

Druga teoretična domača naloga iz Matematike 1

- (1) (Rolleov in Lagrangeov izrek)
 - (a) Formuliraj Rolleov izrek in Lagrangeov izrek ter ju utemelji na skici.
 - (b) Iz Lagrangeovega izreka izpelji, da je vsaka funkcija z nenegativnim odvodom in povezanim definicijskim območjem naraščajoča.
 - (c) Funkcija $f(x) = -\frac{1}{x}$ zadošča $f'(x) \geq 0$ za vsak x , vendar ni naraščajoča, ker $f(-1) > f(1)$. V čem je problem?
 - (d) Kaj vemo o funkcijah, katerih odvod je povsod enak nič? (Loči primera, ko definicijsko območje je povezano in ko ni povezano.)
- (2) (Ekstremi in prevoji)
 - (a) Formuliraj potrebni pogoj za lokalni ekstrem funkcije v točki. Podaj primer funkcije, ki zadošča potrebnemu pogoju za lokalni ekstrem, vendar nima lokalnega ekstrema.
 - (b) Formuliraj zadostni pogoj za lokalni ekstrem funkcije v točki. (Tistega s prvim odvodom.)
 - (c) Formuliraj potrebni pogoj za prevoj funkcije v točki. Podaj primer funkcije, ki zadošča potrebnemu pogoju za prevoj, vendar nima prevoja.
 - (d) Formuliraj zadostni pogoj za prevoj funkcije v točki. (Tistega z drugim odvodom.)
- (3) (Uporaba Taylorjevih polinomov) Naj bo $f(x) = \sin x - x \cos x$.
 - (a) Izračunaj tretji Taylorjev polinom funkcije $f(x)$ v točki $x = 0$.
 - (b) Poišči tak $\epsilon > 0$, da se bo na intervalu $(-\epsilon, \epsilon)$ funkcija $f(x)$ ujemala s svojim tretjim Taylorjevim polinomom na vsaj 0.01 natanko.
 - (c) Izračunaj limito $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$.
 - (d) Ugotovi, ali ima funkcija $f(x)$ prevoj v točki $x = 0$.
- (4) (Obstoj in enoličnost nedoločenega integrala)
 - (a) Kako je definiran nedoločeni integral funkcije?
 - (b) Kaj vemo o enoličnosti nedoločenega integrala? Poišči VSE nedoločene integrale funkcije $1/x^2$.
 - (c) Kaj vemo o eksistenci nedoločenega integrala?
- (5) (Pravila za računanje nedoločenih integralov)
 - (a) Izpelji pravilo za uvedbo nove spremenljivke v nedoločeni integral. (Pomagaj si s pravilom za odvajanje kompozituma.)
 - (b) Izračunaj $\int \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx$ z uvedbo spremenljivke $t = 1 + x^2$.
 - (c) Izpelji pravilo za integracijo po delih. (Pomagaj si s pravilom za odvajanje produkta.)
 - (d) Izračunaj $\int x^2 \sin x dx$ z integracijo po delih.