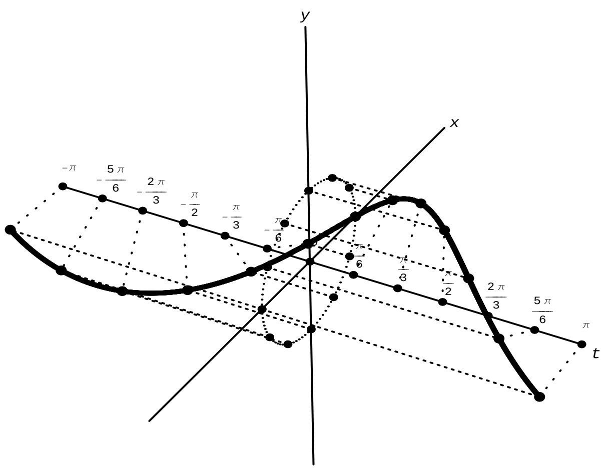
**Primer.** Skicirajmo graf in tir vektorske funkcije

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Funkcijo najprej tabeliramo v točkah z razmikom $\frac{\pi}{6}$. Ko povežemo funkcijske vrednosti s krivuljo, dobimo tir. Ker pri $-\pi$ dobimo isto vrednost kot pri $\pi$, je tir sklenjen. Graf pa dobimo tako, da za vsak $t$ iz tabele narišemo točko $(t, \cos t, \sin t)$ v $\mathbb{R}^3$ in nato te točke povežemo. Če graf pravokotno projeciramo na $xy$ ravnino, dobimo ravno tir.

| $t$ | $(\cos t, \sin t)$ |
|---|---|
| $-\pi$ | $(-1, 0)$ |
| $-\frac{5\pi}{6}$ | $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ |
| $-\frac{2\pi}{3}$ | $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ |
| $-\frac{\pi}{2}$ | $(0, -1)$ |
| $-\frac{\pi}{3}$ | $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ |
| $-\frac{\pi}{6}$ | $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ |
| $0$ | $(1, 0)$ |
| $\frac{\pi}{6}$ | $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $(0, 1)$ |
| $\frac{2\pi}{3}$ | $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ |
| $\frac{5\pi}{6}$ | $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ |
| $\pi$ | $(-1, 0)$ |

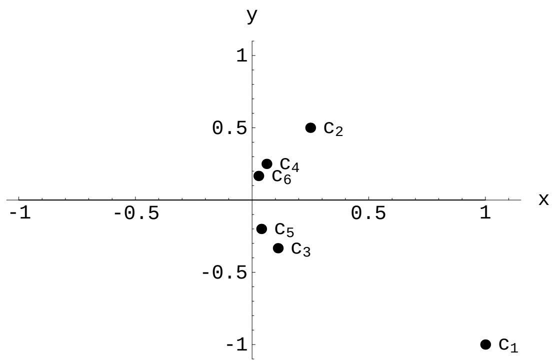



**Vektorsko zaporedje** v $\mathbb{R}^n$ je predpis, ki vsakemu naravnemu številu priredi nek vektor v $\mathbb{R}^n$. Povedano z drugimi besedami je zaporedje ravno vektorska funkcija, katere definicijsko območje je množica naravnih števil. Vektor, ki ga zaporedje $\mathbf{c}$ priredi številu $i$, označimo s $\mathbf{c}_i$ in mu pravimo $i$-ti člen zaporedja $\mathbf{c}$. Vektorsko zaporedje lahko geometrijsko predstavimo z grafom ali s tirom.

**Primer.** Narišimo nekaj začetnih členov zaporedja vektorjev

$$\mathbf{c}_i = \left(\frac{1}{i^2}, \frac{(-1)^i}{i}\right).$$




## 12.2. Limite vektorskih zaporedij in vektorskih funkcij

Pravimo, da je vektor $\mathbf{L}$ limita zaporedja vektorjev $\mathbf{c}_i$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $i_0$, da za vsak $i \geq i_0$ velja $\|\mathbf{c}_i - \mathbf{L}\| < \epsilon$. V tem primeru pišemo $\lim\limits_{i\to\infty} \mathbf{c}_i = \mathbf{L}$. Zaporedje vektorjev ne more imeti več kot eno limito.

**Trditev. Zaporedje vektorjev $\mathbf{c}_i = (c_{i1}, \ldots, c_{in})$ limitira proti vektorju $\mathbf{L} = (L_1, \ldots, L_n)$ natanko tedaj, ko za vsak $j = 1, \ldots, n$ zaporedje $i \mapsto c_{ij}$ limitira proti številu $L_j$.**

Dokaz: Recimo, da je $\lim\limits_{i\to\infty} c_{ij} = L_j$ za vsak $j = 1, \ldots, n$. Vzemimo poljuben $\epsilon > 0$. Po definiciji limite obstaja za vsak $j = 1, \ldots, n$ tak $i_j \in \mathbb{N}$, da za vsak $i \geq i_j$ velja $|c_{ij} - L_j| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$. Naj bo $i_0 = \max\{i_1, \ldots, i_n\}$. Potem za vsak $i \geq i_0$ velja $\|\mathbf{c}_i - \mathbf{L}\| \leq \epsilon$, saj je $\|\mathbf{c}_i - \mathbf{L}\|^2 = \sum_{j=1}^n |c_{ij} - L_j|^2 \leq \sum_{j=1}^n \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{n}}\right)^2 = \epsilon^2$. S tem smo dokazali, da je $\lim\limits_{i\to\infty} \mathbf{c}_i = \mathbf{L}$. Dokažimo še obrat. Recimo, da je $\lim\limits_{i\to\infty} \mathbf{c}_i = \mathbf{L}$. Vzemimo poljuben $\epsilon > 0$. Po definiciji limite obstaja tak $i_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak $i \geq i_0$ velja $\|\mathbf{c}_i - \mathbf{L}\| \leq \epsilon$. Potem za vsak $i \geq i_0$ in vsak $j = 1, \ldots, n$ velja $|c_{ij} - L_j| < \epsilon$, saj je $|c_{ij} - L_j|^2 \leq \sum_{j=1}^n |c_{ij} - L_j|^2 = \|\mathbf{c}_i - \mathbf{L}\|^2 < \epsilon^2$. Torej je $\lim\limits_{i\to\infty} c_{ij} = L_j$ za vsak $j = 1, \ldots, n$. $\square$

**Primer.** $\lim\limits_{i\to\infty}(\frac{1}{i^2}, \frac{(-1)^i}{i}) = (\lim\limits_{i\to\infty} \frac{1}{i^2}, \lim\limits_{i\to\infty} \frac{(-1)^i}{i}) = (0, 0)$.

Podobno kot v skalarnem primeru lahko dokažemo, da za poljubni zaporedji $\mathbf{a}_i$ in $\mathbf{b}_i$ v $\mathbb{R}^n$ in poljubno zaporedje $\alpha_i \in \mathbb{R}$ velja

$$\lim_{i\to\infty} \alpha_i \mathbf{a}_i = \lim_{i\to\infty} \alpha_i \lim_{i\to\infty} \mathbf{a}_i,$$

$$\lim_{i\to\infty} (\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i) = \lim_{i\to\infty} \mathbf{a}_i + \lim_{i\to\infty} \mathbf{b}_i,$$

$$\lim_{i\to\infty}\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i\rangle = \langle \lim_{i\to\infty} \mathbf{a}_i, \lim_{i\to\infty} \mathbf{b}_i\rangle.$$

Če je $n = 3$, pa velja tudi

$$\lim_{i\to\infty}(\mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i) = \lim_{i\to\infty} \mathbf{a}_i \times \lim_{i\to\infty} \mathbf{b}_i.$$

Limito vektorske funkcije v točki definiramo podobno kot pri skalarnih funkcijah. Pravimo, da je vektor **L limita vektorske funkcije** $\mathbf{r}(t), t \in D$**, v točki** $a \in \mathbb{R}$, če za vsako zaporedje skalarjev $t_n$ v $D\setminus\{a\}$, ki limitira proti $a$, zaporedje vektorjev $\mathbf{r}(t_n)$ limitira proti $\mathbf{L}$. Vektorska funkcija ne more imeti več kot ene limite v dani točki.

**Trditev. Vektorska funkcija $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ ima limito v točki $a$ natanko tedaj, ko imajo vse funkcije $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ limito v točki $a$. Če limita obstaja, jo izračunamo po komponentah:**

$$\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \lim_{t\to a}(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = (\lim_{t\to a} x_1(t), \ldots, \lim_{t\to a} x_n(t)).$$

Dokaz: Naslednje trditve so ekvivalentne:

(1) $\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$, kjer $\mathbf{L} = (L_1, \ldots, L_n)$,
(2) za vsako zaporedje $t_n$ v $D \setminus \{a\}$, ki limitira proti $a$, zaporedje $\mathbf{r}(t_n)$ limitira proti $\mathbf{L}$,
(3) za vsako zaporedje $t_n$ v $D \setminus \{a\}$, ki limitira proti $a$, in za vsak $j = 1, \ldots, n$ zaporedje $x_j(t_n)$ limitira proti $L_j$,
(4) za vsak $j = 1, \ldots, n$ velja $\lim_{t\to a} x_j(t) = L_j$.

Ekvivalenca (1) $\Leftrightarrow$ (2) sledi iz definicije limite vektorske funkcije, ekvivalenca (2) $\Leftrightarrow$ (3) je del prejšnje trditve (o vektorskih zaporedjih), ekvivalenca (3) $\Leftrightarrow$ (4) pa sledi iz definicije limite skalarnih funkcij. $\square$

S pomočjo ustreznih formul za limite vektorskih zaporedij lahko dokažemo, za poljubno skalarno funkcijo $\alpha(t)$, poljubne vektorske funkcije $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}_1(t)$ in $\mathbf{r}_2(t)$ ter poljubno točko $a \in \mathbb{R}$ velja

$$\lim_{t\to a} \alpha(t)\mathbf{r}(t) = \lim_{t\to a} \alpha(t) \lim_{t\to a} \mathbf{r}(t),$$

$$\lim_{t\to a}(\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)) = \lim_{t\to a} \mathbf{r}_1(t) + \lim_{t\to a} \mathbf{r}_2(t),$$

$$\lim_{t\to a}\langle \mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t)\rangle = \langle \lim_{t\to a} \mathbf{r}_1(t), \lim_{t\to a} \mathbf{r}_2(t)\rangle,$$

če le vse limite na desni strani obstajajo. Če je $n = 3$, pa velja tudi

$$\lim_{t\to a}(\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)) = \lim_{t\to a} \mathbf{r}_1(t) \times \lim_{t\to a} \mathbf{r}_2(t).$$

Pravimo, da je vektorska funkcija $\mathbf{r}(t), t \in D$ **zvezna** v točki $a \in D$, če za vsako zaporedje $t_n$ v $D$, ki limitira proti $a$, zaporedje $\mathbf{r}(t_n)$ limitira proti $\mathbf{r}(a)$. Kot v skalarnem primeru dokažemo naslednjo trditev.

**Trditev. Funkcija $\mathbf{r}(t)$, $t \in D$, je zvezna v točki $a \in D$ natanko tedaj, ko velja $\lim\limits_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$.**

Zadnji dve trditvi imata naslednjo posledico.

**Trditev. Vektorska funkcija $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $t \in D$, je zvezna v točki $a \in D$ natanko tedaj, ko so vse funkcije $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ zvezne v točki $a$.**

Vektorska funkcija je **zvezna**, če je zvezna v vsaki točki svojega definicijskega območja. Vsota, skalarni produkt in vektorski produkt dveh zveznih funkcij so spet zvezne funkcije. Produkt zvezne skalarne funkcije in zvezne vektorske funkcije je zvezna vektorska funkcija.

## 12.3. Odvajanje vektorskih funkcij

**Odvod** vektorske funkcije $\mathbf{r}(t)$ v točki $t$ je definiran z

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h},$$

če limita obstaja. Če je $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, potem velja

$$\mathbf{r}'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t)),$$

saj lahko limito izračunamo po komponentah. Pravila za odvajanje so podobna kot pri skalarnih funkcijah:

$$(c\mathbf{r})' = c'\mathbf{r} + c\mathbf{r}',$$

$$(\mathbf{r}_1 \pm \mathbf{r}_2)' = \mathbf{r}_1' \pm \mathbf{r}_2',$$

$$\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \rangle' = \langle \mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2 \rangle + \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2' \rangle,$$

$$(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)' = \mathbf{r}_1' \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2'.$$

Oglejmo si sedaj geometrijski pomen odvoda. Na tiru vektorske funkcije $\mathbf{r}(t)$ označimo točki $\mathbf{r}(t_0)$ in $\mathbf{r}(t_0 + h)$. Parametrična enačba sekante tira, ki gre skozi ti dve točki je

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0) + t\frac{\mathbf{r}(t_0 + h) - \mathbf{r}(t_0)}{h}.$$

Ko pošljemo $h$ proti 0, preide sekanta v tangento, njena enačba pa v

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0) + t\mathbf{r}'(t_0).$$

Torej je odvod $\mathbf{r}'(t_0)$, če obstaja, vektor, ki kaže v smeri tangente na tir z dotikališčem v točki $\mathbf{r}(t_0)$.

**Primer.** Izračunajmo tangento na tir vektorske funkcije

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$$

v točki $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

Najprej poiščemo tak $t_0$, pri katerem je $\mathbf{r}(t_0) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$. Iz enačb $\cos t_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ in $\sin t_0 = \frac{1}{2}$ dobimo, da je $t_0 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$. Odvod vektorske funkcije $\mathbf{r}(t)$ je $\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$. Ko vstavimo $t = t_0$, dobimo $\mathbf{r}'(t_0) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Parametrična enačba tangente je

$$\mathbf{r} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) + t(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}),$$

normalna enačba pa

$$t = \frac{x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{x_2 - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Odtod dobimo implicitno enačbo $\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 1$.

Oglejmo si še fizikalni pomen odvoda. Predstavljamo si, da se delec giblje po prostoru tako, da je njegova lega v trenutku $t$ enaka $\mathbf{r}(t)$. Med trenutkoma $t$ in $t + h$ preteče čas $\Delta t = (t + h) - t = h$, lega delca pa se spremeni za vektor $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}$. Diferenčnemu količniku $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ pravimo **povprečna vektorska hitrost** delca med trenutkoma $t$ in $t + h$, njegovi limiti

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

pa **trenutna vektorska hitrost** delca v trenutku $t$. Normi trenutne vektorske hitrosti

$$v(t) = \|\mathbf{v}(t)\|$$

rečemo **trenutna skalarna hitrost** delca v trenutku $t$. Tradicija v fiziki je, da se odvod po času namesto s črtico označi z piko, npr. $\dot{\mathbf{r}}(t)$ namesto $\mathbf{r}'(t)$.

## 12.4. Načrtovanje ravninskih tirov

V tem razdelku si bomo ogledali, kako s pomočjo odvoda konstruiramo tir vektorske funkcije v $\mathbb{R}^2$. Recimo, da je vektorska funkcija $\mathbf{r}(t) = (\alpha(t), \beta(t))$ zvezno odvedljiva v okolici točke $t_0$ in da je $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$. Potem je $\alpha'(t_0) \neq 0$ ali $\beta'(t_0) \neq 0$.

Če je $\alpha'(t_0) \neq 0$, potem je funkcija $x = \alpha(t)$ strogo monotona v okolici točke $t_0$, zato lahko izračunamo njeno inverzno funkcijo $t = \alpha^{-1}(x)$. Ko to vstavimo v definicijo funkcije $\mathbf{r}(t)$, dobimo

$$\mathbf{r}(t) = (\alpha(t), \beta(t)) = (\alpha(\alpha^{-1}(x)), \beta(\alpha^{-1}(x))) = (x, \beta(\alpha^{-1}(x))).$$

Torej se tir vektorske funkcije $\mathbf{r}(t)$ v okolici točke $t_0$ ujema z grafom skalarne funkcije $y = \beta(\alpha^{-1}(x))$ v okolici točke $x_0 = \alpha(t_0)$. Obnašanje grafa znamo določiti s pomočjo prvega in drugega odvoda, zato ju naprej izračunamo. Iz $\beta(t) = y(\alpha(t))$ dobimo $\beta'(t) = y'(\alpha(t))\alpha'(t)$ in $\beta''(t) = y''(\alpha(t))(\alpha'(t))^2 + y'(\alpha(t))\alpha''(t)$. Iz prve enačbe sledi

$$y'(x) = \frac{\beta'(t)}{\alpha'(t)}.$$

Drugo enačbo pomnožimo z $\alpha'(t)$ in upoštevamo prvo enačbo. Dobimo

$$y''(x) = \frac{\alpha'(t)\beta''(t) - \beta'(t)\alpha''(t)}{\alpha'(t)^3}.$$

Podobno postopamo tudi v primeru, ko je $\beta'(t_0) \neq 0$. Tedaj je funkcija $y = \beta(t)$ strogo monotona v okolici $t_0$, zato obstaja njena inverzna funkcija $t = \beta^{-1}(y)$. Sledi

$$\mathbf{r}(t) = (\alpha(t), \beta(t)) = (\alpha(\beta^{-1}(y)), \beta(\beta^{-1}(y))) = (\alpha(\beta^{-1}(y)), y).$$

V tem primeru se tir $\mathbf{r}(t)$ v okolici $t_0$ ujema z grafom funkcije $x = \alpha(\beta^{-1}(y))$ v okolici $y_0 = \beta(t_0)$, (graf funkcije $y = \alpha(\beta^{-1}(x))$ v okolici $x = \beta(t_0)$ prezrcalimo preko $y = x$). Odvoda $x'(y)$ in $x''(y)$ dobimo tako, da v formulah za $y'(x)$ in $y''(x)$ zamenjamo $x$ z $y$ in $\alpha$ z $\beta$.

**Primer.** Konstruirajmo tir vektorske funkcije

$$\mathbf{r}(t) = (\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Najprej izračunamo prvi in drugi odvod funkcije $y(x)$:

$$y'(x) = \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{t(-2+t^3)}{-1+2t^3}, \quad y''(x) = \frac{\alpha'\beta'' - \beta'\alpha''}{\alpha'^3} = \frac{-2(1+t^3)^4}{3(-1+2t^3)^3}.$$

Rešitvi enačbe $y'(x) = 0$ sta $t = 0$ in $t = \sqrt[3]{2}$. V prvem primeru je $y''(x) = \frac{2}{3}$ in $(x, y) = (0, 0)$, v drugem pa $y''(x) = -2$ in $(x, y) = (\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$. Torej je $(0, 0)$ lokalni minimum, $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ pa lokalni maksimum funkcije $y(x)$. Tangenta v prvi točki je $y = 0$, v drugi pa $y = \sqrt[3]{4}$.

Izračunajmo še prvi in drugi odvod funkcije $x(y)$:

$$x'(y) = \frac{-1+2t^3}{t(-2+t^3)}, \quad x''(y) = \frac{2(1+t^3)^4}{3t^3(-2+t^3)^3}.$$

Rešitvi enačbe $x'(y) = 0$ sta $t = \infty$ in $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. V prvem primeru je $y''(x) = \frac{2}{3}$ in $(x, y) = (0, 0)$, v drugem pa $y''(x) = -2$ in $(x, y) = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$. Torej je $(0, 0)$ lokalni minimum, $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$ pa lokalni maksimum funkcije $x(y)$. Tangenta v prvi točki je $x = 0$, v drugi pa $x = \sqrt[3]{4}$.

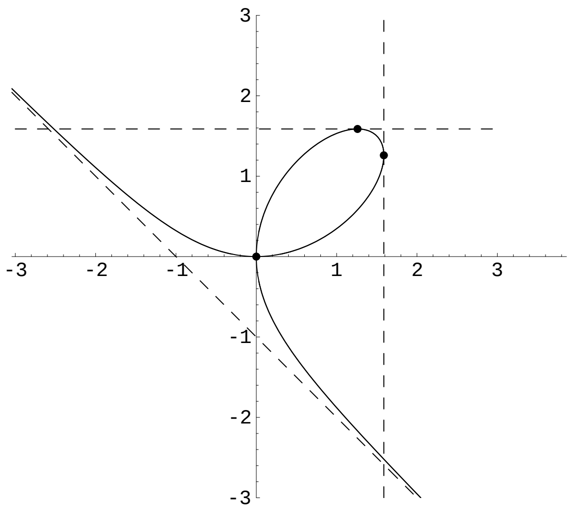
Določimo še asimptoto tira. Ko gre $t$ proti $-1$, se točka $(x(t), y(t))$ neskončno oddalji od izhodišča. Torej je asimptota oblike $y = kx + n$, kjer je

$$k = \lim_{t\to-1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to-1} t = -1$$

in

$$n = \lim_{t\to-1} \big(y(t) - kx(t)\big) = \lim_{t\to-1} \frac{3t + 3t^2}{1 + t^3} = \lim_{t\to-1} \frac{3t}{1 - t + t^2} = -1.$$

Krajši račun pokaže, da krivulja ne seka asimptote. Sedaj lahko skiciramo tir:




## 12.5. Dolžina tira

Radi bi definirali dolžino tira vektorske funkcije $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$, v $\mathbb{R}^n$. Približek za dolžino tira dobimo tako, da vzamemo delitev $\rho : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ intervala $[a, b]$ in izračunamo dolžino lomljene črte, ki povezuje točke $\mathbf{r}(t_0), \mathbf{r}(t_1), \ldots, \mathbf{r}(t_m)$. Ta približek je enak

$$l(\rho) = \sum_{i=1}^{m} \|\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})\|.$$

Ko jemljemo čedalje finejše delitve, se bo ta približek čedalje bolj ujemal z dolžino tira. Zato dolžino tira definiramo kot

$$l = \sup_{\rho} l(\rho),$$

kjer je supremum vzet po vseh delitvah intervala $[a,b]$. Seveda ni nujno, da bi bil ta supremum končen. Ta definicija je geometrijsko zelo nazorna, ni pa primerna za konkretno računanje. Zato potrebujemo naslednji izrek.

**Izrek. Dolžina tira zvezno odvedljive vektorske funkcije $\mathbf{r}(t)$, kjer je $a \leq t \leq b$, je vedno končna. Enaka je vrednosti integrala**

$$\int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt.$$

Dokaz: Zaradi večje razumljivoti se omejimo na primer $n = 2$, čeprav je dokaz za splošen $n$ skoraj enak. Recimo, da je $\mathbf{r}(t) = (\alpha(t), \beta(t))$ za vsak $t \in [a,b]$. Označimo

$$I = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt = \int_a^b \sqrt{\alpha'(t)^2 + \beta'(t)^2} dt.$$

Vzemimo poljuben $\epsilon > 0$. Po definiciji določenega integrala obstaja tak $\delta_1 > 0$, da za vsako delitev $\rho : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ intervala $[a,b]$ s premerom pod $\delta_1$ in za vsako izbiro točk $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ velja

$$|\sum_{i=1}^{m} \sqrt{\alpha'(\tau_i)^2 + \beta'(\tau_i)^2}(t_i - t_{i-1}) - I| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Ker sta funkciji $\alpha$ in $\beta$ zvezno odvedljivi in definirani na zaprtem intervalu, sta njuna odvoda $\alpha'$ in $\beta'$ enakomerno zvezni funkciji. Torej obstaja tak $\delta_2 > 0$, da za poljubna $u, v \in [a,b]$, ki zadoščata $|u - v| < \delta_2$ velja $|\alpha'(u) - \alpha'(v)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}(b-a)}$. Podobno obstaja tak $\delta_3 > 0$, da za poljubna $u, v \in [a,b]$, ki zadoščata $|u - v| < \delta_3$ velja $|\beta'(u) - \beta'(v)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}(b-a)}$. Definirajmo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$.

Za vsako delitev $\rho : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ intervala $[a,b]$ s premerom pod $\delta$ in za vsako izbiro točk $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ veljata oceni

$$|l(\rho) - \sum_{i=1}^{r} \sqrt{\alpha'(\tau_i)^2 + \beta'(\tau_i)^2}(t_i - t_{i-1})| < \frac{\epsilon}{2},$$

$$|\sum_{i=1}^{m} \sqrt{\alpha'(\tau_i)^2 + \beta'(\tau_i)^2}(t_i - t_{i-1}) - I| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Druga ocena sledi iz definicije $\delta_1$, prvo pa dokažemo takole: po Lagrangeovem izreku za vsak $i$ obstajata taka $\xi_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$, da velja $\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) = \alpha'(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$ in $\beta(t_i) - \beta(t_{i-1}) = \beta'(\eta_i)(t_i - t_{i-1})$, zato je

$$l(\rho) = \sum_{i=1}^{m} \|\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1}\| = \sum_{i=1}^{m} \sqrt{(\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}))^2 + (\beta(t_i) - \beta(t_{i-1}))^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sqrt{\alpha'(\xi_i)^2 + \beta'(\eta_i)^2}(t_i - t_{i-1}).$$

Odtod sledi

$$|l(\rho) - \sum_{i=1}^{m} \sqrt{\alpha'(\tau_i)^2 + \beta'(\tau_i)^2}(t_i - t_{i-1})| =$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} |\sqrt{\alpha'(\xi_i)^2 + \beta'(\eta_i)^2} - \sqrt{\alpha'(t_i)^2 + \beta'(t_i)^2}|(t_i - t_{i-1}) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \sqrt{(\alpha'(\xi_i) - \alpha'(t_i))^2 + (\beta'(\eta_i) - \beta'(t_i))^2}(t_i - t_{i-1}) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}(b-a)}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}(b-a)}\right)^2}(t_i - t_{i-1}) = \frac{\epsilon}{2},$$

kjer smo pri predzadnjem koraku uporabili oceno $|\|\mathbf{r}\| - \|\mathbf{y}\|| \leq \|\mathbf{r} - \mathbf{y}\|$ z $\mathbf{r} = (\alpha'(\xi_i), \beta'(\eta_i))$ in $\mathbf{y} = (\alpha'(t_i), \beta'(t_i))$, pri zadnjem koraku pa smo uporabili definicijo $\delta_2$ in $\delta_3$.

Iz gornjih dveh ocen sledi, da za vsako delitev $\rho$ s premerom pod $\delta$ velja

$$|l(\rho) - I| < \epsilon.$$

Radi bi dokazali, da je $I - \epsilon \leq \sup_\rho l(\rho) \leq I + \epsilon$. Za vsako delitev $\rho$ velja $l(\rho) \leq I + \epsilon$, saj je $l(\rho) \leq l(\rho') \leq I + \epsilon$ za poljubno delitev $\rho'$, ki vsebuje delitev $\rho$ in ima premer pod $\delta$. Torej je res $\sup_\rho l(\rho) \leq I + \epsilon$. Po drugi strani je $I - \epsilon < l(\rho') \leq \sup_\rho l(\rho)$. Ker je $\epsilon$ lahko poljubno majhen, velja

$$\sup_\rho l(\rho) = I,$$

torej je dolžina tira res enaka $I$. □

**Primer.** Izračunajmo dolžino krivulje $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, kjer je $0 \leq t \leq 2\pi$.

Ker je $(x')^2 + (y')^2 = (1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1 - 2\cos t + (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 2 - 2\cos t = 4\left(\sin \frac{t}{2}\right)^2$, je dolžina enaka

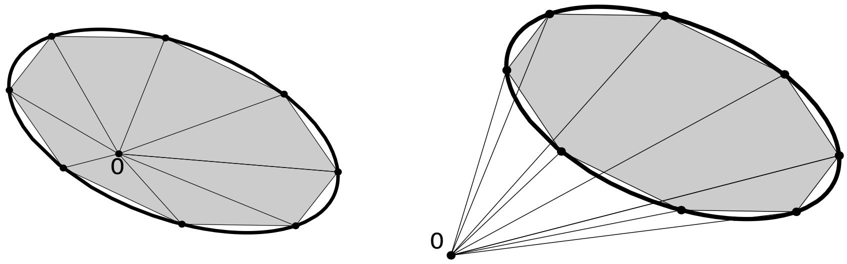
$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{t}{2}\, dt = -4 \cos \frac{t}{2}\Big|_{t=0}^{t=2\pi} = 4 - (-4) = 8.$$

## 12.6. Ploščina znotraj sklenjenega tira

Recimo, da je $\mathbf{r}(t) = (\alpha(t), \beta(t))$, $a \leq t \leq b$, zvezna vektorska funkcija v $\mathbb{R}^2$ s sklenjenim tirom, se pravi $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$. Najprej si bomo ogledali, kako definiramo ploščino lika, ki jo tak tir omejuje, nato pa bomo povedali še, kako jo izračunamo.

Približek za ploščino dobimo tako, da vzamemo delitev $\rho : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$, označimo $T_k = \mathbf{r}(t_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$ in seštejemo predznačene ploščine trikotnikov $\triangle OT_{k-1}T_k$, kjer je $O$ izhodišče. Če se izhodišče nahaja znotraj tira, lahko vzamemo kar navadne ploščine (glej levo sliko), sicer pa moramo z ustrezno izbiro predznakov poskrbeti, da se nekatere ploščine odštejejo (glej desno sliko).




Kaj je predznačena ploščina trikotnika? Ko se gibljemo po robu trikotnika $\triangle ABC$ v nasprotni smeri urinega kazalca, se nam lahko zgodi dvoje: za točko $A$ pride točka $B$ ali pa točka $C$. V prvem primeru je predznačena ploščina isto kot navadna ploščina, v drugem primeru pa moramo navadno ploščino vzeti z negativnim predznakom. Predznačena ploščina trikotnika $\triangle OT_{k-1}T_k$ je enaka

$$\frac{1}{2}(\alpha(t_{k-1})\beta(t_k) - \alpha(t_k)\beta(t_{k-1})).$$

Navadna ploščina je namreč enaka polovici od ploščine paralelograma, ki ga razpenjata vektorja $\mathbf{r}(t_{k-1})$ in $\mathbf{r}(t_k)$, ta pa je enaka

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{r}(t_{k-1})\|\|\mathbf{r}(t_k)\| \sin\phi_k = \\ &= \|(\alpha(t_{k-1}), \beta(t_{k-1}), 0)\|\|(\alpha(t_k), \beta(t_k), 0)\| \sin\phi_k = \\ &= \|(\alpha(t_{k-1}), \beta(t_{k-1}), 0) \times (\alpha(t_k), \beta(t_k), 0)\| = \\ &= \|(\alpha(t_{k-1})\beta(t_k) - \alpha(t_k)\beta(t_{k-1}, 0, 0)\| = \\ &= |\alpha(t_{k-1})\beta(t_k) - \alpha(t_k)\beta(t_{k-1})|. \end{aligned}$$

Premislek o predznaku ploščine prepustimo bralcu.

Približek za celotno ploščino je potem enak

$$p(\rho) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}(\alpha(t_{k-1})\beta(t_k) - \alpha(t_k)\beta(t_{k-1})).$$

Ploščino lika lahko definiramo kot $\lim_\rho p(\rho)$.

Cilj tega razdelka je skicirati dokaz naslednjega izreka.

**Izrek. Recimo, da je r$(t) = (\alpha(t), \beta(t))$, $a \leq t \leq b$, zvezno odvedljiva vektorska funkcija v $\mathbb{R}^2$ s sklenjenim tirom. Potem je ploščina ravninskega lika, ki ga ta tir omejuje, enaka**

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}\int_a^b (\alpha(t)\beta'(t) - \alpha'(t)\beta(t))\,dt.}$$

Dokaz: Po Lagrangeovem izreku za poljubno delitev $\rho$ intervala $[a, b]$ velja

$$p(\rho) = \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{k=1}^r (\alpha(t_{k-1})\beta(t_k) - \alpha(t_k)\beta(t_{k-1})) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{k=1}^r (\alpha(t_{k-1})(\beta(t_k) - \beta(t_{k-1})) - (\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1}))\beta(t_{k-1})) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=k}^r (\alpha(t_{k-1})\beta'(\eta_k) - \alpha'(\xi_k)\beta(t_{k-1})).$$

Označimo $I = \frac{1}{2}\int_a^b (\alpha(t)\beta'(t) - \alpha'(t)\beta'(t))\,dt$. Vzemimo $\epsilon > 0$ in konstruirajmo $\delta$ tako kot v dokazu formule za dolžino krivulje. Potem za poljubno delitev $\rho$ s premerom pod $\delta$ velja

$$|p(\rho) - I| \leq |p(\rho) - \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=k}^r (\alpha(t_{k-1})\beta'(t_{k-1}) - \alpha'(t_{k-1})\beta(t_{k-1}))| +$$
$$+ |\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=k}^r (\alpha(t_{k-1})\beta'(t_{k-1}) - \alpha'(t_{k-1})\beta(t_{k-1})) - I| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Odtod sledi, da je ploščina lika res enaka $I$. □

**Primer.** Izračunajmo ploščino elipse $x = A\cos t$, $y = B\sin t$, kjer $0 \leq t \leq 2\pi$. Velja

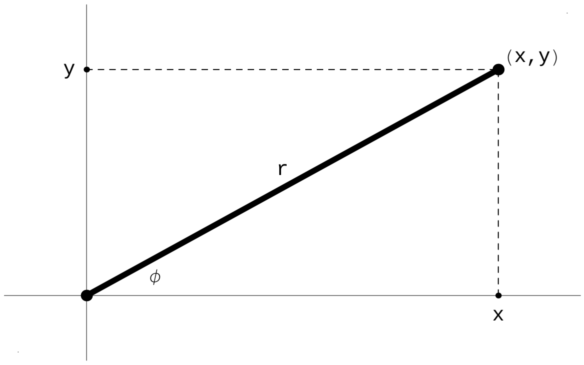
$$p = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (xy' - x'y)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (A\cos t\, B\cos t - (-A\sin t)\, B\sin t)\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} AB\,dt = \frac{1}{2}(2\pi AB) = \pi AB.$$

## 12.7. Krivulje v polarnih koordinatah

Točka v ravnini $(x, y)$ je natančno določen z dvema podatkoma

- oddaljenostjo $r$ od izhodišča $(0, 0)$,
- kotom $\phi$ med vektorjema $(x, y)$ in $(1, 0)$.

Kot $\phi$ merimo tako, da se gibljemo od vektorja $(1, 0)$ do vektorja $(x, y)$ v nasprotni smeri urinega kazalca. Paru $(r, \phi)$ rečemo **polarni koordinati** točke $(x, y)$.




Če poznamo $r$ in $\phi$, potem $x$ in $y$ določimo s formulama

$$x = r\cos\phi \quad \text{in} \quad y = r\sin\phi.$$

Če poznamo $x$ in $y$, potem $r$ in $\phi$ določimo s formulama

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{in} \quad \phi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Formula za $\phi$ je pravilna samo v primeru, ko je $(x, y)$ v prvem kvadrantu, sicer ji je treba prišteti ustrezen večkratnik $\pi$.

**Primer.** Točka $(-1, -\sqrt{3})$ ima polarni koordinati

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\phi = \pi + \operatorname{arctg}\frac{(-\sqrt{3})}{(-1)} = \pi + \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}.$$

Krivuljo podamo v polarnih koordinatah z enačbo oblike

$$r = f(\phi), \quad \alpha \le \phi \le \beta.$$

Skiciramo jo tako, da izberemo nekaj kotov $\phi_i, i = 1, \ldots, k$. Za vsak kot $\phi_i$ narišemo poltrak $\phi = \phi_i$ in izenačimo na njem točko v oddaljenosti $f(\phi_i)$ od izhodišča. Nato te točke povežemo.

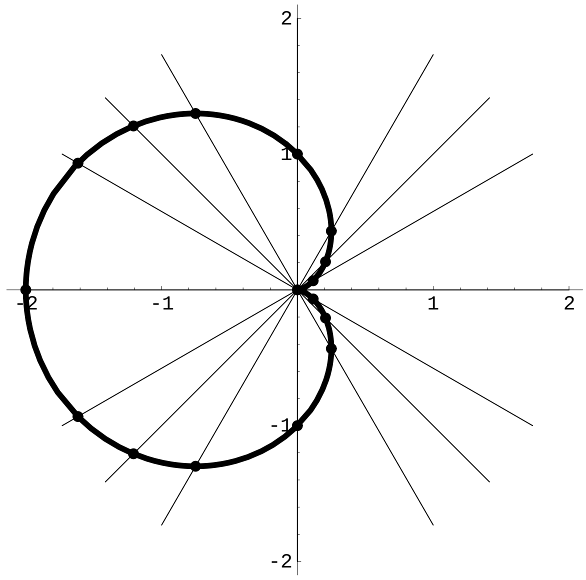
**Primer.** Narišimo krivuljo, ki ima v polarnih koordinatah enačbo

$$r = f(\phi) = 1 - \cos\phi, \quad 0 \le \phi \le 2\pi.$$

Najprej funkcijo tabeliramo pri nekaterih kotih:

| $\phi$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1-\cos\phi$ | $0$ | $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $\frac{3}{2}$ | $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $2$ |
| $\approx$ | 0 | 0.13 | 0.29 | 0.5 | 1 | 1.5 | 1.71 | 1.87 | 2 |

Ker je $f(-\phi) = f(\phi)$, je krivulja simetrična glede na abscisno os.




Krivulja, ki je v polarnih koordinatah podana z enačbo

$$r = f(\phi), \quad \alpha \leq \phi \leq \beta,$$

je tir vektorske funkcije

$$\mathbf{r}(\phi) = (f(\phi)\cos\phi, f(\phi)\sin\phi), \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

To obliko uporabimo takrat, kadar želimo izračunati njeno tangento, dolžino ali ploščino. Tangenta v točki $\phi = \phi_0$, $r = f(\phi_0)$ ima v kartezičnih koordinatah parametrično enačbo

$$\begin{aligned} x &= f(\phi_0)\cos\phi_0 + t(f'(\phi_0)\cos\phi_0 - f(\phi_0)\sin\phi_0), \\ y &= f(\phi_0)\sin\phi_0 + t(f'(\phi_0)\sin\phi_0 - f(\phi_0)\cos\phi_0). \end{aligned}$$

Ker je

$$\left((f(\phi)\cos\phi)'\right)^2 + \left((f(\phi)\sin\phi)'\right)^2 = f(\phi)^2 + f'(\phi)^2,$$

je dolžina krivulje enaka

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{f(\phi)^2 + f'(\phi)^2}\, d\phi.$$

Ker je

$$(f(\phi)\cos\phi)(f(\phi)\sin\phi)' - (f(\phi)\cos\phi)'(f(\phi)\sin\phi) = f(\phi)^2,$$

je ploščina, ki jo omejuje krivulja, enaka

$$p = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\phi)^2\, d\phi.$$

## 12.8. Vprašanja za ponavljanje

(1) (Risanje vektorskih funkcij)
   (a) Kaj je vektorska funkcija?
   (b) Kaj je tir in kaj je graf vektorske funkcije?
   (c) Kako iz grafa dobimo tir in kako definicijsko območje?

(2) (Limita in odvod vektorske funkcije)
   (a) Kako izračunamo limito vektorske funkcije? Kdaj je vektorska funkcija zvezna?
   (b) Kako izračunamo odvod vektorske funkcije? Kaj je njegov geometrijski pomen?
   (c) Kako izračunamo enačbo tangente na tir v dani točki?

(3) (Fizikalni pomen vektorskih funkcij)
   (a) Kako gibanju delca priredimo ustrezno vektorsko funkcijo?
   (b) Kako izračunamo trenutno hitrost in smer delca s pomočjo vektorske funkcije?
   (c) Določi dolžino poti, ki jo prepotuje delec med trenutkoma $t_0$ in $t_1$!

(4) (Parametrično podane krivulje)
   (a) Kako podamo ravninsko krivuljo v parametrični obliki? Kako ugotovimo, ali je sklenjena?
   (b) Izpelji formulo za dolžino parametrično podane krivulje!
   (c) Izpelji formulo za ploščino lika, ki ga oklepa sklenjena parametrično podana krivulja!

(5) (Polarni zapis)
   (a) Kako podamo ravninsko krivuljo v polarnem zapisu? Kako ugotovimo, ali je sklenjena?
   (b) Kako polarni zapis pretvorimo v kartezičnega in obratno?
   (c) Izpelji formulo za dolžino krivulje v polarnem zapisu!
   (d) Izpelji formulo za ploščino, ki jo obdaja sklenjena krivulja v polarnem zapisu!

POGLAVJE 13

# Funkcije dveh in več spremenljivk

## 13.1. Risanje funkcij več spremenljivk

Naj bo $m$ neko naravno število (najpogosteje $m = 2$ ali $m = 3$). V tem poglavju nas bodo zanimale funkcije iz $\mathbb{R}^m$ v $\mathbb{R}$; pravimo jim tudi **funkcije $\boldsymbol{m}$ spremenljivk.** Funkcija $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je podana z dvema podatkoma:

- z definicijskim območjem, se pravi podmnožico $D \subseteq \mathbb{R}^m$, in
- s predpisom, ki vsakemu vektorju $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in D$ priredi natanko določen element $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}$.

Definicijsko območje funkcije $f$ označimo z $D(f)$. Kadar imamo podan samo predpis, potem se dogovorimo, da za $D(f)$ vzamemo množico vseh točk, v katerih je predpis smiselno definiran. Tej množici pravimo **maksimalno definicijsko območje** predpisa in jo označimo z $D_{\max}(f)$.

**Primer.** Vzemimo predpis

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Maksimalno definicijsko območje tega predpisa je množica

$$D_{\max}(f) = \{(x, y)\colon\ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Seveda to ni edino možno definicijsko območje za dani predpis, je pa največje.

Funkcijo $m$ spremenljivk lahko grafično predstavimo na dva načina: z grafom ali z nivojskim diagramom.

**Graf funkcije** $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je množica točk

$$\Gamma(f) = \{(x_1, \ldots, x_m, f(x_1, \ldots, x_m))\colon\ (x_1, \ldots, x_m) \in D(f)\}.$$

v $\mathbb{R}^{m+1}$. Narišemo ga lahko samo v primeru, ko je $m \leq 2$. S primerom $m = 1$ smo se že ukvarjali, zato si oglejmo primer $m = 2$.

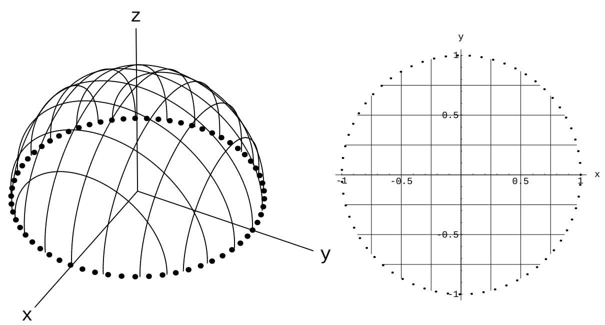
Prva ideja je, da bi izbrali nekaj točk $(x_i, y_i) \in D(f)$, $i = 1, 2, \ldots$ izračunali $z_i = f(x_i, y_i)$ in povezali s ploskvijo točke $(x_i, y_i, z_i)$. Ta metoda žal deluje samo, če izberemo zelo veliko število točk. Druga ideja je, da izberemo nekaj števil $a_i$, $i = 1, 2, \ldots$, in $b_j$, $j = 1, 2, \ldots$

(običajno tako, da so razmiki med njimi konstantni), ter narišemo preseke grafa funkcije $z = f(x, y)$ z ravninami $x = a_i$ in $y = b_j$. Ti preseki so grafi funkcij ene spremenljivke $z = f(a_i, y)$ in $z = f(x, b_j)$, ki pa jih znamo narisati. Na koncu dobljene krivulje povežemo s ploskvijo. Ta metoda se izkaže za zelo učinkovito.

**Primer.** Narišimo graf funkcije

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

tako, da ga presekamo z ravninami $x = i/4$, $i = -4, \ldots, 4$ in $y = i/4$, $i = -4, \ldots, 4$. Na levi so narisane presečne krivulje, na desni pa njihove projekcije na $xy$ ravnino. Pikčasta krivulja označuje rob deficijskega območja.




## 13.2. Parcialni odvodi

Pri načrtovanju grafov funkcij $x \mapsto f(x, y), y =$ konstanta, in $y \mapsto f(x, y), x =$ konstanta, si pomagamo z njihovimi odvodi. Odvod funkcije $x \mapsto f(x, y), y =$ konstanta, je funkcija

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}.$$

Pravimo ji **parcialni odvod funkcije $f(x, y)$ po spremenljivki $x$.** Odvod funkcije $y \mapsto f(x, y), x =$ konstanta, pa je funkcija

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}.$$

Pravimo ji **parcialni odvod funkcije $f(x, y)$ po spremenljivki $y$.**

**Primer.** Izračunajmo parcialna odvoda funkcije

$$f(x, y) = x^2 + 2xy.$$

Če smatramo $y$ za konstanto in odvajamo $f$ po $x$, dobimo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2y.$$

Če pa smatramo $x$ za konstanto in odvajamo $f$ po $y$, dobimo

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x.$$

Parcialni odvodi so v veliko pomoč pri določanju lokalnih ekstremov. Pravimo, da funkcija $f(x,y)$ zavzame **lokalni maksimum** v točki $(x_0, y_0)$, če obstaja tak $\epsilon > 0$, da je $f(x,y) \leq f(x_0, y_0)$ za vsako točko $(x,y) \in D(f)$, ki je od $(x_0, y_0)$ oddaljena za manj kot $\epsilon$. Za lokalni minimum je definicija podobna.

Če funkcija $(x,y) \mapsto f(x,y)$ zavzame lokalni ekstrem v točki $(x_0, y_0)$, potem tudi funkcija $x \mapsto f(x, y_0)$ zavzame lokalni ekstrem v točki $x_0$ in funkcija $y \mapsto f(x_0, y)$ zavzame lokalni ekstrem v točki $y_0$. Sedaj uporabimo potrebni pogoj za lokalni ekstrem funkcij ene spremenljivke. Odtod sledi, da je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{in} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Pri tem smo seveda predpostavili, da oba parcialna odvoda obstajata ter da je funkcija $x \mapsto f(x, y_0)$ definirana v okolici točke $x_0$, funkcija $y \mapsto f(x_0, y)$ pa v okolici točke $y_0$. Kandidati za lokalni ekstrem funkcije $f(x,y)$ so torej tiste točke iz $D(f)$, ki bodisi rešijo sistem enačb $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, bodisi v njih ni izpolnjena ena od tehničnih predpostavk.

**Primer.** Poiščimo kandidate za lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 + 5x + 6y + 7.$$

Najprej izračunamo parcialna odvoda funkcije $f$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + 3y + 5, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 8y + 6.$$

Nato rešimo sistem enačb

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Dobimo

$$x = -\frac{22}{23}, \quad y = -\frac{9}{23}.$$

Ker je funkcija $f$ povsod definirana in povsod parcialno odvedljiva, je to edini kandidat za lokalni ekstrem funkcije $f$.

Pojem parcialnega odvoda lahko posplošimo tudi na funkcije več kot dveh spremenljivk. **Parcialni odvod** funkcije $f(x_1, \ldots, x_m)$ po spremenljivki $x_i$ je funkcija, ki je definirana s predpisom

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_m) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_m) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m)}{h}.$$

Njeno definicijsko območje sestavljajo vse tiste točke iz $D(f)$, pri katerih limita na desni obstaja in je enolična. Bralec bo opazil, da je limita na desni enaka odvodu funkcije ene spremenljivke

$$x_i \mapsto f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m).$$

Parcialni odvod po spremenljivki $x_i$ torej izračunamo tako, da funkcijo $f$ odvajamo po spremenljivki $x_i$, pri čemer smatramo ostale spremenljivke za konstante. Pravimo, da je funkcija $f$ **parcialno odvedljiva** v točki $(a_1, \ldots, a_m)$, če so tako funkcija $f$ kot tudi vsi njeni parcialni odvodi definirani v tej točki.

Brez težav posplošimo tudi potrebni pogoj za lokalni ekstrem.

## 13.3. Zveznost in limita

Funkcija $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je **zvezna v točki $\mathbf{a} \in D(f)$**, če za vsako zaporedje $\mathbf{x}_n \in D(f)$, ki limitira proti $\mathbf{a}$, zaporedje $f(\mathbf{x}_n)$ limitira proti $f(\mathbf{a})$. Pravimo, da je funkcija $f$ **zvezna**, če je zvezna v vsaki točki iz $D(f)$.

**Primer.** Najpreprostejši primeri zveznih funkcij so projekcije

$$\mathrm{pr}_i(x_1, \ldots, x_m) = x_i, \quad D(\mathrm{pr}_i) = \mathbb{R}^m.$$

Če namreč zaporedje vektorjev limitira proti vektorju $\mathbf{a}$, potem zaporedje njihovih $i$-tih komponent limitira proti $i$-ti komponenti vektorja $\mathbf{a}$.

Kot pri funkcijah ene spremenljivke definiramo vsoto, razliko, produkt in količnik dveh funkcij in dokažemo, da se zveznost pri teh operacijah ohranja. Kaj pa deljenje z nič? To vpliva na definicijsko območje količnika, ne pa na njegovo zveznost.

**Primer.** Polinomi in racionalne funkcije v $m$ spremenljivkah so zvezne funkcije. Te funkcije namreč dobimo iz projekcij s pomočjo seštevanja, odštevanja, množenja in deljenja.

Če je $f$ funkcija $m$ spremenljivk in $g$ funkcija ene spremenljivke, potem je $g \circ f$ funkcija $m$ spremenljivk, katere predpis je $(g \circ f)(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x}))$, definicijsko območje pa $D(g \circ f) = \{\mathbf{x} \in D(f)\colon\ f(\mathbf{x}) \in D(g)\}$. Če sta $f$ in $g$ zvezni, potem je tudi $g \circ f$ zvezna.

**Primer.** Funkcija

$$f(x, y) = \sin(xy^2), \quad D(f) = \mathbb{R}^2,$$

je zvezna, saj je kompozitum polinomske funkcije dveh spremenljivk in zvezne funkcije ene spremenljivke.

Podobno kot smo definirali elementarne funkcije ene spremenljivke, bi lahko definirali tudi elementarne funkcije več spremenljivk. Podobno bi tudi dokazali, da so take funkcije zvezne.

S pomočjo zveznih funkcij lahko definiramo pojem limite. Pravimo, da je limita funkcije $f(\mathbf{x})$ v točki $\mathbf{a}$ enaka $L$, če je funkcija

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \neq \mathbf{a}, \\ L, & \mathbf{x} = \mathbf{a}, \end{cases}$$

zvezna v točki $\mathbf{a}$. V tem primeru pišemo

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L.$$

To je ekvivalentno zahtevi, da za vsako zaporedje $\mathbf{a}_n$ v $D(f) \setminus \{\mathbf{a}\}$, ki limitira proti $\mathbf{a}$ zaporedje $f(\mathbf{a}_n)$ limitira proti $L$. Z limitami lahko računamo tako kot pri funkcijah ene spremenljivke.

Oglejmo si sedaj, kakšna je zveza med parcialno odvedljivostjo in zveznostjo. Pričakovali bi, da, tako kot pri funkcijah ene spremenljivke, iz parcialne odvedljivosti sledi zveznost. Naslednji primer pokaže, da pri funkcijah dveh ali več spremenljivk to ni nujno res.

**Primer.** Funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

ni zvezna v točki $(0, 0)$. Zaporedje $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ namreč limitira proti $(0, 0)$, zaporedje $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = 1$ pa ne limitira proti $f(0, 0) = 0$. Ker velja $f(x, 0) = 0$ in $f(0, y) = 0$ za vsak $x, y \in \mathbb{R}$, je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \quad \text{in} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

torej je funkcija $f(x, y)$ parcialno odvedljiva v točki $(0, 0)$. (Za vajo dokaži, da je funkcija $f(x, y)$ v vseh ostalih točkah tako zvezna kot parcialno odvedljiva.)

Seveda pa iz parcialne odvedljivosti funkcije $f(x_1, \ldots, x_m)$ v točki $(a_1, \ldots, a_m)$ sledi, da je za vsak $i = 1, \ldots, m$ funkcija ene spremenljivke

$$x_i \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_m)$$

zvezna v točki $x_i = a_i$ (saj so celo odvedljive). Skratka, iz parcialne odvedljivosti sledi "parcialna zveznost".

### 13.4. Globalni ekstremi

Pravimo, da funkcija $f$ zavzame **globalni maksimum** v točki $\mathbf{x}_0 \in D(f)$, če za vsako točko $\mathbf{x} \in D(f)$ velja $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$. Podobno definiramo, kdaj funkcija $f$ zavzame **globalni minimum** v točki $\mathbf{x}_0$.

**Primer.** Iz grafa je razvidno, da funkcija

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}, \quad D(f) = \{(x,y)\colon\ x^2+y^2 \leq 1\},$$

zavzame globalni maksimum v točki $(0,0)$, in da zavzame globalni minimum v vsaki točki na enotski krožnici $\{(x_0,y_0)\colon x_0^2+y_0^2=1\}$.

Naj bo $K(\mathbf{a},\epsilon)$ množica vseh točk, ki so od $\mathbf{a}$ oddaljene za manj kot $\epsilon$. Pravimo, da je točka $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ **robna točka** množice $D \subseteq \mathbb{R}^m$, če za vsak $\epsilon > 0$ množica $K(\mathbf{a},\epsilon)$ seka tako $D$ kot $\mathbb{R}^m \setminus D$. Množica $D$ je **zaprta**, če vsebuje vse svoje robne točke. Če obstaja tak $R$, da je $D \subseteq K(0,R)$, je množica $D$ **omejena**.

**Primer.** Množica $D_1 = \{(x,y)\colon\ x^2+y^2 \leq 1\}$ je zaprta in omejena, Množica $D_2 = \{(x,y)\colon\ xy \geq 0\}$ je zaprta, ni pa omejena. Množica $D_3 = \{(x,y)\colon\ |x| < 1, |y| \leq 1\}$ je omejena, ni pa zaprta. Množica $D_4 = \{(x,y)\colon\ y > x^2\}$ ni niti zaprta niti omejena.

**Izrek o obstoju globalnih ekstremov. Vsaka zvezna funkcija več spremenljivk, katere definicijsko območje je zaprta in omejena množica:**

**(1) je omejena,**
**(2) v vsaj eni točki zavzame globalni minimum in**
**(3) v vsaj eni točki zavzame globalni maksimum.**

Dokaz je skoraj enak kot pri funkcijah ene spremenljivke definiranih na zaprtih intervalih. Edina razlika je, da uporabimo posplošitev Heine-Borelovega izreka na funkcije več spremenljivk: **vsako zaporedje, ki je vsebovano v zaprti in omejeni množici $\boldsymbol{D}$, ima podzaporedje, katerega limita je vsebovana v $\boldsymbol{D}$.**

Globalne ekstreme funkcije $f$ poiščemo tako, da najprej določimo vse kandidate za lokalni ekstrem in nato poiščemo tistega, v katerem funkcija zavzame največjo oziroma najmanjšo vrednost. Kandidati za lokalni ekstrem se delijo v tri skupine:

- vse robne točke točke množice $D(f)$,
- tiste točke množice $D(f)$, ki niso robne in ki rešijo sistem enačb $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m} = 0$,

- tiste točke množice $D(f)$, ki niso robne in v katerih ne obstaja vsaj eden od parcialnih odvodov $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}$.

Običajno je v prvem razredu neskončno točk, v drugem končno, v tretjem pa nič. Oglejmo si dva primera.

**Primer.** Poiščimo globalne ekstreme funkcije

$$f(x, y) = x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Ker je $D(f) = \{(x, y)\colon x^2 + y^2 \leq 1\}$ zaprta in omejena množica, vemo, da je funkcija $f$ omejena in zavzame tako globalni minimum kot globalni maksimum. V prvem razredu kandidatov so vse robne točke množice $D(f)$, se pravi vse točke na enotski krožnici $x^2 + y^2 = 1$. V drugem razredu kandidatov so rešitve sistema $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0$, se pravi točka $(0, 0)$. Tretji razred kandidatov je prazen.

Ekstreme funkcije $f(x, y)$ na krožnici $x^2 + y^2 = 1$ poiščemo tako, da krožnico najprej parametriziramo z $x = \cos t$, $y = \sin t$ in nato poiščemo ekstreme funkcije ene spremenljivke

$$f(\cos t, \sin t) = (\cos t)^2 - (\sin t)^2 = \cos(2t).$$

Lokalni ekstremi te funkcije so točke $t = \frac{k\pi}{2}$, ki jim na enotski krožnici ustrezajo točke

$$\{(\cos \frac{k\pi}{2}, \sin \frac{k\pi}{2})\colon k \in \mathbb{Z}\} = \{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}.$$

Ker je

$$f(1, 0) = f(-1, 0) = 1, \quad f(0, 1) = f(0, -1) = -1, \quad f(0, 0) = 0,$$

zavzame $f(x, y)$ globalni maksimum v točkah $(\pm 1, 0)$, globalni minimum pa v točkah $(0, \pm 1)$.

**Primer.** Poiščimo globalne ekstreme funkcije

$$f(x, y) = x + 2y, \quad |x| \leq 1, |y| \leq 1.$$

Definicijsko območje te funkcije je kvadrat omejen s premicami $x = \pm 1$ in $y = \pm 1$. V prvem razredu kandidatov so vse robne točke tega kvadrata, drugi in tretji razred kandidatov pa sta prazna.

Na stranicah kvadrata funkcija $f(x, y)$ zavzame vrednosti $f(\pm 1, y) = \pm 1 + 2y$, $-1 \leq y \leq 1$ oziroma $f(x, \pm 1) = x \pm 1$, $-1 \leq x \leq 1$. Vse te štiri funkcije zavzamejo ekstrem na robu intervala $[-1, 1]$. Ker je

$$f(1, 1) = 3, \quad f(-1, 1) = 1, \quad f(1, -1) = -1, \quad f(-1, -1) = -3,$$

zavzame $f(x, y)$ globalni maksimum v točki $(1, 1)$, globalni minimum pa v točki $(-1, 1)$.

## 13.5. Tangentna ravnina in gladkost

Kot primer uporabe parcialnih odvodov si oglejmo, kako izračunamo tangentno ravnino na graf funkcije $f(x,y)$ z dotikališčem v točki $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Pri izpeljavi moramo predpostaviti, da obstajata oba parcialna odvoda funkcije $f$ v točki $(x_0, y_0)$.

Presek grafa funkcije $f(x,y)$ z ravnino $x = x_0$ je krivulja $t \mapsto (x_0, t, f(x_0, t))$. Če vse komponente odvajamo po $t$ in vstavimo $t = y_0$, dobimo tangentni vektor te krivulje v točki $\mathbf{r}_0$:

$$\mathbf{p}_1 = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)).$$

Podobno je presek grafa funkcije $f(x,y)$ z ravnino $y = y_0$ krivulja $t \mapsto (t, y_0, f(t, y_0))$. Njen tangentni vektor v točki $\mathbf{r}_0$ je

$$\mathbf{p}_2 = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)).$$

Tangentna ravnina je določena s točko $\mathbf{r}_0$ in normalo

$$\mathbf{n} = \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2 = (\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1).$$

Normalna enačba tangentne ravnine je torej

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0,$$

odkoder izračunamo

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

**Primer.** Poiščimo enačbo tangentne ravnine na graf funkcije

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

z dotikališčem v točki $x_0 = \frac{1}{4}$, $y_0 = \frac{1}{2}$. Parcialna odvoda sta

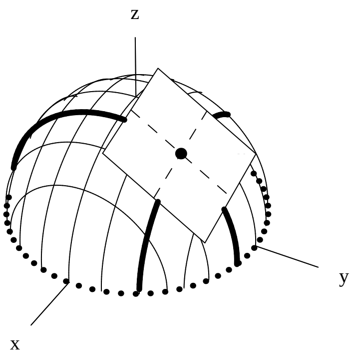
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \quad \text{in} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Odtod sledi, da je enačba tangentne ravnine

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) =$$

$$= \frac{\sqrt{11}}{4} - \frac{1}{\sqrt{11}}(x - \frac{1}{4}) - \frac{2}{\sqrt{11}}(y - \frac{1}{2}) = \frac{4 - x - 2y}{\sqrt{11}}.$$

Za boljšo predstavo si narišimo graf funkcije $f(x,y)$. Odebeljeni krivulji sta presečišči grafa z ravninama $x = x_0$ in $y = y_0$, črtkani premici pa sta njuni tangenti z dotikališčema v točki $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.




Od tangentne ravnine seveda pričakujemo, da se dobro prilega grafu funkcije v okolici dotikališča. Žal to ni vedno res, kadar pa je, pravimo, da je funkcija gladka.

Povejmo to natančneje. Funkcija $f(x,y)$ je **gladka** v točki $(x_0, y_0)$, če je v tej točki parcialno odvedljiva in če velja

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0.$$

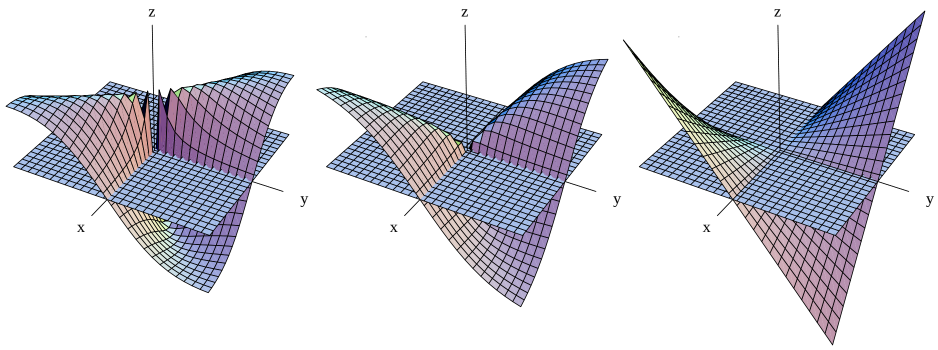
Števec tega ulomka je ravno razdalja med točko na grafu, ki leži nad $(x,y)$ in točko na tagentni ravnini, ki leži nad $(x,y)$. Imenovalec tega ulomka pa je razdalja med točko $(x,y)$ in točko $(x_0,y_0)$. Pogoj pove, da se točki nad $(x,y)$ hitreje približujeta ena drugi, kot pa se točka $(x,y)$ približuje $(x_0,y_0)$.

**Primer.** Oglejmo si funkcijo

$$f_s(x,y) = \begin{cases} -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^s}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

kjer je $s$ realno število. Vabimo bralca, da pokaže, da je ta funkcija gladka, če $s < \frac{1}{2}$, in zvezna, če $s < 1$. (Dokaz sledi v nadaljevanju.)

Narišimo grafe funkcij $f_s$ v primerih $s = 1$ (leva slika), $s = 2/3$ (srednja slika) in $s = 0$ (desna slika). V vseh treh primerih je tangentna ravnina z dotikališčem v $(0,0,0)$ ravno $xy$ ravnina.




V primeru $s = 1$ funkcija $f_s$ ni niti zvezna niti gladka v točki $(0, 0)$, zato graf sploh ni blizu tangentne ravnine v okolici $(0, 0)$. V primeru $s = 2/3$ je funkcija $f_s$ zvezna v točki $(0, 0)$, ni pa v tej točki gladka. Graf je zato blizu tangentne ravnine, vendar z njo oklepa neničeln kot. V primeru $s = 0$ je funkcija $f_s$ zvezna in "gladka" v točki $(0, 0)$, zato graf in tangentna ravnina oklepata kot 0.

Dokaz: Pokažimo, da je v primeru $s < \frac{1}{2}$ funkcija $f_s$ gladka v točki $(0, 0)$. Ker je $x_0 = y_0 = 0$ in $f_s(x_0, y_0) = \frac{\partial f_s}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f_s}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$, moramo preveriti, da velja

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f_s(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

S prehodom na polarne koordinate $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ dobimo

$$\frac{f_s(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^{s+\frac{1}{2}}} = -\frac{2r^2 \sin\phi\cos\phi}{r^{2s+1}} = -r^{1-2s}\sin 2\phi,$$

kar je po absolutni vrednost manjše od $r^{1-2s}$. Če je $s < \frac{1}{2}$, potem gre $r^{1-2s}$ proti 0, ko gre $(x, y)$ proti $(0, 0)$. Odtod sledi, da gre tudi $\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ proti 0, ko gre $(x, y)$ proti $(0, 0)$. Podobno se dokaže, da je v primeru $s < 1$ funkcija $f_s(x, y)$ zvezna v točki $(0, 0)$. □

Zvezo med gladkostjo, parcialno odvedljivostjo in zveznostjo opisuje diagram na naslednji strani. Tri od implikacij že poznamo. Novi sta le zgornja implikacija in desna od srednjih dveh. Njun dokaz sicer ni zapleten, a ga vseeno izpustimo. Gornja implikacija je zelo uporabna, saj je zveznost parcialnih odvodov bistveno lažje preveriti, kot pa izračunati limito, ki nastopa v definiciji gladkosti. S primeri se da pokazati, da se nobene od implikacij ne da obrniti.

| Funkciji $\frac{\partial f}{\partial x}$ in $\frac{\partial f}{\partial y}$ sta definirani in zvezni v okolici točke $(x_0, y_0)$. |
|---|

$$\Downarrow$$

| Funkcija $f$ je gladka v točki $(x_0, y_0)$. |
|---|

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

| Funkcija $f$ je parcialno odvedljiva v točki $(x_0, y_0)$. | Funkcija $f$ je zvezna v točki $(x_0, y_0)$. |
|---|---|

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

| Funkcija $f$ je "parcialno zvezna" v točki $(x_0, y_0)$. |
|---|

Pojem tangentne hiperravnine in gladkosti lahko vpeljemo tudi za funkcije več kot dveh spremenljivk. Tangentna hiperravnina funkcije $f(x_1, \ldots, x_m)$ v točki $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ je

$$z = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})(x_i - a_i).$$

Pravimo, da je funkcija $f(x_1, \ldots, x_m)$ gladka v točki $\mathbf{a}$, če velja

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})(x_i - a_i)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} = 0.$$

Gornji diagram velja tudi v tem primeru.

## 13.6. Posredno in implicitno odvajanje

Kompozitum funkcij $t \mapsto ((x(t), y(t))$ in $(x, y) \mapsto f(x, y)$ je funkcija $t \mapsto f(x(t), y(t))$. Za nima nas, kako odvod kompozituma izrazimo z odvodi prve in druge funkcije. Velja naslednji izrek.

**Izrek o posrednem odvajanju. Če sta funkciji $x(t)$ in $y(t)$ odvedljivi, funkcija $f(x, y)$ pa je zvezno parcialno odvedljiva, potem je tudi funkcija**

$$g(t) = f(x(t), y(t))$$

**odvedljiva in velja**

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t).$$

Dokaz: Vzemimo neka $t$ in $h$. Če uporabimo Lagrangeov izrek na funkciji $x \mapsto f(x, y(t+h))$, zvemo, da obstaja tak $c$ med $x(t)$ in $x(t+h)$, da velja

$$f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t+h)) = \tfrac{\partial f}{\partial x}(c, y(t+h))(x(t+h) - x(t)),$$

če pa ga uporabimo na funkciji $y \mapsto f(x(t), y)$, potem dobimo tak $d$ med $y(t)$ in $y(t+h)$, da velja

$$f(x(t), y(t+h)) - f(x(t), y(t)) = \tfrac{\partial f}{\partial y}(x(t), d)(y(t+h) - y(t)).$$

Oglejmo si sedaj diferenčni količnik funkcije $g$:

$$\begin{aligned} \tfrac{g(t+h)-g(t)}{h} &= \tfrac{f(x(t+h),y(t+h))-f(x(t),y(t))}{h} = \\ = \tfrac{f(x(t+h),y(t+h))-f(x(t),y(t+h))}{h} &+ \tfrac{f(x(t),y(t+h))-f(x(t),y(t))}{h} = \\ = \tfrac{\partial f}{\partial x}(c, y(t+h))\tfrac{x(t+h)-x(t)}{h} &+ \tfrac{\partial f}{\partial y}(x(t), d)\tfrac{y(t+h)-y(t)}{h}. \end{aligned}$$

Ko pošljemo $h$ proti nič, gresta točki $(c, y(t+h))$ in $(x(t), d)$ proti $(x(t), y(t))$. Po predpostavki sta funkciji $\frac{\partial f}{\partial x}$ in $\frac{\partial f}{\partial y}$ zvezni v točki $(x(t), y(t))$, zato velja

$$\lim_{h \to 0} \tfrac{\partial f}{\partial x}(c, y(t+h)) = \tfrac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \quad \text{in} \quad \lim_{h \to 0} \tfrac{\partial f}{\partial y}(x(t), d) = \tfrac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)).$$

Diferenčni količniki $\frac{g(t+h)-g(t)}{h}$, $\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$ in $\frac{y(t+h)-y(t)}{h}$ seveda limitirajo proti $g'(t)$, $x'(t)$ in $y'(t)$. S tem je formula dokazana. □

**Primer.** Če je

$$f(x, y) = x^3 - 2xy^2, \quad x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t,$$

potem je odvod funkcije $g(t) = f(x(t), y(t))$ enak

$$\begin{aligned} g'(t) &= \tfrac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) = \\ &= (3x(t)^2 - 2y(t)^2)x'(t) + (-4x(t)y(t))y'(t) = \\ &= (3(\cos t)^2 - 2(\sin t)^2)(-\sin t) + (-4(\cos t)(\sin t))(\cos t) = \\ &= 2(\sin t)^3 - 7 \sin t \cos t. \end{aligned}$$

Seveda bi lahko najprej vstavili $x(t)$ in $y(t)$ v $f(x, y)$:

$$g(t) = (\cos t)^3 - 2(\cos t)(\sin t)^2$$

in šele nato odvajali. Spet bi dobili isti rezultat.

Kot primer uporabe posrednega odvajanja omenimo naslednjo trditev.

**Trditev. Če je tir vektorske funkcije $\mathbf{r}(t)$ vsebovan v grafu funkcije $f(x, y)$, potem je tudi vsaka njena tangenta vsebovana v tangentni ravnini funkcije $f(x, y)$ z istim dotikališčem.**

Dokaz: Ker je tir vektorske funkcije $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ vsebovan v grafu funkcije $z = f(x, y)$, mora veljati $z(t) = f(x(t), y(t))$. Njen odvod je po formuli za posredno odvajanje enak

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t) &= (x'(t), y'(t), z'(t)) = \\
&= (x'(t), y'(t), \tfrac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)).
\end{aligned}$$

Enačba tangente z dotikališčem v točki $\mathbf{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ je torej

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \mathbf{r}(t_0) + t\mathbf{r}'(t_0) = \\
&= \mathbf{r}(t_0) + tx'(t_0)(1, 0, \tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)) + ty'(t_0)(0, 1, \tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)).
\end{aligned}$$

Vemo tudi, da je enačba tangentne ravnine v točki $\mathbf{r}(t_0)$ enaka

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0) + t_1(1, 0, \tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)) + t_2(0, 1, \tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)).$$

Tangento dobimo, če vstavimo $t_1 = tx'(t_0)$ in $t_2 = ty'(t_0)$. Torej tangenta res leži v tangentni ravnini. $\square$

Pravimo, da je funkcija $y = g(x)$ **implicitno podana** z enačbo $f(x, y) = 0$, če za vsak $x \in D(g)$ velja $f(x, g(x)) = 0$. Če enačbo odvajamo in upoštevamo formulo za posredno odvajanje, dobimo

$$0 = f(x, g(x))' = \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))g'(x).$$

Odtod lahko izrazimo odvod funkcije $g$ s parcialnimi odvodi funkcije $f$:

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}.$$

Temu postopku pravimo **implicitno odvajanje**. V računu smo predpostavili, da je funkcija $f(x, y)$ zvezno parcialno odvedljiva v okolici točke $(x, f(x))$, da je funkcija $g(x)$ odvedljiva v točki $x$ in da velja $\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0$.

Pravo vrednost dobi implicitno odvajanje šele v kombinaciji z naslednjim tehničnim izrekom, ki nam zagotavlja obstoj in enoličnost take odvedljive funkcije $g(x)$, da velja $f(x, g(x)) = 0$.

**Izrek o implicitni funkciji. Če je funkcija $f(x, y)$ zvezno parcialno odvedljiva v okolici točke $(x_0, y_0)$ in velja $f(x_0, y_0) = 0$ ter $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, potem obstaja tak odprt interval $I$, ki vsebuje $x_0$ in na katerem je definirana natanko ena odvedljiva funkcija $y = g(x)$, ki zadošča pogojema $y_0 = g(x_0)$ in $f(x, g(x)) = 0$ za vsak $x \in I$.**

Oglejmo si, kako določimo enačbo tangente na implicitno podano funkcijo.

**Trditev. Če je funkcija $f(x,y)$ zvezno parcialno odvedljiva v okolici točke $(x_0,y_0)$ in če je vsaj eden od parcialnih odvodov $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ različen od nič, potem ima množica rešitev enačbe**

$$f(x,y)=0$$

**tangento z dotikališčem v točki $(x_0,y_0)$. Enačba te tangente je**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)=0.$$

Dokaz: Če je $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$, potem po izreku o implicitni funkciji obstaja taka odvedljiva funkcija $y=g(x)$, da velja $y_0=g(x_0)$ in $f(x,g(x))=0$ za vsak $x$ iz neke okolice $x_0$. Enačba tangente se potem glasi

$$y=g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0).$$

Če upoštevamo, da je

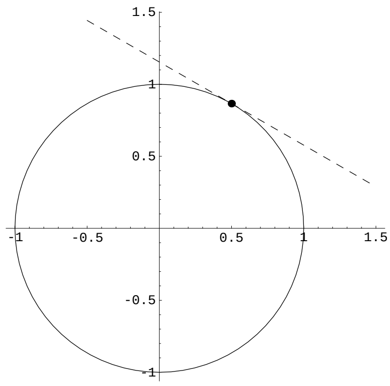
$$g'(x_0)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,g(x_0))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,g(x_0))}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)},$$

dobimo

$$y=y_0-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}(x-x_0).$$

Odtod takoj dobimo formulo v trditvi. V primeru $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0$ je dokaz podoben. V tem primeru lahko namreč $x$ izrazimo kot funkcijo $y$. □

**Primer.** Izračunajmo enačbo tangente na krivuljo $x^2+y^2=1$ v točki $(\sqrt[3]{4},\sqrt[3]{2})$.



Vzemimo

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1, \quad (x_0, y_0) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}).$$

Najprej preverimo, da točka res leži na krivulji, se pravi, da je $f(x_0, y_0) = 0$. Potem izračunamo oba parcialna odvoda v točki $(x_0, y_0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0 = \sqrt{3},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 2y_0 = 1.$$

Ko te podatke vstavimo v enačbo tangente, dobimo

$$\sqrt{3}(x - \frac{\sqrt{3}}{2}) + (y - \frac{1}{2}) = 0.$$

Ko uredimo, dobimo $\sqrt{3}x + y = 2$.

Točkam, ki zadoščajo $f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ pravimo **singularne točke** krivulje $f(x, y) = 0$. V njih tangenta bodisi ne obstaja bodisi ni enolično določena. Na primer $(0, 0)$ je singularna točka krivulje $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

## 13.7. Nivojski diagram

Za vsako funkcijo $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ in vsako število $c$ definirajmo

$$f^{-1}(c) = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : \ f(x_1, \dots, x_m) = c\}.$$

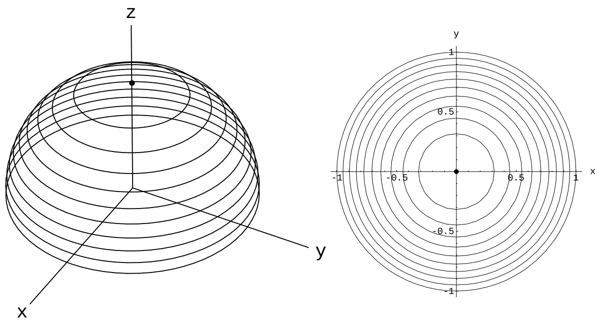
Tej množici pravimo **nivojnica** funkcije $f$, ki ustreza številu $c$. Ker so nivojnice podmožice v $D(f) \subseteq \mathbb{R}^m$, jih lahko narišemo samo v primeru, ko je $m \leq 3$.

**Nivojski diagram** funkcije $f$ dobimo tako, da izberemo nekaj števil $c_i$, $i = 1, 2, \dots$ (običajno tako, da so razmiki med njimi konstantni) in narišemo nivojnice funkcije $f$, ki ustrezajo tem številom. Nivojski diagram lahko narišemo tako za funkcije dveh kot tudi funkcije treh spremenljivk, graf pa samo za funkcije dveh spremenljivk. Če si graf funkcije dveh spremenljivk predstavljamo kot gorovje, potem so nivojnice te funkcije ravno njene izohipse, tj. točke z enako višino. Nivojnico funkcije, ki ustreza številu $c$ namreč dobimo tako, da graf funkcije sekamo z ravnino $z = c$ in rezultat projeciramo na $xy$ ravnino.

**Primer.** Narišimo nivojnice funkcije

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

ki ustrezajo številom $c_i = i/10$, $i = 0, \ldots, 10$. Na levi so narisane presečne krivulje grafa z ravninami $z = c_i$, na desni pa njihove projekcije na $xy$ ravnino, tj. nivojski diagram.




Nivojnice funkcij dveh spremenljivk konstruiramo s pomočjo implicitnega odvajanja.

**Primer.** Skicirajmo nivojnico

$$x^4 - x^2y^2 + y^4 = 1.$$

Predpostavimo, da je $y$ funkcija spremenljivke $x$, se pravi $y = y(x)$. Ko odvajamo obe strani enačbe $x^4 - x^2y^2 + y^4 = 1$, dobimo $4x^3 - 2x^2yy' - 2xy^2 + 4y^3y' = 0$. Odtod lahko izrazimo

$$y' = \frac{2x^3 - xy^2}{x^2y - 2y^3}.$$

Očitno je $x = 0$ ničla funkcije $y'$. Preostale ničle in pole dobimo tako, da pišemo $k = \frac{y}{x}$ in opazimo, da velja $y' = \frac{2-k^2}{k-2k^3}$. Ničli števca sta $k = \pm\sqrt{2}$, ničle imenovalca pa so $k = 0$ in $k = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Sedaj lahko poiščemo dotikališča vodoravnih in navpičnih tangent. V vodoravnih tangentah velja $y' = 0$. Njihova dotikališča dobimo tako, da premice $x = 0$ in $\frac{y}{x} = \pm\sqrt{2}$ sekamo z nivojnico. V navpičnih tangentah velja $y' = \pm\infty$. Njihova dotikališča dobimo tako, da premice $y = 0$ in

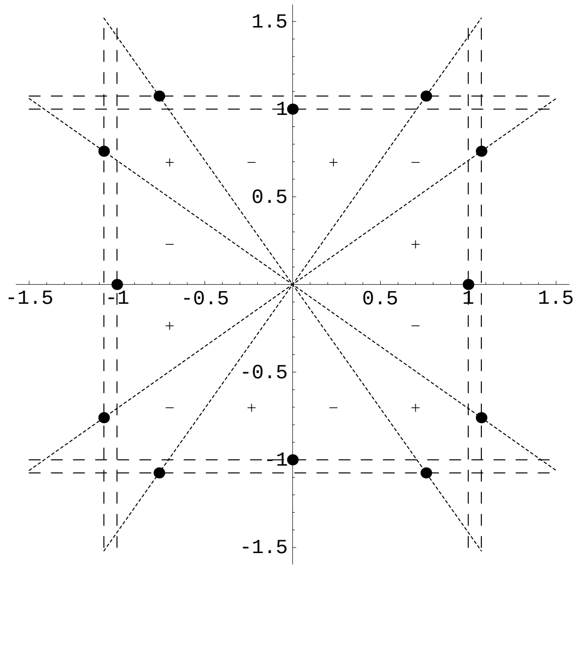
$\frac{y}{x} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ sekamo z nivojnico.

| premica | presečiča premice z nivojnico = dotikališča tangent | tangente |
|---|---|---|
| $x = 0$ | $(0, \pm 1)$ | $y = \pm 1$ |
| $y = 0$ | $(\pm 1, 0)$ | $x = \pm 1$ |
| $y = \pm\sqrt{2}x$ | $(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}) \approx (\pm 0.76, \pm 1.07)$ | $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}$ |
| $y = \pm\frac{x}{\sqrt{2}}$ | $(\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}) \approx (\pm 1.07, \pm 0.76)$ | $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}$ |

Na grafu so premice $x = 0$ in $y = kx$ narisano z pikicami, vodoravne in navpične tangente pa so narisane s črticami. Določimo sedaj še območja na katerih je nivojnica naraščajoča ($y' > 0$) oziroma padajoča ($y' < 0$). Očitno premice $x = 0$ in $y = kx$ razdelijo ravnino na območja, na katerih ima $y'$ konstanten predznak. Ker so vse ničle in vsi poli $y' = \frac{2-k^2}{k-2k^3}$ prve stopnje, se pri prehodu čez katerokoli premico $y = kx$ predznak $y'$ spremeni. Podrobnosti so v tabeli:

| $k$ | predznak $y'$ |
|---|---|
| $k < -\sqrt{2}$ | $-$ |
| $-\sqrt{2} < k < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $+$ |
| $-\frac{1}{\sqrt{2}} < k < 0$ | $-$ |
| $0 < k < \frac{1}{\sqrt{2}}$ | $+$ |
| $\frac{1}{\sqrt{2}} < k < \sqrt{2}$ | $-$ |
| $\sqrt{2} < k$ | $+$ |

Predstavimo sedaj trenutno znana dejstva s skico



Vemo, da mora nivojnica skozi odebeljene točke in da se mora pri tem dotikati črtkanih premic. Poleg tega vemo, da mora naraščati, če je v območju s +, oziroma padati, če je v območju z −. Ti podatki že zadoščajo za približno skico nivojnice. Za bolj natančno skico moramo izračunati še drugi odvod in določiti prevojne točke. Velja

$$y'' = \frac{(2x^3 - xy^2)'(x^2y - 2y^3) - (2x^3 - xy^2)(x^2y - 2y^3)'}{(x^2y - 2y^3)^2}.$$

Ko odvajamo in poenostavimo izraz, dobimo

$$y'' = \frac{(2x^4 - 11x^2y^2 + 2y^4)(y - xy')}{(x^2y - 2y^3)^2}.$$

Krajši račun pokaže, da je

$$y - xy' = \frac{-2(x^4 - x^2y^2 + y^4)}{x^2y - 2y^2} = \frac{-2}{x^2y - 2y^2},$$

kjer smo v zadnjem koraku upoštevali enačbo nivojnice. Torej je

$$y'' = \frac{-2(2x^4 - 11x^2y^2 + 2y^4)}{(x^2y - 2y^3)^3}.$$

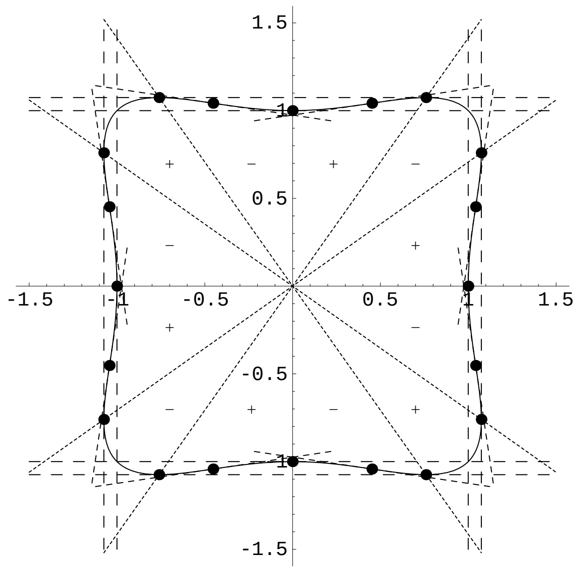
Ničle drugega odvoda so torej rešitve enačbe $2x^4 - 11x^2y^2 + 2y^4 = 0$, se pravi premice $\frac{y}{x} = \pm\frac{\sqrt{11\pm\sqrt{105}}}{2}$. Vsaka seka nivojnico v dveh točkah, torej imamo osem prevojnih točk. To so

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{11+\sqrt{105}}{2}\right)^{\frac{1}{4}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{11-\sqrt{105}}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\right) \approx (\pm 1.04, \pm 0.45),$$

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{11-\sqrt{105}}{2}\right)^{\frac{1}{4}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{11+\sqrt{105}}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\right) \approx (\pm 0.45, \pm 1.04).$$

Smerni koeficienti tangent v prevojnih točkah so $\pm k$ oziroma $\pm\frac{1}{k}$, kjer je

$$k = \frac{-3 + \sqrt{105}}{\sqrt{11 - \sqrt{105}}\,(-9 + \sqrt{105})} \approx 6.7.$$




## 13.8. Dvakratni integrali

Recimo, da je $f(x, y)$ pozitivna zvezna funkcija dveh spremenljivk, ki je definirana na pravokotniku $[a, b] \times [c, d]$. Radi bi izračunali prostornino območja pod njenim grafom, se pravi prostornino območja

$$D = \{(x, y, z)\colon\ a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Pomagamo si z metodo prerezov. Če območje $D$ prežemo z ravnino $x =$ konstanta, dobimo lik $\{(y, z)\colon\ c \leq y \leq d, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$. Njegova ploščina je $A(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$. Prostornina območja $D$ je potem

$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b (\int_c^d f(x, y)\, dy)\, dx.$$

Lahko bi območje $D$ prerezali tudi z ravnino $y =$ konstanta. Ploščina tega prereza je $B(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$. Za prostornino območja $D$ dobimo

$$V = \int_c^d B(y)\, dy = \int_c^d (\int_a^b f(x, y)\, dx)\, dy.$$

Ta račun je sicer geometrijsko nazoren, ni pa matematično povsem korekten, ker ne vemo natančno, kako je definirana prostornina. Če prostornino definiramo s pomočjo dvakratnega integrala, pa moramo pokazati, da v obeh primerih dobimo isti rezultat.

**Trditev. Če je $f$ zvezna funkcija dveh spremenljivk in $D(f) = [a,b] \times [c,d]$, potem sta funkciji $A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ in $B(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ zvezni ter velja**

$$\int_a^b A(x)\,dx = \int_c^d B(y)\,dy.$$

Dokaz: Ker je množica $D(f)$ zaprta in omejena in ker je funkcija $f$ zvezna je tudi enakomerno zvezna. To dokažemo podobno kot pri funkcijah ene spremenljivke. Vzemimo $\epsilon > 0$ in izberimo tak $\delta > 0$, da za poljubni točki $(x,y) \in D(f)$ in $(u,v) \in D(f)$, ki sta narazen za manj kot $\delta$, velja $|f(x,y) - f(u,v)| < \epsilon$.

Za poljubna $y, y_0$, ki zadoščata $|y - y_0| < \delta$, in za poljuben $x \in [a,b]$ sta točki $(x,y)$ in $(x,y_0)$ oddaljeni za manj kot $\delta$, zato je $|f(x,y) - f(x,y_0)| < \epsilon$, od koder sledi $|B(y) - B(y_0)| < \epsilon(b-a)$. Torej je funkcija $B(y)$ res zvezna. Podobno dokažemo zveznost funkcije $A(x)$. Odtod sledi, da integrala $\int_a^b A(x)\,dx$ in $\int_c^d B(y)\,dy$ res obstajata. Pokažimo še, da sta enaka.

Vzemimo take točke $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$ in take točke $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d$, da imajo vsi pravokotniki $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ diagonalo krajšo od $\delta$. Definirajmo

$$I = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

Potem velja

$$|\int_a^b A(x)\,dx - I| \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left( \int_{y_{j-1}}^{y_j} |f(x,y) - f(x_i,y_j)|\,dy \right) dx$$

$$\leq \epsilon \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \epsilon(b-a)(d-c).$$

Podobno dokažemo, da je

$$|\int_c^d B(y)\,dy - I| \leq \epsilon(b-a)(d-c).$$

Torej se integrala $\int_a^b A(x)\,dx$ in $\int_c^d B(y)\,dy$ razlikujeta za manj kot $2\epsilon(b-a)(d-c)$. Ker je $\epsilon$ poljuben, morata biti enaka. □

Če funkcija $f(x,y)$ ni zvezna, potem integrala $\int_a^b A(x)\,dx$ in $\int_c^d B(y)\,dy$ nista nujno enaka.

**Primer.** Vzemimo funkcijo

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Vzemimo še, da je $f(0,0) = 0$. Izraz na desni namreč ni smiselno definiran v točki $(0,0)$. Funkcija $f(x,y)$ ni zvezna v točki $(0,0)$, je pa zvezna v vseh ostalih točkah definicijskega območja. Velja

$$A(x) = \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy = \frac{y}{x^2+y^2}\Bigg|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{x^2+1}$$

in

$$\int_0^1 A(x)\,dx = \operatorname{arctg} x\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{4}.$$

Po drugi strani je

$$B(y) = \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx = -\frac{x}{x^2+y^2}\Bigg|_{x=0}^{x=1} = -\frac{1}{1+y^2}$$

in

$$\int_0^1 B(y)\,dy = -\operatorname{arctg} y\Bigg|_{y=0}^{y=1} = -\frac{\pi}{4}.$$

Torej je res

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right)dy \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Prostornino pod grafom funkcije $f(x,y)$ znamo izračunati tudi v primeru, ko $D(f)$ ni pravokotnik. Če je

$$D(f) = \{(x,y)\colon\ a \leq x \leq b,\ \phi(x) \leq y \leq \psi(y)\},$$

potem je prostornina pod grafom funkcije $f(x,y)$ enaka

$$\int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Podobno velja tudi v primeru, ko je

$$D(f) = \{x,y)\colon\ c \leq y \leq d,\ \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}.$$

Tedaj je prostornina pod grafom funkcije $f(x,y)$ enaka

$$\int_c^d \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx\right)dy.$$

V splošnem $D(f)$ razrežemo na območja prve in druge oblike in prostornine seštejemo.

## 13.9. Vprašanja za ponavljanje

(1) (Graf funkcije dveh spremenljivk)
   (a) Kako je definiran graf funkcije $f(x, y)$?
   (b) Kako konstruiramo graf funkcije $f(x, y)$ s pomočjo presekov z ravninami?
   (c) Kako iz grafa funkcije $f(x, y)$ dobimo njeno definicijsko območje?

(2) (Zveznost funkcij dveh spremenljivk)
   (a) Kako definiramo zveznost funkcije $f(x, y)$ v točki $(x_0, y_0)$?
   (b) Pokaži, da iz zveznosti funkcije $f(x, y)$ v točki $(x_0, y_0)$ sledi tudi zveznost funkcije $g(x) = f(x, y_0)$ v točki $x_0$ in zveznost funkcije $h(y) = f(x_0, y)$ v točki $y_0$!
   (c) S primerom pokaži, da obrat trditve iz točke (b) ne velja!

(3) (Parcialni odvodi, tangentna ravnina)
   (a) Kako sta definirana parcialna odvoda funkcije $f(x, y)$ v točki $(x_0, y_0)$?
   (b) Kako dobimo grafa funkcij $g(x) = f(x, y_0)$ in $h(y) = f(x_0, y)$ iz grafa funkcije $f(x, y)$?
   (c) Določi enačbo tangente na krivuljo $x \mapsto (x, y_0, f(x, y_0))$ v točki $(x_0, y_0, z_0)$ in enačbo tangente na krivuljo $y \mapsto (x_0, y, f(x_0, y))$ v točki $(x_0, y_0, z_0)$!
   (d) Določi enačbo tangentne ravnine na ploskev $z = f(x, y)$ v točki $(x_0, y_0, z_0)$!

(4) (Lokalni in globalni ekstremi funkcij dveh spremenljivk)
   (a) Povej definicijo lokalnega in definicijo globalnega ekstrema.
   (b) Formuliraj potrebni pogoj za lokalni ekstrem!
   (c) Formuliraj eksistenčni izrek za globalni ekstrem!
   (d) Na primeru pojasni, kako poiščemo globalne ekstreme!

(5) (Gladkost)
   (a) Kako je definirana gladkost funkcije $f(x, y)$ v točki $(x_0, y_0)$?
   (b) Pojasni definicijo gladkosti po geometrijsko?
   (c) Povej vsaj dva potrebna pogoja za gladkost!
   (d) Povej vsaj en zadosten pogoj za gladkost!

(6) (Dvakratni integrali)
   (a) Kako izračunamo prostornino pod grafom funkcije $f(x, y)$, če je $D(f)$ pravokotnik!
   (b) Kako izračunamo prostornino pod grafom funkcije $f(x, y)$, če je $D(f) = \{(x, y)\colon\ a \le x \le b,\ \phi(x) \le y \le \psi(y)\}$?
   (c) Kako izračunamo prostornino pod grafom funkcije $f(x, y)$, če je $D(f)$ bolj zapleteno območje?

(7) (Posredno in implicitno odvajanje)

(a) Kako posredno odvedemo funkcijo $g(t) = f(x(t), y(t))$?
(b) Kaj je implicitno podana funkcija?
(c) Kaj vemo o obstoju implicitno podanih funkcij?
(d) Kako izračunamo odvod implicitno podane funkcije?

(8) (Nivojnice)
(a) Kaj je nivojnica funkcije $f(x, y)$? Kako konstruiramo nivojski diagram funkcije $f(x, y)$?
(b) Kakšna je zveza med nivojskim diagramom in grafom funkcije $f(x, y)$?
(c) Kako izračunamo tangento na nivojnico funkcije $f(x, y)$?

# Del 6

# Diferencialne enačbe

POGLAVJE 14

# Diferencialne enačbe prvega reda

## 14.1. Osnovni pojmi

Enačbi v kateri nastopa neznana funkcija in njen odvod pravimo **diferencialna enačba prvega reda**. Najsplošnejša oblika diferencialne enačbe prvega reda je

$$F(x, y, y') = 0,$$

kjer je $F$ dana funkcija treh spremenljivk, $y = y(x)$ pa je neznana funkcija. Smiselno je zahtevati, da je definicijsko območje neznane funkcije odprt interval, sicer imamo težave z računanjem njenih odvodov.

Pogosto lahko iz $F(x, y, y') = 0$ izrazimo $y'$ kot funkcijo $x$ in $y$. V tem primeru pravimo, da smo diferencialno enačbo prevedli na **standardno obliko**.

**Primer.** Oglejmo si nekaj primerov diferencialnih enačb prvega reda:

- $y' = x^2$,
- $2xy' = 1 - y^2$,
- $y' = y - x^2$,
- $y = xy' + (y')^2$.

Prva in tretja sta že v standardni obliki, drugo in četrto pa zlahka prevedemo vanjo.

Praviloma rešitev diferencialne enačbe prvega reda ni enolično določena, ampak v njej nastopa neznana konstanta, se pravi

$$y = \Phi(x, C),$$

kjer je $\Phi$ dana funkcija dveh spremenljivk, $C$ pa neznana konstanta. Taki rešitvi pravimo **splošna rešitev** diferencialne enačbe.

**Primer.** Bralec naj preveri, da so splošne rešitve diferencialnih enačb prvega reda iz prejšnjega primera:

- $y = \frac{x^3}{3} + C$,
- $y = \frac{x+C}{x-C}$,
- $y = x^2 + 2x + 2 + Ce^x$,

- $y = Cx + C^2$.

Splošno rešitev zelo pogosto obstaja, zelo redko pa jo znamo eksplicitno izračunati in še takrat sploh ni nujno, da dobimo elementarno funkcijo.

Konkretne rešitve diferencialne enačbe lahko dobimo tako, da v splošni rešitvi neznano konstanto zamenjamo s konkretnimi vrednostmi. Včasih pa obstajajo tudi rešitve, ki se ne dajo dobiti na tak način, pravimo jim **singularne rešitve**.

**Primer.** Funkcija $y = -\frac{x^2}{4}$ je rešitev enačbe $y = xy' + (y')^2$, ki ni poseben primer splošne rešitve $y = Cx + C^2$. Zato je ta funkcija singularna rešitev enačbe.

Zastavimo si sedaj obratno nalogo od iskanja splošne rešitve dane diferencialne enačbe. Za dano funkcijo $\Phi$ dveh spremenljivk se vprašamo ali je

$$y = \Phi(x, C)$$

splošna rešitev kake diferencialne enačbe. Načelno je odgovor da. Enačbo odvajamo po $x$, da dobimo

$$y' = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, C),$$

nato pa iz te in prejšnje enačbe izločimo $C$. Dobimo zvezo med $x$, $y$ in $y'$, ki ne vsebuje $C$, to je ravno iskana diferencialna enačba.

**Primer.** Poiščimo diferencialno enačbo, katere splošna rešitev je

$$y = \log(x + C).$$

Po odvajanju dobimo

$$y' = \frac{1}{x + C},$$

odkoder izrazimo $C$

$$C = \frac{1}{y'} - x.$$

Ko vstavimo to v prvotno enačbo, dobimo

$$y = \log(x + C) = \log \frac{1}{y'} = -\log y'.$$

Na koncu še preoblikujemo v standardno obliko:

$$y' = e^{-y}.$$

## 14.2. Geometrijski pomen diferencialne enačbe

Če gre rešitev $y = y(x)$ diferencialne enačbe

$$y' = f(x, y)$$

skozi točko $(a, b)$, ima v tej točki naklon $\phi$, kjer je

$$\operatorname{tg}\phi = y'(a) = f(a, y(a)) = f(a, b).$$

To opažanje nam pomaga približno konstruirati rešitev dane diferencialne enačbe. Skozi "vsako" točko $(a, b) \in D(f)$ narišemo kratko črtico z naklonom $\operatorname{arctg} f(a, b)$, pravimo ji **smernica**. Če smernice povežemo v krivulje, dobimo ravno rešitve dane diferencialne enačbe. Opišimo ta postopek bolj sistematično.

(1) Izberimo nekaj realnih števil $c_1, \ldots, c_n$ (čimveč) in narišimo krivulje

$$f(x, y) = c_1, \ldots, f(x, y) = c_n.$$

Dobimo ravno nivojski diagram funkcije $f$.

(2) Za vsak $i = 1, \ldots, n$ izberimo večje število točk na krivulji $f(x, y) = c_i$ in skoznje narišimo kratke črtice z naklonom $\phi_i = \operatorname{arctg} c_i$. Dobimo **polje smernic** dane diferencialne enačbe.

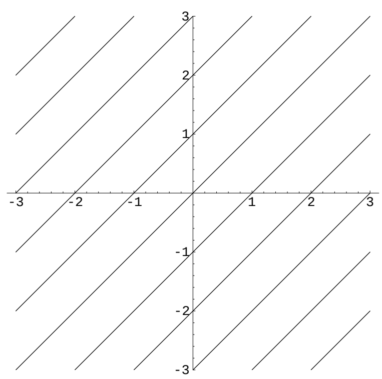
(3) Konstruiramo krivulje, ki imajo smernice iz točke (2) za svoje tangente. Na ta način lahko dobimo vse rešitve dane diferencialne enačbe.

Oglejmo si preprost primer.

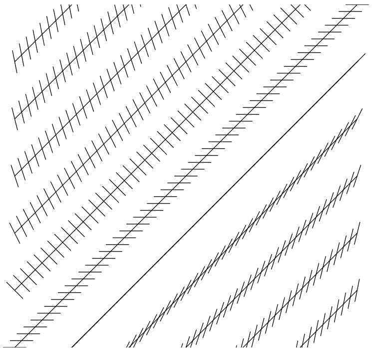
**Primer.** Skicirajmo množico rešitev diferencialne enačbe

$$y' = x - y.$$

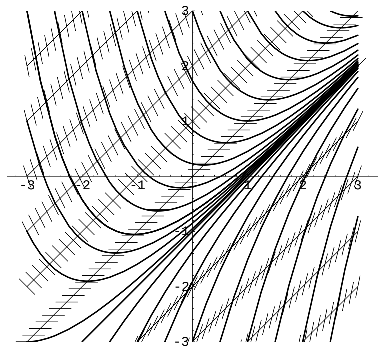
Najprej narišemo nivojski diagram funkcije $f(x, y) = x - y$. Izberemo si konstante $c_i = i$ za $i = -5, \ldots, 5$ in narišemo krivulje $f(x, y) = c_i$.




Nato narišemo polje smernic. Vsako od krivulj $f(x, y) = c_i$ opremimo s črticami z naklonom $\phi = \operatorname{arctg} c_i$.



Smernice na premici $x - y = 1$ se ne vidijo, ker imajo isti naklon kot premica, to je $45°$. Rešitve diferencialne enačbe dobimo tako, da skiciramo krivulje, ki imajo dane smernice za svoje tangente.

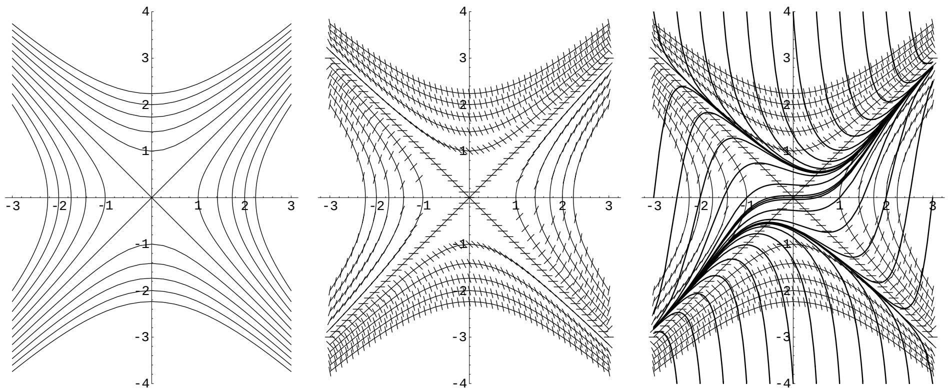



Oglejmo si težji primer.

**Primer.** Skicirajmo množico rešitev diferencialne enačbe

$$y' = x^2 - y^2.$$

Najprej narišemo nivojski diagram in polje smernic, nato pa še skiciramo krivulje, katerih tangente so dane smernice.



Diferencialno enačbo iz prvega primera bomo kasneje znali eksplicitno rešiti, diferencialno enačbo iz drugega primera pa ne.

## 14.3. Eulerjeva metoda

V tem razdelku si bomo ogledali še eno metodo za približno iskanje rešitev diferencialne enačbe. Za razliko od metode smernic, ki smo jo spoznali v prejšnjem razdelku, je ta metoda primerna za uporabo na računalniku.

Iščemo tisto rešitev $y = \omega(x)$ diferencialne enačbe

$$y' = f(x, y),$$

ki gre skozi dano točko $(x_0, y_0)$. Najprej si izberemo dolžino koraka $h$ in maksimalno število korakov $N$. Za vsak $i = -N, \ldots, N$ bomo izračunali približek $y_i$ za vrednost funkcije $\omega$ v točki $x_i = x_0 + ih$. Ko bomo točke $(x_i, y_i)$ povezali z lomljenko, bomo dobili približek za graf funkcije $\omega$.

Če je $h$ majhen, potem se na intervalu $[x_0, x_0+h]$ rešitev $\omega$ približno ujema s svojo tangento v $(x_0, y_0)$. Torej je

$$\omega(x_1) = \omega(x_0 + h) \approx \omega(x_0) + \omega'(x_0)h = y_0 + f(x_0, y_0)h.$$

Označimo $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h$. Če $(x_1, y_1)$ ne leži v $D(f)$, potem nehamo, sicer pa označimo z $\omega_1$ tisto rešitev diferencialne enačbe, ki gre skozi točko $(x_1, y_1)$. Rešitev $\omega_1$ se zelo malo razlikuje od rešitve $\omega$, zelo malo pa se razlikuje tudi od svoje tangente v točki $(x_1, y_1)$, zato je

$$\omega(x_2) \approx \omega_1(x_2) = \omega_1(x_1 + h) \approx \omega_1(x_1) + \omega_1'(x_1)h = y_1 + f(x_1, y_1)h.$$

Označimo $y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h$. Če $(x_2, y_2) \notin D(f)$, potem nehamo, sicer pa označimo z $\omega_2$ rešitev, ki gre skozi točko $(x_2, y_2)$. Kot zgoraj velja

$$\omega(x_3) \approx \omega_2(x_3) = \omega_2(x_2 + h) \approx \omega_2(x_2) + \omega_2'(x_2)h = y_2 + f(x_2, y_2)h.$$

Spet označimo $y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)h$. Ta postopek ponavljamo, dokler ne pridemo do $y_N$ oziroma ne pademo ven iz $D(f)$. S tem smo konstruirali tisti del lomljenke, ki leži desno od $(x_0, y_0)$. Podobno dobimo tudi tisti del lomljenke, ki leži levo od $(x_0, y_0)$. Na kratko:

| |
|---|
| Začetni podatki: $x_0$, $y_0$, $h$, $N$, $f(x,y)$.<br>Desni del lomljenke: za vsak $i = 1, \ldots, N$ izračunaj $x_i = x_{i-1} + h$, $y_i = y_{i-1} + f(x_{i-1}, y_{i-1})h$ in preveri ali $(x_i, y_i)$ pripada $D(f)$. Če pripada, potem nariši daljico med $(x_i, y_i)$ in $(x_{i-1}, y_{i-1})$, sicer pa končaj.<br>Levi del lomljenke: za vsak $i = -1, \ldots, -N$ izračunaj $x_i = x_{i+1} - h$, $y_i = y_{i+1} - f(x_{i+1}, y_{i+1})h$ in preveri ali $(x_i, y_i)$ pripada $D(f)$. Če pripada, potem nariši daljico med $(x_i, y_i)$ in $(x_{i+1}, y_{i+1})$, sicer pa končaj. |

Preizkusimo to metodo na primeru.

**Primer.** Naj bo $\omega$ tista rešitev diferencialne enačbe

$$y' = x - y,$$

ki gre skozi točko $(0, 0)$. Poiščimo približek za $\omega$ na intervalu $[-1, 1]$ s štirimi koraki Eulerjeve metode.

Uporabimo gornji algoritem z $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $N = 4$, $h = \frac{1}{4}$, $f(x, y) = x - y$. Za desni del lomljenke dobimo

$$\begin{array}{ll}
x_1 = x_0 + h = \frac{1}{4} = 0.25 & y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h = 0 \\
x_2 = x_1 + h = \frac{1}{2} = 0.5 & y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h = \frac{1}{16} \approx 0.06 \\
x_3 = x_2 + h = \frac{3}{4} = 0.75 & y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)h = \frac{11}{64} \approx 0.17 \\
x_4 = x_3 + h = 1 & y_4 = y_3 + f(x_3, y_3)h = \frac{81}{256} \approx 0.32
\end{array}$$

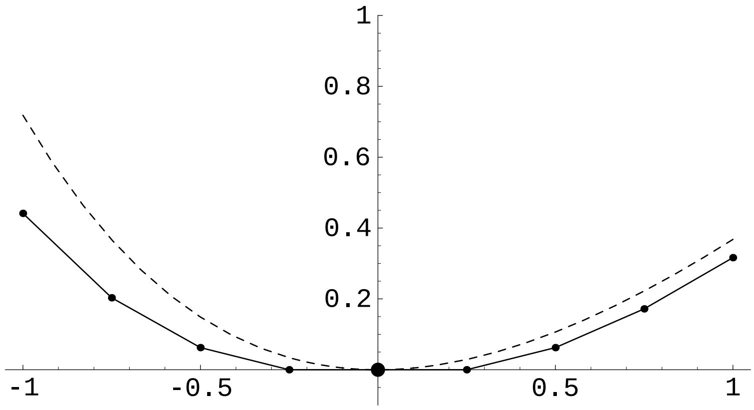
za levega pa

$$\begin{array}{ll}
x_{-1} = x_0 - h = -\frac{1}{4} = -0.25 & y_{-1} = y_0 - f(x_0, y_0)h = 0 \\
x_{-2} = x_{-1} - h = -\frac{1}{2} = -0.5 & y_{-2} = y_{-1} - f(x_{-1}, y_{-1})h = \frac{1}{16} \approx 0.06 \\
x_{-3} = x_{-2} - h = -\frac{3}{4} = -0.75 & y_{-3} = y_{-2} - f(x_{-2}, y_{-2})h = \frac{13}{64} \approx 0.20 \\
x_{-4} = x_{-3} - h = -1 & y_{-4} = y_{-3} - f(x_{-3}, y_{-3})h = \frac{113}{256} \approx 0.44
\end{array}$$

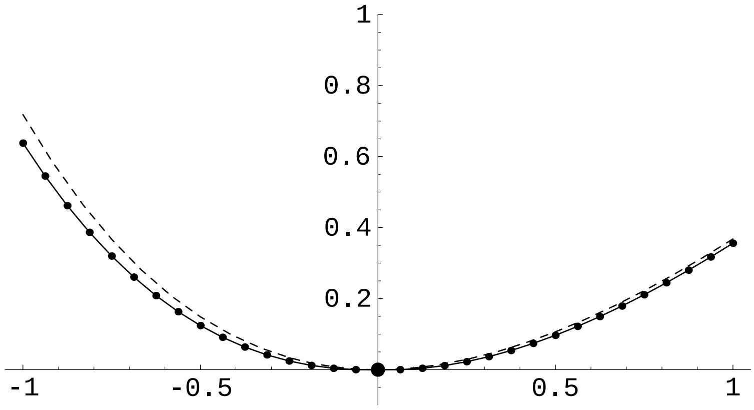
Iskani približek za $\omega$ dobimo tako, da točke

$$(x_{-4}, y_{-4}), \ldots, (x_4, y_4)$$

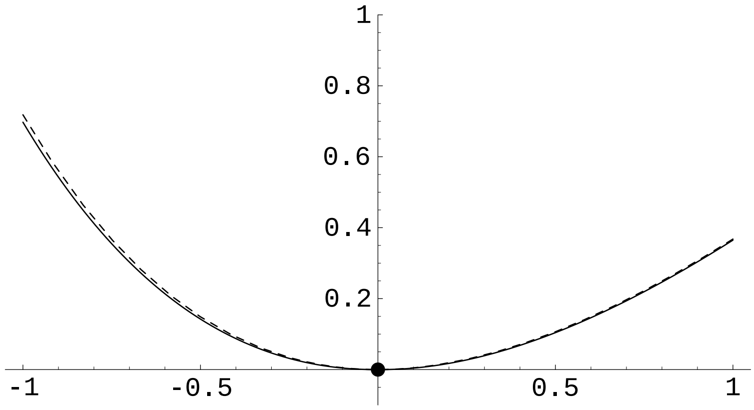
povežemo z lomljenko. Za primerjavo narišimo še točno vrednost za $\omega$. Slika nas nekoliko razočara, saj se približek (polna črta) bolj slabo ujema s točno vrednostjo (črtkano).




Za konec pripomnimo, da približek lahko izboljšamo, če povečamo število korakov. Za $N = 16, h = \frac{1}{16}$ dobimo




za $N = 256, h = \frac{1}{256}$ pa približek že skoraj sovpada s točno vrednostjo:




Točk $(x_i, y_i)$ tokrat nismo poudarili, ker jih je preveč.

## 14.4. Diferencialne enačbe z ločljivimi spremenljivkami

Kot smo že omenili, znamo diferencialno enačbo $y' = f(x, y)$ točno rešiti samo za zelo posebne funkcije $f(x, y)$. En tip funkcij, pri katerem nam to uspe, si bomo ogledali v tem razdelku, enega pa še v naslednjem.

Pravimo, da ima funkcija $f(x, y)$ **ločljive spremenljivke**, če obstajata taki funkciji $g(x)$ in $h(x)$, da velja

$$f(x, y) = g(x)h(y).$$

V tem primeru znamo poiskati točno rešitev diferencialne enačbe

$$y' = f(x, y).$$

Najprej zamenjamo $y'$ z $\frac{dy}{dx}$ in razcepimo $f(x, y)$. Dobimo

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y).$$

Nato pomnožimo enačbo z $\frac{dx}{h(y)}$. Dobimo

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)\ dx.$$

Na koncu obe strani še integriramo. Če je

$$\int \frac{dy}{h(y)} = H(y) + C_2 \quad \text{in} \quad \int g(x)\ dx = G(x) + C_1,$$

potem je rešitev diferencialne enačbe podana z enačbo

$$H(y) = G(x) + C,$$

kjer je $C$ neznana konstanta. Odtod moramo še izraziti $y$ kot funkcijo $x$.

**Primer.** Poiščimo splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y' = 2xy^2.$$

Ker ima desna stran ločljive spremenljivke, lahko uporabimo gornjo metodo. Najprej zamenjamo $y'$ z $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2.$$

Ko pomnožimo z $\frac{dx}{y^2}$, dobimo

$$\frac{dy}{y^2} = 2x\ dx.$$

Po integraciji dobimo

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C.$$

Splošno rešitev dobimo tako, da izrazimo $y$:

$$y = -\frac{1}{x^2 + C}.$$

Na koncu opozorimo bralca, da je tudi $y = 0$ rešitev. Ker ta rešitev ni poseben primer splošne rešitve, je to singularna rešitev.

Kot primer uporabe si oglejmo problem ohlajanja telesa v fiziki.

**Primer.** Skodelica čaja ima na začetku temperaturo $T_1$. Zanima nas, kako hitro se njena temperatura približuje sobni temperaturi $T_0$. Čaj vseskozi mešamo, tako da njegova temperatura $T$ ni odvisna od tega, v katerem delu skodelice merimo, ampak je odvisna samo od časa $t$.

Izkaže se, da je hitrost spreminjanja temperature sorazmerna razliki med zunanjo in notranjo temperaturo, se pravi

$$\frac{dT}{dt} = \alpha(T_0 - T),$$

pri čemer je $\alpha$ fizikalna konstanta. Odtod sledi, da je $\frac{dT}{T_0 - T} = \alpha\ dt$. Ko integriramo, dobimo $-\ln(T - T_0) = \alpha t + C$. Odtod lahko izrazimo $T$:

$$T = T_0 + e^{-\alpha t - C}.$$

Konstanto $C$ določimo iz pogoja, da je v trenutku $t = 0$ temperatura enaka $T_1$:

$$T_1 = T(0) = T_0 + e^{-C}.$$

Dobimo $e^{-C} = T_1 - T_0$. Ko to vstavimo v formulo za $T$, dobimo

$$T = T_0 + (T_1 - T_0)e^{-\alpha t}.$$

Bralec naj preveri, da je res $T(0) = T_1$ in $\lim_{t\to\infty} T(t) = T_0$.

V naslednjem primeru bomo izpeljali zakon naravne rasti.

**Primer.** V petrijevki je na začetku $N_0$ bakterij, nato pa se te začnejo razmnoževati. Dokler je na voljo dovolj hrane in prostora, je hitrost povečevanja bakterij sorazmerna številu že obstoječih bakterij, se pravi

$$\frac{dN}{dt} = kN,$$

kjer je $k$ konstanta. Odtod sledi, da je $\frac{dN}{N} = k\ dt$. Ko integriramo, dobimo $\ln N = kt + C$, odkoder izrazimo

$$N = e^{kt+C}.$$

Konstanto $C$ določimo iz pogoja $N(0) = N_0$. Dobimo

$$N_0 = N(0) = e^C.$$

Ko to vstavimo v formulo za $N$, dobimo

$$N = N_0 e^{kt}.$$

Število mikroorganizmov torej eksponentno narašča. Izračunajmo čas $t_0$, v katerem se število mikroorganizmov podvoji. Iz $N(t+t_0) = 2N(t)$ dobimo $e^{kt_0} = 2$, odtod pa

$$t_0 = \frac{\ln 2}{k}.$$

Kadar je količina hrane ali prostora omejena, se mikroorganizmi razmnožujejo po zakonu

$$\frac{dN}{dt} = kN(N_{\max} - N),$$

kjer je $N_{\max}$ maksimalno število mikroorganizmov, ki jih lahko preživi. Odtod sledi $\frac{dN}{N(N_{\max}-N)} = k\ dt$. Integriramo tako, da izraz na desni razcepimo na parcialne ulomke. Dobimo $\frac{1}{N_{\max}}(\ln N - \ln(N_{\max} - N)) = kt + C$. Ko pomnožimo z $N_{\max}$ in na obeh straneh uporabimo eksponentno funkcijo, dobimo $\frac{N}{N_{\max}-N} = e^{N_{\max}(kt+C)}$. Odtod lahko izrazimo

$$N = \frac{N_{\max} e^{N_{\max}(kt+C)}}{1 + e^{N_{\max}(kt+C)}} = \frac{N_{\max}}{e^{-N_{\max}(kt+C)} + 1}.$$

Konstanto $C$ dobimo iz pogoja $N(0) = N_0$. Odtod sledi $N_0 = \frac{N_{\max}}{e^{-N_{\max}C}+1}$, torej je

$$e^{-N_{\max}C} = \frac{N_{\max}}{N_0} - 1.$$

Ko to vstavimo v formulo za $N$, dobimo

$$N = \frac{N_{\max}}{e^{-N_{\max}kt}\left(\frac{N_{\max}}{N_0} - 1\right) + 1}.$$

Tej funkciji pravimo **logistična krivulja**.

## 14.5. Linearna diferencialna enačba prvega reda

Kadar je funkcija $f(x, y)$ oblike

$$f(x, y) = p(x)y + q(x),$$

kjer $p(x)$ ni ničelna funkcija, rečemo, da je

$$y' = f(x, y)$$

**linearna** diferencialna enačba prvega reda. Če je $q(x)$ ničelna funkcija, pravimo, da je ta diferencialna enačba **homogena**, sicer pa, da je **nehomogena**.

**Primer.** Oglejmo si diferencialne enačbe prvega reda

(1) $y' = (\operatorname{tg} x)y + \sin x$,
(2) $y' = x - y$,
(3) $y' = (1 + x)y$,
(4) $y' = xy^2$.

Prve tri so linearne, zadnja pa ne. Prvi dve linearni enačbi sta nehomogeni, tretja pa je homogena.

Homogena linearna diferencialna enačba

$$y' = p(x)y$$

je primer diferencialne enačbe z ločljivimi spremenljivkami in jo torej že znamo rešiti. Krajši račun pokaže, da za splošno rešitev dobimo

$$y = Ce^{\int p(x)\ dx},$$

kjer je $C$ poljubna konstanta. Pri nedoločenem integralu ne pišemo konstante, ker je ta že vključena v konstanto $C$.

Nehomogeno linearno diferencialno enačbo

$$y' = p(x)y + q(x)$$

rešujemo z nastavkom

$$y = C(x)e^{\int p(x)\ dx},$$

kjer je $C(x)$ neznana funkcija. Odvod nastavka je

$$\begin{aligned} y' &= C'(x)e^{\int p(x)\ dx} + C(x)\big(e^{\int p(x)\ dx}\big)' \\ &= C'(x)e^{\int p(x)\ dx} + C(x)e^{\int p(x)\ dx}p(x). \end{aligned}$$

Ko ta $y$ in $y'$ vstavimo v prvotno enačbo, dobimo

$$C'(x)e^{\int p(x)\ dx} + C(x)e^{\int p(x)\ dx}p(x) = p(x)C(x)e^{\int p(x)\ dx} + q(x).$$

En člen na levi in en člen na desni se pokrajšata. Ostane

$$C'(x)e^{\int p(x)\ dx} = q(x).$$

Odtod izrazimo

$$C'(x) = q(x)e^{-\int p(x)\ dx},$$

torej je

$$C(x) = \int q(x)e^{-\int p(x)\ dx}\ dx + C.$$

Splošna rešitev nehomogene diferencialne enačbe je torej oblike

$$y(x) = y_p(x) + Cy_h(x),$$

kjer je

$$y_h(x) = e^{\int p(x)\ dx}$$

ena od rešitev homogene enačbe in

$$y_p(x) = \int q(x) e^{-\int p(x)\ dx}\ dx \cdot e^{\int p(x)\ dx} = \int \frac{q(x)}{y_h(x)} dx \cdot y_h(x)$$

ena od rešitev nehomogene enačbe.

**Primer.** Poiščimo splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y' = x - y.$$

Najprej opazimo, da je to res linearna diferencialna enačba s $p(x) = -1$ in $q(x) = x$. Poiščimo eno od rešitev homogene enačbe $y' = -y$:

$$y_h(x) = e^{\int p(x)\ dx} = e^{\int (-1)\ dx} = e^{-x}.$$

Zdaj poiščemo še eno od rešitev nehomogene enačbe:

$$y_p(x) = \int \frac{q(x)}{y_h(x)} dx \cdot y_h(x) = \int x e^x\ dx \cdot e^{-x} = (x-1)e^x \cdot e^{-x} = x - 1.$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je torej

$$y(x) = y_p(x) + C y_h(x) = x - 1 + C e^{-x}.$$

Oglejmo si še primer uporabe linearnih diferencialnih enačb v fiziki.

**Primer.** Žogo spustimo, da prosto pada. Zanima nas, kako se spreminja hitrost žoge, če upoštevamo tudi upor zraka. Na žogo torej delujeta sila teže $F_g$ in sila upora zraka $F_u$. Po drugem Newtnovem zakonu je

$$F_g + F_u = ma,$$

kjer je $a$ pospešek žoge in $m$ masa žoge. Upoštevajmo, da je

$$a = \frac{dv}{dt},$$

kjer je $v$ hitrost žoge,

$$F_g = mg,$$

kjer je $g$ težnostni pospešek ter

$$F_u = -kv,$$

kjer je $k$ konstanta, ki je odvisna od velikosti in aerodinamičnih lastnosti žoge. Negativni predznak nas opozarja na to, da sila upora deluje v nasprotni smeri kot sila težnosti. Hitrost žoge torej zadošča diferencialni enačbi

$$mg - kv = m\frac{dv}{dt}$$

in začetnemu pogoju $v(0) = 0$. Ko enačbo delimo z $m$, dobimo

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} v + g.$$

Splošna rešitev te enačbe je

$$v(t) = v_p(t) + Cv_h(t),$$

kjer je

$$v_h(t) = e^{\int (-k/m)\ dt} = e^{-kt/m}$$

ena od rešitev homogene enačbe in

$$v_p(t) = \int \frac{g}{v_h(t)}\ dt \cdot v_h(t) = \int ge^{kt/m}\ dt \cdot e^{-kt/m} = \frac{gm}{k}$$

ena od rešitev nehomogene enačbe. Konstanto $C$ določimo iz

$$0 = v(0) = v_p(0) + Cv_h(0) = \frac{gm}{k} + C.$$

Velja torej $C = -\frac{gm}{k}$. Končna formula za hitrost žoge je tako

$$v(t) = v_p(t) + Cv_h(t) = \frac{gm}{k} + (-\frac{gm}{k})e^{-kt/m} = \frac{gm}{k}(1 - e^{-kt/m}).$$

Odtod sledi, da se hitrost žoge hitro približa maksimalni hitrosti

$$v_{\max} = \frac{gm}{k}.$$

Če torej hkrati spustimo dve žogi enake velikosti in oblike, bo tista z večjo maso padala z večjo hitrostjo.

Kadar ni prisoten upor zraka, velja

$$v = gt,$$

torej hitrost žoge ni navzgor omejena, pa tudi od mase ni odvisna.

## 14.6. Vprašanja za ponavljanje

(1) (Rešitev diferencialne enačbe)
- (a) Kaj je diferencialna enačba prvega reda? Kaj je njena standardna oblika?
- (b) Kaj je splošna rešitev diferencialne enačbe prvega reda?
- (c) Kaj je singularna rešitev diferencialne enačbe prvega reda?

(2) (Geometrijski pomen diferencialne enačbe prvega reda)
Rešujemo začetni problem

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

- (a) Kako rešitev približno določimo z metodo smernic?
- (b) Uporabi metodo smernic na primeru!
- (c) Kako rešitev približno določimo z Eulerjevo metodo?
- (d) Uporabi Eulerjevo metodo na primeru!

(3) (Ločljive spremenljivke)

   (a) Kdaj pravimo, da ima diferencialna enačba prvega reda ločljive spremenljivke?
   (b) Kako rešimo diferencialno enačbo prvega reda z ločljivimi spremenljivkami?
   (c) Uporabi metodo iz točke (b) na primeru!

(4) (Zakon naravne rasti in logistična krivulja) Naj bo $N(t)$ število mikroorganizmov v trenutku $t$.
   (a) Kateri diferencialni enačbi zadošča funkcija $N$, kadar hrana in prostor nista omejena?
   (b) Poišči tisto rešitev diferencialne enačbe iz (a), ki zadošča pogoju $N(0) = N_0$!
   (c) Kateri diferencialni enačbi zadošča funkcija $N$, kadar sta hrana in prostor omejena?
   (d) Poišči tisto rešitev diferencialne enačbe iz (c), ki zadošča pogoju $N(0) = N_0$!

(5) (Linearna diferencialna enačba prvega reda) Naj bosta $p(x)$ in $q(x)$ dani funkciji ene spremenljivke.
   (a) Kako poiščemo splošno rešitev diferencialne enačbe $y' = p(x)y$?
   (b) Kako poiščemo eno od rešitev diferencialne enačbe $y' = p(x)y + q(x)$?
   (c) Kako poiščemo splošno rešitev diferencialne enačbe $y' = p(x)y + q(x)$?

(6) (Prosti pad z uporom zraka)
   (a) Kako se spreminja hitrost padajoče žoge, kadar ni upora zraka?
   (b) Kako se spreminja hitrost padajoče žoge, če upoštevamo upor zraka?
   (c) Izpelji formulo za največjo hitrost padajoče žoge z upoštevanjem upora zraka!

POGLAVJE 15

# Diferencialne enačbe drugega reda

## 15.1. Osnovni pojmi

Enačbi v kateri nastopa neznana funkcija ter njen prvi in drugi odvod pravimo **diferencialna enačba drugega reda**. Najsplošnejša oblika diferencialne enačbe drugega reda je

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

kjer je $F$ dana funkcija štirih spremenljivk, $y = y(x)$ pa neznana funkcija, ki jo iščemo. Pogosto jo lahko prevedemo v **standardno obliko**

$$y'' = f(x, y, y').$$

Rešitev diferencialne enačbe drugega reda običajno ni enolično določena, ampak lahko v njej nastopata še dve neznani konstanti. Taki rešitvi pravimo **splošna rešitev**.

**Primer.** Oglejmo si nekaj diferencialnih enačb drugega reda in njihovih splošnih rešitev:

- enačba $y'' + y = 0$ ima splošno rešitev $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$,
- enačba $2x(y')^2 = y(2y' + xy'')$ ima splošno rešitev $y = \frac{C_1 x}{C_2 + x}$,
- enačba $(y')^2 = yy''$ ima splošno rešitev $y = C_1 e^{C_2 x}$.

Splošno rešitev znamo najti samo v zelo posebnih primerih. Ogledali si bomo dva najpreprostejša:

- $y'' = g(y')h(y)$, kjer sta $g$ in $h$ dani funkciji,
- $y'' = py' + qy + r(x)$, kjer sta $p, q$ dani konstanti, $r(x)$ pa dana funkcija.

Z drugim primerom se bomo ukvarjali v kasnejših razdelkih, sedaj pa se posvetimo prvemu. Diferencialno enačbo oblike

$$y'' = g(y')h(y)$$

rešujemo z nastavkom

$$y' = z(y),$$

kjer je $z$ neznana funkcija. Če nastavek posredno odvajamo, dobimo

$$y'' = z'(y)y' = z'(y)z(y).$$

Ko formuli za $y'$ in $y''$ vstavimo v prvotno enačbo, dobimo

$$z'(y)z(y) = g(z(y))h(y).$$

Ta diferencialna enačba ima ločljive spremenljivke, torej jo načeloma znamo rešiti. Ko zamenjamo $z(y)$ z $z$ in $z'(y)$ z $\frac{dz}{dy}$, dobimo $z\frac{dz}{dy} = g(z)h(y)$. Odtod sledi, da je $\frac{z\,dz}{g(z)} = h(y)\,dy$. Ko obe strani integriramo, dobimo izraz oblike $G(y) + C_1 = H(z)$. Odtod izrazimo $z$ kot funkcijo $y$ in $C_1$:

$$z = z(y, C_1).$$

Sedaj rešimo še diferencialno enačbo

$$y' = z(y, C_1).$$

Tudi ta ima ločljive spremenljivke. Lahko jo zapišemo kot $\frac{dy}{z(y,C_1)} = dx$ in integriramo. Dobimo

$$x = \int \frac{dy}{z(y, C_1)} + C_2,$$

odkoder potem izrazimo $y$ kot funkcijo $x$, $C_1$ in $C_2$:

$$y = y(x, C_1, C_2).$$

To je splošna rešitev naše diferencialne enačbe.

**Primer.** Poiščimo splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y'' = 2(y')^3 y.$$

Ko vstavimo $y' = z$ in $y'' = z\frac{dz}{dy}$, dobimo $z\frac{dz}{dy} = 2z^3 y$. Po ločitvi spremenljivk dobimo $\frac{dz}{z^2} = 2y\,dy$. Nato integriramo in dobimo $-\frac{1}{z} = y^2 + C_1$. Odtod sledi

$$x = \int \frac{dy}{z} + C_2 = -\int (y^2 + C_1)\ dy + C_2 = -\frac{y^3}{3} - C_1 y + C_2.$$

Odtod lahko izrazimo $y$ tako, da rešimo kubično enačbo.

## 15.2. Začetna naloga

Konstant v splošni rešitvi diferencialne enačbe

$$y'' = f(x, y, y')$$

se znebimo tako, da dodamo dve zahtevi, ki jima mora zadoščati rešitev. Pogosto sta ti dve zahtevi oblike

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{in} \quad y'(x_0) = z_0,$$

kjer so števila $x_0, y_0, z_0$ podana. Tema dvema zahtevama pravimo **začetna pogoja**, iskanju rešitve, ki jim zadošča, pa **začetna naloga**.

Fizikalni smisel začetnih pogojev je naslednji. Če je $y(x)$ lega delca v trenutku $x$, potem pogoj $y(x_0) = y_0$ podaja lego delca v trenutku $x = x_0$, $y'(x_0)$ pa hitrost delca v trenutku $x = x_0$. Običajno je $x_0$ začetni trenutek, odtod ime začetna pogoja.

**Primer.** Reši začetno nalogo

$$y'' = -y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Če v splošno rešitev $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ vstavimo $x = 0$, dobimo $0 = y(0) = C_1$, če pa najprej odvajamo $y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$ in nato vstavimo $x = 0$, dobimo $1 = y'(0) = C_2$. Rešitev začetne naloge je torej

$$y = \sin x.$$

Kadar ne poznamo splošne rešitve diferencialne enačbe, rešujemo začetno nalogo približno s posplošitvijo Eulerjeve metode. Najprej si izberemo dolžino koraka $h$ in maksimalno število korakov $N$. Za vsak $i = 1, \ldots, N$ bomo izračunali približek $y_i$ za vrednost rešitve v točki $x_i = x_0 + ih$. (Podobno velja za $i = -1, \ldots, -N$.) Ocena

$$y(x_1) = y(x_0 + h) \approx y(x_0) + hy'(x_0) = y_0 + hz_0,$$

nam namigne, da vzamemo $y_1 = y_0 + hz_0$ kot približek za $y(x_1)$. Če v diferencialni enačbi $y'' = f(x, y, y')$ upoštevamo, da je

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_i + h) - y(x_i)}{h} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

in

$$y''(x_1) \approx \frac{y(x_i + 2h) - 2y(x_i + h) + y(x_i)}{h^2} \approx \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2},$$

dobimo rekurzivno zvezo

$$\frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2} = f(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{h})$$

odkoder izrazimo $y_{i+2}$ z $y_{i+1}$ in $y_i$.

$$y_{i+2} = 2y_{i+1} - y_i + h^2 f(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{h}).$$

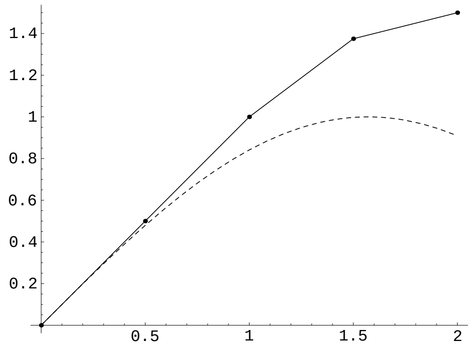
Ker sta $y_0$ in $y_1 = y_0 + hz_0$ znana, dobimo odtod $y_i$ za vsak $i = 2, \ldots, N$.

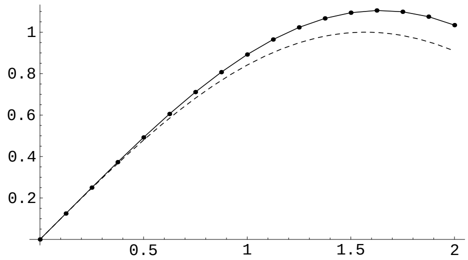
**Primer.** Poiščimo rešitev začetne naloge

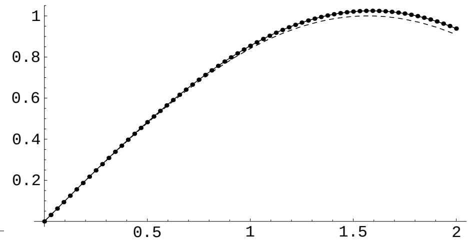
$$y'' = -y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

na intervalu $[0, 2]$ z 4, 16 in 64 koraki Eulerjeve metode. Približek bomo risali s polno črto, točke $(x_i, y_i)$ bomo odebelili. Točno rešitev $y = \sin x$ bomo risali črtkano.

V prvem primeru je $N = 4$, $h = \frac{1}{2}$, glej desno sliko. V drugem primeru je $N = 16$, $h = \frac{1}{8}$, glej spodnjo sliko. V tretjem primeru pa je $N = 64$, $h = \frac{1}{32}$, glej sliko spodaj desno. Vidimo, da je za dober približek potrebno zelo veliko korakov.



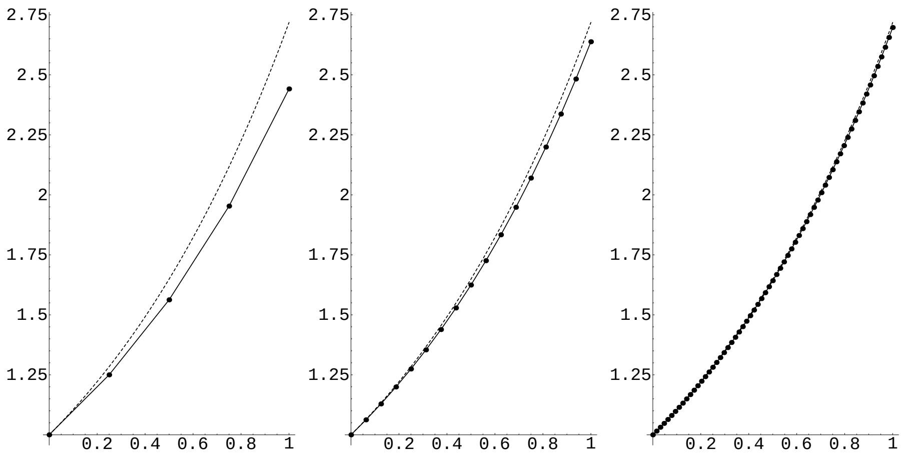




**Primer.** Poiščimo rešitev začetne naloge

$$y'' = (y')^2/y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

na intervalu $[0, 1]$ z 4, 16 in 64 koraki Eulerjeve metode. Približek bomo risali s polno črto, točke $(x_i, y_i)$ bomo odebelili. Točno rešitev $y = e^x$ bomo risali črtkano. Dobimo




V prvem primeru smo vzeli $N = 4$, $h = \frac{1}{4}$, v drugem $N = 16$, $h = \frac{1}{16}$, v tretjem pa $N = 64$, $h = \frac{1}{64}$.

## 15.3. Linearna diferencialna enačba drugega reda

V nadaljevanju se bom ukvarjali z diferencialno enačbo drugega reda

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x),$$

kjer so $p(x)$, $q(x)$ in $r(x)$ dane funkcije. Taki diferencialni enačbi pravimo **linearna diferencialna enačba drugega reda**. Brez dokaza omenimo **eksistenčni izrek**.

**Eksistenčni izrek. Če so funkcije $p(x)$, $g(x)$ in $h(x)$ definirane in zvezne na odprtem intervalu $I$, potem ima za vsak $x_0 \in I$ in vsaka $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ začetna naloga**

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = z_0$$

**natanko eno rešitev, ki je definirana na vsem intervalu $I$.**

Čeprav sedaj vemo, da rešitev zelo pogosto obstaja, jo bomo znali zelo poredkoma najti. V primeru, ko sta $p(x)$ in $q(x)$ konstantni funkciji, bomo rešitev vedno znali najti. To bo zadoščalo za obravnavo dušenega in vsiljenega nihanja.

Kadar je $r(x) = 0$ za vsak $x$, pravimo, da je linearna diferencialna enačba $y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)$ **homogena**, sicer pa, da je **nehomogena**. Najprej si oglejmo obliko množice rešitev homogene enačbe. Potrebovali bomo naslednjo definicijo. Pravimo, da sta dve funkciji **linearno odvisni**, če je ena od njiju konstanten večkratnik druge. V nasprotnem primeru pravimo, da sta funkciji **linearno neodvisni**. Iz eksistenčnega izreka se da izpeljati naslednjo trditev.

**Trditev. Recimo, da sta funkciji $p(x)$ ter $q(x)$ definirani in zvezni na nekem odprtem intervalu. Potem ima homogena enačba**

$$y'' = p(x)y' + q(x)y$$

**dve linearno neodvisni rešitvi. Če sta $y_1$ in $y_2$ poljubni linearno neodvisni rešitvi te enačbe, potem je**

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

**njena splošna rešitev. Enačba nima singularnih rešitev.**

Dokaz: Če sta $y_1$ in $y_2$ rešitvi diferencialne enačbe $y'' = p(x)y + q(x)y$, potem za poljubni realni števili $C_1$ in $C_2$ velja

$$\begin{aligned}
&(C_1y_1 + C_2y_2)'' = C_1y_1'' + C_2y_2'' = \\
&= C_1(p(x)y_1' + q(x)y_1) + C_2(p(x)y_2' + q(x)y_2) = \\
&= p(x)(C_1y_1' + C_2y_2') + q(x)(C_1y_1 + C_2y_2).
\end{aligned}$$

Torej je tudi $y = C_1y_1 + C_2y_2$ rešitev gornje diferencialne enačbe. S tem smo dokazali drugo trditev.

Naj bo $x_0$ poljubna točka iz odprtega intervala $I$, na katerem sta funkciji $p(x), q(x)$ definirani in zvezni. Naj bodo $a_1, b_1, a_2, b_2$ dana števila. Po eksistenčnem izreku obstaja taka rešitev $y = y_1(x)$, ki zadošča $y_1(x_0) = a_1$, $y_1'(x_0) = b_1$ in taka rešitev $y_2$, ki zadošča $y_2(x_0) = a_2$, $y_2'(x_0) = b_2$. Trdimo, da sta rešitvi $y_1$ in $y_2$ linearno neodvisni natanko tedaj, ko sta urejena para $(a_1, b_1)$ in $(a_2, b_2)$ linearno neodvisna. Odtod takoj sledi prva trditev. Če je $y_2 = Cy_1$, potem je tudi $y_2' = Cy_1'$. Ko vstavimo $x = x_0$, dobimo $(a_2, b_2) = C(a_1, b_1)$. Če pa velja $(a_2, b_2) = C(a_1, b_1)$, potem funkcija $u = y_2 - Cy_1$ zadošča $u(x_0) = 0$ in $u'(x_0) = 0$. Po prvem odstavku je funkcija $u$ tudi rešitev enačbe. Ničelna funkcija tudi zadošča tema pogojema in reši enačbo, torej je $u = 0$ po eksistenčnem izreku. Odtod sledi, da je $y_2 = Cy_1$.

Dokažimo še tretjo trditev. Če sta $y_1$ in $y_2$ linearno neodvisni rešitvi in je $x_0$ kot v prejšnjem odstavku, potem sta urejena para $(y_1(x_0), y_1'(x_0))$ in $(y_2(x_0), y_2'(x_0))$ linearno neodvisna. Za vsako rešitev $y$ potem obstajata taki realni števili $C_1$ in $C_2$, da velja $(y(x_0), y'(x_0)) = C_1(y_1(x_0), y_1'(x_0)) + C_2(y_2(x_0), y_2'(x_0))$. Odtod sledi, da funkcija $v = y - C_1y_1 - C_2y_2$ zadošča $v(x_0) = 0$ in $v'(x_0) = 0$. Odtod tako kot v prejšnjem odstavku sledi, da je $v = 0$. Torej je $y = C_1y_1 + C_2y_2$. □

**Trditev. Splošna rešitev nehomogene enačbe**

$$\boldsymbol{y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)}$$

**je oblike**

$$\boldsymbol{y = y_p + y_h,}$$

**kjer je $\boldsymbol{y_p}$ poljubna rešitev nehomogene enačbe, $\boldsymbol{y_h}$ pa splošna rešitev pripadajoče homogene enačbe $\boldsymbol{y'' = p(x)y' + q(x)y}$. Enačba nima singularnih rešitev.**

Dokaz: Naj bo $y$ poljubna dvakrat odvedljiva funkcija in $y_p$ poljubna rešitev nehomogene enačbe. Zadošča dokazati, da je $y$ rešitev nehomogene enačbe natanko tedaj, ko je $y_h = y - y_p$ rešitev pripadajoče homogene enačbe. Velja $(y - y_p)'' - p(x)(y - y_p)' - q(x)(y - y_p) = (y'' - p(x)y' - q(x)y - r(x)) - (y_p'' - p(x)y_p' - q(x)y_p - r(x)) = (y'' - p(x)y' - q(x)y - r(x))$. Torej je $(y - y_p)'' - p(x)(y - y_p)' - q(x)(y - y_p) = 0$ natanko tedaj, ko je $y'' - p(x)y' - q(x)y - r(x) = 0$. □

## 15.4. Homogena linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti

Če sta $p$ in $q$ konstantni funkciji, potem diferencialni enačbi

$$y'' = py' + qy$$

pravimo **homogena linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti**. Tako enačbo rešujemo z nastavkom

$$y = e^{\lambda x},$$

kjer je $\lambda$ konstanta, ki jo moramo še določiti. Ko nastavek vstavimo v enačbo, dobimo

$$0 = y'' - py' - qy = \lambda^2 e^{\lambda x} - p\lambda e^{\lambda x} - qe^{\lambda x} = (\lambda^2 - p\lambda - q)e^{\lambda x}.$$

Ker je $e^{\lambda x} \neq 0$, ga lahko krajšamo in dobimo

$$0 = \lambda^2 - p\lambda - q.$$

Tej enačbi pravimo **karakteristična enačba**, njenima ničlama

$$\lambda_{1,2} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

pa **karakteristiki**. Če sta $\lambda_1$ in $\lambda_2$ realni števili, potem sta $e^{\lambda_1 x}$ in $e^{\lambda_2 x}$ rešitvi te diferencialne enačbe. V primeru $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sta ti dve rešitvi linearno neodvisni.

**Primer.** Diferencialna enačba

$$y'' + 3y' + 2y = 0,$$

ima karakteristično enačbo $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, katere rešitvi sta $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_2 = -2$. Splošna rešitev te diferencialne enačbe je

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

Kadar pa je $\lambda_1 = \lambda_2$, je tudi $e^{\lambda_1 x} = e^{\lambda_2 x}$, torej smo našli samo eno rešitev. Izkaže se, da potem za drugo rešitev lahko vzamemo funkcijo $xe^{\lambda_1 x} = xe^{\lambda_2 x}$. Velja namreč

$$\begin{aligned}
&(xe^{\lambda x})'' - p(xe^{\lambda x})' - q(xe^{\lambda x}) = \\
&= \big(x\lambda^2 e^{\lambda x} + 2\lambda e^{\lambda x}\big) - p\big(x\lambda e^{\lambda x} + e^{\lambda x}\big) - q\big(xe^{\lambda x}\big) = \\
&= \big(x(\lambda^2 - p\lambda - q) + (2\lambda - p)\big)e^{\lambda x}
\end{aligned}$$

kar je enako nič, če je $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$. Rešitvi $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ in $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$ sta linearno neodvisni.

**Primer.** Diferencialna enačba

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

ima karakteristično enačbo $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$. Rešitvi te enačbe sta $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Splošna rešitev te diferencialne enačbe je torej

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

V primeru, ko sta karakteristiki $\lambda_1$ in $\lambda_2$ kompleksni, postopamo takole. Najprej zapišemo $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, kjer sta $\alpha$ in $\beta$ realni števili ter $i = \sqrt{-1}$ imaginarna enota. Definirajmo $y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ in $y_2 = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$. Očitno sta funkciji $y_1$ in $y_2$ linearno neodvisni. Pokažimo še, da rešita diferencialno enačbo. Iz

$$0 = (\alpha \pm \beta i)^2 - p(\alpha \pm \beta i) - q = (\alpha^2 - \beta^2 - p\alpha - q) \pm (2\alpha\beta - p\beta)i$$

sledi, da je $\alpha^2 - \beta^2 - p\alpha - q = 0$ in $2\alpha\beta - p\beta = 0$. Torej je

$$\begin{aligned} &y_1'' - py_1' - qy_1 = \\ &= (\alpha^2 - \beta^2 - p\alpha - q)e^{\alpha x}\cos(\beta x) - (2\alpha\beta - p\beta)e^{\alpha x}\sin(\beta x) = 0 \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} &y_2'' - py_2' - qy_2 = \\ &= (\alpha^2 - \beta^2 - p\alpha - q)e^{\alpha x}\sin(\beta x) + (2\alpha\beta - p\beta)e^{\alpha x}\cos(\beta x) = 0. \end{aligned}$$

**Primer.** Diferencialna enačba

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

ima karakteristično enačbo $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$, katere rešitvi sta $\lambda_1 = -1 + i$ in $\lambda_2 = -1 - i$. Splošna rešitev diferencialne enačbe je torej

$$y = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x.$$

Za splošno rešitev diferencialne enačbe $y'' = py' + qy$ imamo torej tri možnosti:

| koeficienta | karakteristiki | splošna rešitev |
|---|---|---|
| $p^2 + 4q > 0$ | $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$ | $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ |
| $p^2 + 4q = 0$ | $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 = \lambda_2$ | $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$ |
| $p^2 + 4q < 0$ | $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \beta \neq 0$ | $y = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$. |

## 15.5. Dušeno nihanje

Kroglica z maso $m$ je pritrjena na vzmet s koeficientom $k$. Odmaknimo jo za $x_0$ od mirovne lege in spustimo. Zanima nas, kako se potem giblje. Označimo z $x = x(t)$ odmik kroglice od mirovne lege v trenutku $t$. Označimo z $v(t) = x'(t)$ trenutno hitrost in z $a(t) = x''(t)$ trenutni pospešek kroglice. (Fiziki za prvi odvod po času namesto $x'$ raje uporabljajo oznako $\dot{x}$ ali $\frac{dx}{dt}$, za drugi odvod po času pa namesto $x''$ raje oznako $\ddot{x}$ ali $\frac{d^2x}{dt^2}$.)

Za začetek predpostavimo, da na kroglico deluje samo sila vzmeti $F_v$. Po Hookovem zakonu je $F_v = -kx$. Negativni predznak nas opozarja, da je smer sile nasprotna smeri odmika. Po drugem Newtonovem zakonu je potem $F_v = ma$, kjer je $a$ trenutni pospešek kroglice. Velja torej

$$x'' = -\frac{k}{m}x.$$

To je linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti. Njeni karakteristiki sta $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, kjer je $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Splošna rešitev se potem glasi

$$x = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t).$$

Konstanti $C_1$ in $C_2$ lahko določimo iz začetnih pogojev. Prvi pogoj pravi, da je začetni odmik enak $x_0$, torej je $x_0 = x(0) = C_1$. Drugi pogoj pravi, da je začetna hitrost enaka nič, torej je $0 = x'(0) = \omega_0 C_2$, se pravi $C_2 = 0$. Rešitev naše naloge je torej

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t).$$

Upoštevajmo sedaj še upor zraka. Predpostavimo, da je sila upora zraka sorazmerna trenutni hitrosti kroglice, se pravi $F_u = -bv$, kjer je $b$ konstanta. Predznak nas opominja, da je smer upora zraka nasprotna smeri gibanja. Iz enačbe $F_u + F_v = F = ma$ sledi

$$x'' = -\frac{b}{m}x' - \frac{k}{m}x.$$

Tudi to je homogena linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti. Njeni karakteristiki sta

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2},$$

kjer smo označili $\beta = \frac{b}{2m}$ in $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Oglejmo si tri primere: $\beta > \omega_0$, $\beta = \omega_0$ in $\beta < \omega_0$.

V prvem primeru sta karakteristiki realni in različni, torej je

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

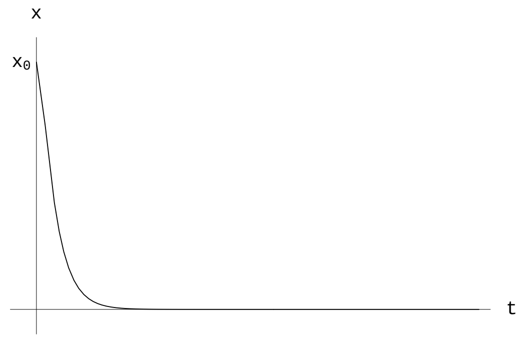
Iz začetnih pogojev sledi $x_0 = x(0) = C_1 + C_2$ in $0 = x'(0) = C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2$. Odtod sledi $C_1 = \frac{\lambda_2 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1}$ in $C_2 = -\frac{\lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1}$. Odtod sledi

$$x = \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} x_0.$$

Ker sta obe karakteristiki negativni, je $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. Poleg tega za vsak $t > 0$ velja

$$x'(t) = -\lambda_1\lambda_2 \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} < 0,$$

torej je rešitev vsekozi padajoča. Odtod sledi, da se kroglica približuje mirovni legi, je pa nikoli ne prečka.




V drugem primeru sta karakteristiki realni in enaki, torej je

$$x = C_1 e^{-\beta t} + C_2 t e^{-\beta t}.$$

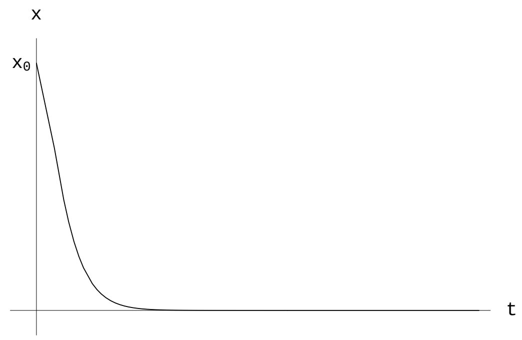
Iz začetnih pogojev sledi $x_0 = x(0) = C_1$ in $0 = x'(0) = -\beta C_1 + C_2$, torej je

$$x = (1 + \beta t)e^{-\beta t} x_0.$$

Ker je $\beta > 0$, je $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. Za vsak $t > 0$ velja

$$x'(t) = -\beta^2 t e^{-\beta t} < 0,$$

torej je rešitev spet padajoča.



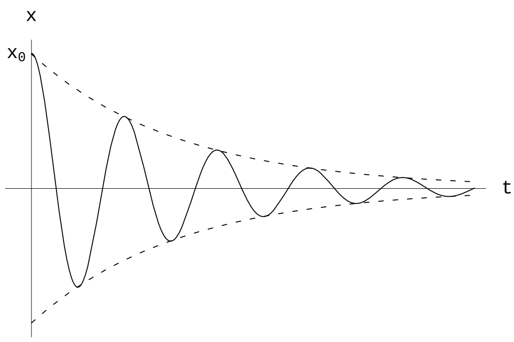

V tretjem primeru sta karakteristiki kompleksni. Velja $\lambda_{1,2} = -\beta + i\bar{\omega}_0$, kjer je $\bar{\omega}_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Torej je

$$x = C_1 e^{-\beta t}\cos(\bar{\omega}_0 t) + C_2 e^{-\beta t}\sin(\bar{\omega}_0 t).$$

Iz začetnih pogojev sledi $x_0 = x(0) = C_1$ in $0 = x'(0) = -\beta C_1 + \bar{\omega}_0 C_2$, sledi

$$x = x_0 e^{-\beta t}\big(\cos(\bar{\omega}_0 t) + \frac{\beta}{\bar{\omega}_0}\sin(\bar{\omega}_0 t)\big).$$

Tudi tokrat je $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$, vendar rešitev ni padajoča, ampak niha z krožno frekvenco $\bar{\omega}_0$. Čas enega nihaja je torej $\frac{2\pi}{\bar{\omega}_0}$.




## 15.6. Splošna homogena linearna diferencialna enačba drugega reda

Kadar $p(x)$ ali $q(x)$ ni konstantna funkcija, je iskanje rešitve enačbe

$$y'' = p(x)y' + q(x)y$$

precej bolj zahtevno. Če sta na primer $p(x)$ in $q(x)$ racionalni funkciji, ki nimata pola v točki nič, lahko eno rešitev poiščemo z nastavkom $y = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$, kjer so $c_i$ neznani koeficienti, ki jih določimo s pomočjo diferencialne enačbe. Včasih lahko s to metodo poiščemo tudi drugo rešitev, ki je linearno neodvisna od prve.

**Primer.** Oglejmo si najprej primer

$$p(x) = -\frac{2x}{2x^2 - 3x + 1}, \quad q(x) = \frac{2}{2x^2 - 3x + 1}.$$

Ko enačbo pomnožimo z $2x^2 - 3x + 1$, dobimo

$$(2x^2 - 3x + 1)y'' + 2xy' - 2y = 0.$$

Ko vstavimo

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i, \quad y' = \sum_{i=0}^{\infty} i c_i x^{i-1}, \quad y'' = \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1) c_i x^{i-2},$$

dobimo

$$\begin{aligned}
0 &= (2x^2-3x+1)y''+2xy'-2y\\
&= (2x^2-3x+1)\sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)c_ix^{i-2}+2x\sum_{i=0}^{\infty} ic_ix^{i-1}-2\sum_{i=0}^{\infty} c_ix^i\\
&= 2\sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)c_ix^i-3\sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)c_ix^{i-1}+\sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)c_ix^{i-2}+\\
&\quad +2\sum_{i=0}^{\infty} ic_ix^i-2\sum_{i=0}^{\infty} c_ix^i.
\end{aligned}$$

Poskrbimo sedaj, da bo v vseh vsotah nastopal $x^i$. To storimo tako, da v drugi vsoti zamenjamo $i$ z $i+1$, v tretji pa $i$ zamenjamo z $i+2$. Dobimo

$$\begin{aligned}
0 &= 2\sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)c_ix^i-3\sum_{i=-1}^{\infty}(i+1)ic_{i+1}x^i+\\
&\quad +\sum_{i=-2}^{\infty}(i+2)(i+1)c_{i+2}x^i+2\sum_{i=0}^{\infty} ic_ix^i-2\sum_{i=0}^{\infty} c_ix^i\\
&= 2\sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)c_ix^i-3\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)ic_{i+1}x^i+\\
&\quad +\sum_{i=0}^{\infty}(i+2)(i+1)c_{i+2}x^i+2\sum_{i=0}^{\infty} ic_ix^i-2\sum_{i=0}^{\infty} c_ix^i\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\left(2i(i-1)c_i-3(i+1)ic_{i+1}+(i+2)(i+1)c_{i+2}+2ic_i-2c_i\right)x^i.
\end{aligned}$$

Odtod sledi, da morajo biti vsi koeficienti v zadnji vrsti enaki nič, se pravi

$$\begin{aligned}
0 &= 2i(i-1)c_i-3(i+1)ic_{i+1}+(i+2)(i+1)c_{i+2}+2ic_i-2c_i\\
&= (2i^2-2)c_i-3(i+1)ic_{i+1}+(i+2)(i+1)c_{i+2}\\
&= (i+1)(2(i-1)c_i-3ic_{i+1}+(i+2)c_{i+2}).
\end{aligned}$$

Odtod sledi

$$c_{i+2}=\frac{3i}{i+2}c_{i+1}-\frac{2i-2}{i+2}c_i,$$

torej lahko vse $c_i$ izrazimo s $c_0$ in $c_1$. Za $i=0,1,2,3,\ldots$ dobimo

$$\begin{aligned}
&c_2=0+c_0=c_0,\\
&c_3=c_2+0=c_2=c_0,\\
&c_4=\tfrac{3}{2}c_3-\tfrac{1}{2}c_2=\tfrac{3}{2}c_0-\tfrac{1}{2}c_0=c_0,\\
&c_5=\tfrac{9}{5}c_4-\tfrac{4}{5}c_3=\tfrac{9}{5}c_0-\tfrac{4}{5}c_0=c_0,\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Z indukcijo lahko pokažemo, da je $c_i=c_0$ za vsak $i\geq 2$. Dokazali smo, da je

$$\begin{aligned}
y &= \sum_{i=0}^{\infty} c_ix^i=c_0+c_1x+c_0x^2+c_0x^3+c_0x^4+c_0x^5+\ldots\\
&= (c_1-c_0)x+c_0(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\ldots)\\
&= (c_1-c_0)x+c_0\tfrac{1}{1-x}.
\end{aligned}$$

S tem smo pokazali, da sta $y_1 = x$ in $y_2 = \frac{1}{1-x}$ rešitvi gornje diferencialne enačbe. Očitno sta ti rešitvi linearno neodvisni.

Če prvo rešitev $y_1$ nekako uganemo, potem lahko s pomočjo formule

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{\int p(x)dx}}{y_1^2}\, dx.$$

vedno izračunamo tudi drugo rešitev. Poleg tega sta rešitvi $y_1$ in $y_2$ vedno linearno neodvisni.

Dokaz: Najprej se moramo prepričati, da je $y_2$ res rešitev diferencialne enačbe $y'' = p(x)y' + q(x)y$. Označimo

$$w = e^{\int p(x)dx}, \quad z = \int \frac{w}{y_1^2}\, dx, \quad y_2 = zw.$$

Potem je

$$\begin{aligned}
&y_2'' - p(x)y_2' - q(x)y_2 = (y_1 z)'' - p(x)(y_1 z)' - q(x)(y_1 z) = \\
&= y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z'' - p(x)(y_1' z + y_1 z') - q(x) y_1 z = \\
&= (y_1'' - p(x)y_1 - q(x)y_1)z + (2y_1' - p(x)y_1)z' + y_1 z'' = \\
&= 0 + (2y_1' - p(x)y_1)\tfrac{w}{y_1^2} + y_1 \tfrac{w' \cdot y_1^2 - w \cdot 2y_1 y_1'}{y_1^4} = \\
&= -p(x)y_1 \tfrac{w}{y_1^2} + y_1 \tfrac{w' \cdot y_1^2}{y_1^4} = \tfrac{-p(x)w + w'}{y_1} = 0.
\end{aligned}$$

Torej je $y_2$ res rešitev gornje enačbe. Preveriti moramo še, da $y_1$ in $y_2$ nista linearno odvisni, se pravi, da $z$ ni konstantna funkcija. Ker funkcija $w$ nima ničel, je namreč $z' \neq 0$ v vsaki točki. $\square$

**Primer.** Če je $\lambda_1$ realna karakteristika diferencialne enačbe $y'' = py' + qy$, kjer sta $p, q$ konstantni, potem za $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ velja:

$$y_1 \int \frac{e^{\int p\ dx}}{y_1^2}\, dx = \begin{cases} \frac{e^{\lambda_2 x}}{\lambda_2 - \lambda_1}, & \lambda_1 \neq \lambda_2, \\ x e^{\lambda_1 x}, & \lambda_1 = \lambda_2. \end{cases}$$

**Primer.** Če uganemo, da je $y_1 = x$ rešitev enačbe $y'' = p(x)y' + q(x)$, kjer je $p(x) = -\frac{2x}{2x^2-3x+1}$ in $q(x) = \frac{2}{2x^2-3x+1}$, potem za drugo rešitev dobimo

$$\begin{aligned}
&y_1 \textstyle\int \frac{e^{\int p\ dx}}{y_1^2}\, dx = x \int \frac{e^{-\int \frac{2}{2x^2-3x+1}\ dx}}{x^2}\, dx = \\
&= x \textstyle\int \frac{e^{\ln(2x-1) - 2\ln(x-1)}}{x^2}\, dx = x \int \frac{2x-1}{(x-1)x^2}\, dx = \\
&= x(\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{x-1}) = \tfrac{1}{1-x}.
\end{aligned}$$

## 15.7. Nehomogena linearna diferencialna enačba drugega reda

V tem razdelku se bomo ukvarjali z diferencialno enačbo drugega reda

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x),$$

kjer funkcija $r(x)$ ni ničelna. Vemo, da je splošna rešitev oblike $y = y_p + y_h$, kjer je $y_h$ splošna rešitev pripadajoče homogene enačbe, $y_p$ pa ena od rešitev nehomogene enačbe.

Oglejmo si, kako poiščemo $y_p$, kadar poznamo $y_h$. Če sta $y_1$ in $y_2$ znani linearno neodvisni rešitvi pripadajoče homogene enačbe, potem $y_p$ iščemo z nastavkom

$$y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x),$$

kjer sta $C_1(x)$ in $C_2(x)$ neznani funkciji, ki ju moramo še določiti. Ko ta nastavek vstavimo v nehomogeno enačbo, dobimo

$$\begin{aligned}
&r(x) = y_p'' - p(x)y_p' - q(x)y_p = \\
&= C_1''y_1 + 2C_1'y_1' + C_1y_1'' + C_2''y_2 + 2C_2'y_2' + C_2y_2'' - \\
&-p(x)(C_1'y_1 + C_1y_1' + C_2'y_2 + C_2y_2') - q(x)(C_1y_1 + C_2y_2) = \\
&= C_1(y_1'' - p(x)y_1' - q(x)y_1) + C_2(y_2'' - p(x)y_2' - q(x)y_2) + \\
&+C_1''y_1 + 2C_1'y_1' + C_2''y_2 + 2C_2'y_2' - p(x)C_1'y_1 - p(x)C_2'y_2.
\end{aligned}$$

Ker sta $y_1$ in $y_2$ rešitvi homogene enačbe, sta prva dva oklepaja enaka nič. Ostanek malo predelamo, tako da dobimo

$$r(x) = (C_1'y_1 + C_2'y_2)' - p(x)(C_1'y_1 + C_2'y_2) + (C_1'y_1' + C_2'y_2').$$

Dobili smo torej eno zvezo za dve neznani funkciji $C_1'$ in $C_2'$, torej dobimo neskončno rešitev. Najpreprostejša je tista rešitev, pri kateri je

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0,$$

saj ostane samo

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' = r(x).$$

Dobili smo torej sistem dveh linearnih enačb za $C_1'$ in $C_2'$. Ta sistem znamo rešiti:

$$C_1' = -\frac{ry_2}{y_1y_2' - y_1'y_2}, \quad C_2' = \frac{ry_1}{y_1y_2' - y_1'y_2}.$$

Dobljeni formuli za $C_1'$ in $C_2'$ nato integriramo, tako da dobimo $C_1$ in $C_2$. Dobljeni formuli za $C_1$ in $C_2$ nato vstavimo v $y_p = C_1y_1 + C_2y_2$.

**Primer.** Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y'' + 4y' + 4y = (x^2 + 1)e^{-2x}.$$

Najprej poiščemo dve linearno neodvisni rešitvi pripadajoče homogene enačbe $y'' + 4y' + 4y = 0$:

$$y_1 = e^{-2x}, \quad y_2 = xe^{-2x}.$$

Sedaj izračunamo

$$w = y_1 y_2' - y_1' y_2 = e^{-4x}.$$

Odtod sledi

$$C_1' = -\frac{ry_2}{w} = -x - x^3 \quad \text{in} \quad C_2' = \frac{ry_1}{w} = 1 + x^2.$$

Z integriranjem dobimo

$$C_1 = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + D_1 \quad \text{in} \quad C_2 = x + \frac{x^3}{3} + D_2,$$

kjer sta $D_1$ in $D_2$ poljubni konstanti. Splošna rešitev nehomogene enačbe je

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = \big(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + D_1\big)e^{-2x} + \big(x + \frac{x^3}{3} + D_2\big)xe^{-2x} = y_p + y_h,$$

kjer je

$$y_p = \big(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\big)e^{-2x} + \big(x + \frac{x^3}{3}\big)xe^{-2x} = \frac{1}{12}x^2(x^2 + 6)e^{-2x}$$

ena od rešitev nehomogene enačbe,

$$y_h = D_1 y_1 + D_2 y_2,$$

pa splošna rešitev homogene enačbe.

Metoda za iskanje $y_p$, ki smo jo ravnokar spoznali, je računsko zelo zahtevna. Včasih je lažje uganiti $y_p$ s kakim preprostim nastavkom. Enega takih si bomo ogledali v naslednjem razdelku.

## 15.8. Vsiljeno nihanje

Energijo, ki jo kroglica izgubi zaradi dušenja, lahko nadomestimo z zunanjo silo. Recimo, da kroglica na začetku miruje v mirovni legi, nato pa začnemo nanjo delovati s silo $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$. Podobno kot zgoraj dobimo diferencialno enačbo

$$x'' = -\frac{b}{m}x' - \frac{k}{m}x + \frac{F_0}{m}\sin(\omega t).$$

Ko uvedemo oznake $\beta = \frac{b}{2m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ in $A_0 = \frac{F_0}{m}$, dobimo

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = A_0 \sin(\omega t).$$

Eno od rešitev te enačbe lahko poiščemo z nastavkom

$$x_p(t) = B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t),$$

kjer sta $B_1$ in $B_2$ neznani konstanti. Ko ta nastavek vstavimo v enačbo, dobimo $(-B_1\omega^2+2\beta B_2\omega+B_1\omega_0^2)\cos(\omega t)+(-B_2\omega^2-2\beta B_1\omega+B_2\omega_0^2)\sin(\omega\beta) = A_0\sin(\omega t)$. Ko primerjamo koeficiente pri $\cos(\omega t)$ in $\sin(\omega t)$, dobimo sistem enačb:

$$-B_1\omega^2+2\beta B_2\omega+B_1\omega_0^2=0, \quad -B_2\omega^2-2\beta B_1\omega+B_2\omega_0^2=A_0.$$

Odtod izračunamo

$$B_1=-\frac{2A_0\beta\omega}{(2\beta\omega)^2+(\omega^2-\omega_0^2)^2} \quad \text{in} \quad B_2=-\frac{A_0(\omega^2-\omega_0^2)}{(2\beta\omega)^2+(\omega^2-\omega_0^2)^2}.$$

Splošna rešitev enačbe je potem oblike

$$x=x_p+x_h,$$

kjer je $x_h$ splošna rešitev pripadajoče homogene enačbe. Vemo, da je

$$x_h(t)=e^{-\beta t}\big(C_1\cos(\bar\omega_0 t)+C_2\sin(\bar\omega_0 t)\big),$$

kjer je $\bar\omega_0=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$. Iz začetnih pogojev

$$x(0)=0 \quad \text{in} \quad x'(0)=0$$

sledi, da je

$$C_1=-B_1=\frac{2A_0\beta\omega}{(2\beta\omega)^2+(\omega^2-\omega_0^2)^2},$$

$$C_2=-\frac{B_1\beta+B_2\omega}{\bar\omega_0}=\frac{A_0\frac{\omega}{\bar\omega_0}(2\beta^2+\omega^2-\omega_0^2)}{(2\beta\omega)^2+(\omega^2-\omega_0^2)^2}.$$

Iskana rešitev torej je

$$x(t)=-A_0\frac{2\beta\omega\cos(\omega t)+(\omega^2-\omega_0^2)\sin(\omega t)}{(2\beta\omega)^2+(\omega^2-\omega_0^2)^2}+$$

$$+A_0\frac{\omega}{\bar\omega_0}e^{-\beta t}\frac{2\beta\bar\omega_0\cos(\bar\omega_0 t)+(2\beta^2+\omega^2-\omega_0^2)\sin(\bar\omega_0 t)}{(2\beta\omega)^2+(\omega^2-\omega_0^2)^2}.$$

Pri velikih $t$ je drugi člen (to je $x_h$) zelo majhen, torej se lahko omejimo na prvi člen (to je $x_p$). Člen $x_p$ lahko preoblikujemo v

$$x_p(t)=-\frac{A_0}{\sqrt{(2\beta\omega)^2+(\omega^2-\omega_0^2)^2}}\big(\sin(\omega t)\cos\delta_\omega+\cos(\omega t)\sin\delta_\omega\big),$$

kjer je

$$\cos\delta_\omega=\frac{2\beta\omega}{\sqrt{(2\beta\omega)^2+(\omega^2-\omega_0^2)^2}} \quad \text{in} \quad \sin\delta_\omega=\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\sqrt{(2\beta\omega)^2+(\omega^2-\omega_0^2)^2}}.$$

Torej je

$$x_p(t)=-A_\omega\sin(\omega t+\delta_\omega),$$

kjer je

$$A_\omega = \frac{A_0}{\sqrt{(2\beta\omega)^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}} \quad \text{in} \quad \delta_\omega = \operatorname{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

Pri velikih $t$ torej kroglica niha s krožno frekvenco $\omega$ in amplitudo $A_\omega$. Največjo amplitudo kroglica doseže, ko je $\omega = \omega_{\max}$, kjer je

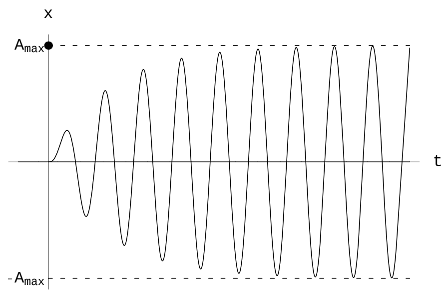
$$\omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

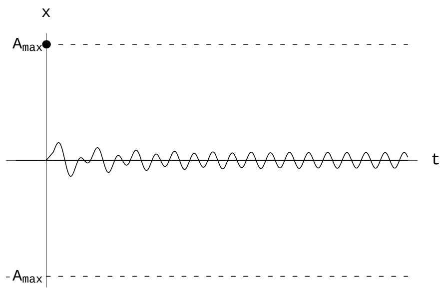
V tem primeru pravimo, da je kroglica **v resonanci**. Tedaj je $A_\omega = A_{\max}$, kjer je

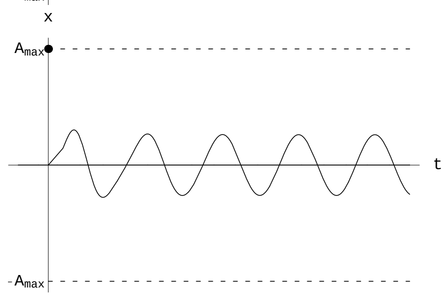
$$A_{\max} = \frac{A_0}{2\beta\bar{\omega}_0}.$$

Recimo, da je $\beta = \omega_0/10$. Potem je $\omega_{\max} \approx 0.99\omega_0$. Narišimo graf funkcije $x = x(t)$ v primerih:

- $\omega = \omega_{\max}$ (desno),
- $\omega = 2\omega_{\max}$ (spodaj) in
- $\omega = \frac{1}{2}\omega_{\max}$ (desno spodaj).




## 15.9. Sistemi diferencialnih enačb prvega reda

Standardna oblika sistema dveh diferencialnih enačb prvega reda je

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y, z), \\ z' &= g(x, y, z), \end{aligned}$$

kjer sta $f$ in $g$ dani funkciji treh spremenljivk, $y = y(x)$ ter $z = z(x)$ pa neznani funkciji, ki ju iščemo. Če iz prve enačbe izrazimo $z$ in ga vstavimo v drugo enačbo, dobimo diferencialno enačbo drugega reda za $y$. Če znamo rešiti to enačbo, potem dobimo $z$ iz gornje izražave. Splošna rešitev tega sistema je torej oblike $y = \phi(x, C_1, C_2)$, $z = \psi(x, C_1, C_2)$.

Opomba. Velja tudi obratno. Diferencialno enačbo drugega reda $y'' = h(x, y, y')$ lahko prevedemo v sistem dveh diferencialnih enačb prvega reda z uvedbo pomožne spremenljivke $z = y'$. Dobimo sistem $y' = z$, $z' = h(x, y, z)$.

**Primer.** Poišči splošno rešitev sistema diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} y' &= 2y + z, \\ z' &= 2y + 3z. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe izrazimo $z = y' - 2y$ in ga vstavimo v drugo enačbo. Dobimo $(y' - 2y)' = 2y + 3(y' - 2y)$. Ko uredimo, dobimo

$$y'' - 5y' + 4y = 0.$$

Karakteristiki te enačbe sta $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = 4$. Njena splošna rešitev je torej

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}.$$

Sedaj lahko izračunamo tudi

$$z = y' - 2y = -C_1 e^x + 2C_2 e^{4x}.$$

**Primer.** Poišči splošno rešitev sistema diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} y' &= yz^2, \\ z' &= y^3 z. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe izrazimo

$$z = \sqrt{\frac{y'}{y}}$$

in ga vstavimo v drugo enačbo. Dobimo

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{y'}{y}}}\Big(\frac{y'}{y}\Big)' = y^3 \cdot \sqrt{\frac{y'}{y}}.$$

Odtod sledi

$$\Big(\frac{y'}{y}\Big)' = 2y^3\Big(\frac{y'}{y}\Big).$$

Po formuli za odvod kvocienta je

$$\Big(\frac{y'}{y}\Big)' = \frac{y''y - (y')^2}{y^2}.$$

Iz obeh formul sledi

$$y''y - (y')^2 = 2y^4 y'.$$

Spomnimo se, da tako enačbo rešujemo z nastavkom $y' = u(y)$, kjer je $u$ neznana funkcija in da velja $y'' = uu'$. Enačba potem preide v

$$uu'y - u^2 = 2y^4 u.$$

Odtod sledi, da je bodisi $u = 0$ bodisi $u'y - u = 2y^4$. V prvem primeru je

$$y' = 0,$$

torej je $y$ konstantna funkcija,

$$y = C.$$

Odtod sledi

$$z = \sqrt{\frac{y'}{y}} = 0.$$

Bolj zanimiv je drugi primer. Najprej opazimo, da je $\left(\frac{u}{y}\right)' = 2y^2$, odkoder po integriranju dobimo $\frac{u}{y} = \frac{2y^3}{3} + C$, se pravi

$$y' = \frac{2y^4}{3} + Cy.$$

Sedaj ločimo spremenljivke in integriramo. Po krajšem računu dobimo $\frac{\ln y}{C} - \frac{\ln(3C+2y^3)}{3C} = x + D$. Ko pomnožimo z $3C$ in na obeh straneh uporabimo eksponentno funkcijo, dobimo $\frac{y^3}{3C+2y^3} = e^{3C(x+D)}$, odkoder lahko izrazimo

$$y^3 = \frac{3Ce^{3C(x+D)}}{1 - 2e^{3C(x+D)}}.$$

Torej je

$$y = \sqrt[3]{\frac{3Ce^{3C(x+D)}}{1 - 2e^{3C(x+D)}}},$$

$$z = \sqrt{\frac{y'}{y}} = \sqrt{\frac{C}{1 - 2e^{3C(x+D)}}}.$$

splošna rešitev gornjega sistema.

Včasih iščemo tako rešitev sistema

$$y' = f(x, y, z), \quad z' = g(x, y, z)$$

ki zadošča začetnemu pogoju

$$y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0,$$

kjer so $x_0, y_0, z_0$ dana števila. Temu pravimo začetna naloga.

Točno rešitev začetne naloge dobimo tako, da najprej poiščemo splošno rešitev sistema, nato pa s pomočjo začetnih pogojev določimo neznani konstanti. Če je splošna rešitev oblike $y = \phi(x, C_1, C_2)$, $z = \psi(x, C_1, C_2)$, moramo torej rešiti sistem enačb $y_0 = \phi(x_0, C_1, C_2)$, $z_0 = \psi(x_0, C_1, C_2)$.

Približno rešitev začetne naloge dobimo z prilagoditvijo Eulerjeve metode. Najprej si izberemo dolžino koraka $h$ in število korakov $N$. V prvem koraku potegnemo daljico iz točke $(x_0, y_0, z_0)$ v točko

$$(x_1, y_1, z_1) = (x_0 + h, y_0 + f(x_0, y_0, z_0)h, z_0 + g(x_0, y_0, z_0)h).$$

V drugem koraku potegnemo daljico iz točke $(x_1, y_1, z_1)$ v točko

$$(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + h, y_1 + f(x_1, y_1, z_1)h, z_1 + g(x_1, y_1, z_1)h).$$

S tem postopkom nadaljujemo, dokler ne pridemo v točko $(x_N, y_N, z_N)$. Dobili smo lomljenko skozi točke

$$(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_N, y_N, z_N)$$

Ta lomljenka je približek za graf rešitve $x \mapsto (y(x), z(x))$.

Približek za graf neznane funkcije $y(x)$ je torej lomljenka skozi točke $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, ..., $(x_N, y_N)$, približek za graf neznane funkcije $z(x)$ pa je lomljenka skozi točke $(x_0, z_0)$, $(x_1, z_1)$, $(x_2, z_2)$, ..., $(x_N, z_N)$.

## 15.10. Vprašanja za ponavljanje

(1) (Diferencialne enačbe drugega reda z ločljivimi spremenljivkami) Rešujemo diferencialno enačbo oblike $y'' = g(y')h(y)$, kjer sta $g$ in $h$ dani funkciji.
   - (a) Kateri nastavek uporabimo?
   - (b) Katero diferencialno enačbo dobimo, ko nastavek iz (a) vstavimo v $y'' = g(y')h(y)$?
   - (c) Kako rešimo diferencialno enačbo iz točke (b)?
   - (d) Kako s pomočjo rešitve iz točke (c) dobimo rešitev enačbe $y'' = g(y')h(y)$?

(2) (Linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti) Naj bosta $p$ in $q$ realni števili in $f(x)$ zvezna funkcija ene spremenljivke.
   - (a) Kako poiščemo splošno rešitev diferencialne enačbe $y'' = py' + qy$?
   - (b) Kako poiščemo partikularno rešitev diferencialne enačbe $y'' = py' + qy + f(x)$?
   - (c) Kako poiščemo splošno rešitev diferencialne enačbe $y'' = py' + qy + f(x)$?

(3) (Splošna linearna diferencialna enačba drugega reda) Naj bodo $p(x)$, $q(x)$ in $r(x)$ dane racionalne funkcije, ki nimajo pola v točki nič.
   - (a) Kako poiščemo prvo rešitev enačbe $y'' = p(x)y' + q(x)y$?

(b) Kako izrazimo drugo rešitev enačbe $y'' = p(x)y' + q(x)y$ s pomočjo prve?
(c) Kako poiščemo splošno rešitev enačbe $y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)$?

(4) (Začetna naloga za diferencialne enačbe drugega reda)
(a) Kako podamo začetne pogoje za diferencialno enačbo drugega reda?
(b) Kakšen je geometrijski in fizikalni pomen začetnih pogojev?
(c) Opiši, kako točno rešimo začetno nalogo!
(d) Opiši, kako približno rešimo začetno nalogo!

(5) (Sistem linearnih diferencialnih enačb prvega reda s konstantnimi koeficienti) Naj bodo $a, b, c, d$ realna števila in $f(x)$, $g(x)$ zvezni funkciji ene spremenljivke.
(a) Kako prevedemo sistem $y' = ay + bz$, $z' = cy + dz$ na homogeno linearno diferencialno enačbo drugega reda?
(b) Kako prevedemo sistem $y' = ay + bz + f(x)$, $z' = cy + dz + g(x)$ na nehomogeno linearno diferencialno enačbo drugega reda?
(c) Kako prevedemo linearno diferencialno enačbo drugega reda na sistem dveh diferencialnih enačb prvega reda?

(6) (Začetna naloga za sistem diferencialnih enačb prvega reda)
(a) Kako podamo začetne pogoje za sistem diferencialnih enačb prvega reda?
(b) Kakšen je geometrijski in fizikalni pomen začetnih pogojev?
(c) Opiši, kako točno rešimo začetno nalogo!
(d) Opiši, kako približno rešimo začetno nalogo!