Rešitve in kriterij ocenjevanja 1. kolokvija iz Matematike 2

1. [15] Poišči lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = 5x^2 + 2y^2 - 2xy - 14x - 8y + 26$ in jih klasificiraj.

   Rešitev: Parcialna odvoda sta enaka $\frac{\partial f}{\partial x} = 10x - 2y - 14$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y - 2x - 8$. Od tod dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} 5x - y &= 7, \\ 2y - x &= 4, \end{aligned}$$

   ki ima rešitev $x = 2$, $y = 3$. Funkcija f ima torej eno stacionarno točko $T(2, 3)$. Izračunajmo še druge odvode: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$. Sledi

$$f_{xx}(2, 3)f_{yy}(2, 3) - f_{xy}(2, 3)^2 = 10 \cdot 4 - (-2)^2 > 0,$$

   kar pomeni, da ima f v točki $T(2, 3)$ lokalni minimum. □

   · [4] Po dve točki za vsak prvi parcialni odvod.
   · [2] Sistem enačb.
   · [2] Izračunana stacionarna točka.
   · [3] Po točka za vsak drugi parcialni odvod.
   · [2] Izračun izraza $f_{xx}(2, 3)f_{yy}(2, 3) - f_{xy}(2, 3)^2$.
   · [2] Sklep, da ima funkcija f v stacionarni točki lokalni minimum.

2. [10] Izračunaj ploščino lika pod grafom funkcije $f(x) = xe^x$ na intervalu $[0, 1]$.

Rešitev: Ploščino lika pod grafom funkcije bomo izračunali z integracijo po delih. Označimo $u = x$ in $e^x\,dx = dv$. Potem je $du = dx$ in $v = e^x$, kar nam da

$$S = \int_0^1 xe^x\,dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = (e - 0) - e^x\Big|_0^1 = e - (e - 1) = 1.$$

$\square$

· [2] Nastavek: $S = \displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$.

· [6] Integracija.

· [2] Rezultat.

3. [10] Poišči presečišče ravnin π in σ, ki sta definirani z enačbama:

$$\pi: \; x + y - z = 3,$$
$$\sigma: \; -x + 2y + 3z = 3.$$

Rešitev: Ravnini imata normalna vektorja $\vec{n}_\Pi = (1, 1, -1)$ in $\vec{n}_\Sigma = (-1, 2, 3)$. Njun presek je premica s smernim vektorjem

$$\vec{s} = \vec{n}_\Pi \times \vec{n}_\Sigma = (1, 1, -1) \times (-1, 2, 3) = (5, -2, 3).$$

Za točko na premici lahko izberemo točko $\vec{r}_0 = (1, 2, 0)$. Presek ravnin je torej premica z enačbo

$$\vec{r} = (1, 2, 0) + t(5, -2, 3).$$

□

· [4] Smer premice.

· [4] Točka na premici.

· [2] Enačba premice.

4. [10] Poišči pravokotno projekcijo točke $T(5,0,4)$ na premico, ki gre skozi točki $A(1,2,1)$ in $B(2,1,3)$.

Rešitev: Premica p, ki gre skozi točki A in B, ima smerni vektor $\vec{s} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (1,-1,2)$, za začetno točko pa lahko izberemo $\vec{r}_0 = (1,2,1)$.

Pravokotna projekcija točke T na premico p je potem

$$\vec{r}_P = \vec{r}_0 + ((\vec{r}_T - \vec{r}_0) \cdot \vec{s})\,\frac{\vec{s}}{|\vec{s}|^2} = (1,2,1) + \big((4,-2,3)\cdot(1,-1,2)\big)\frac{\vec{s}}{6} = (3,0,5).$$

□

· [4] Smer in začetna točka premice p.

· [4] Uporaba formule za pravokotno projekcijo.

· [2] Pravokotna projekcija.

5. [15] Krivulja je podana v parametrični obliki s predpisom $\vec{r}(t) = (2t, e^{2t}, \cos t)$. Izračunaj fleksijsko ter torzijsko ukrivljenost krivulje v točki $T(0,1,1)$.

Rešitev: Odvodi položaja so:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{r}}(t) &= (2, 2e^{2t}, -\sin t), \\
\ddot{\vec{r}}(t) &= (0, 4e^{2t}, -\cos t), \\
\dddot{\vec{r}}(t) &= (0, 8e^{2t}, \sin t).
\end{aligned}$$

Točka $T(0,1,1)$ ustreza parametru $t = 0$, kjer velja $\dot{\vec{r}}(0) = (2,2,0)$, $\ddot{\vec{r}}(0) = (0,4,-1)$ in $\dddot{\vec{r}}(0) = (0,8,0)$. Sledi:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{r}}(0) \times \ddot{\vec{r}}(0) &= (-2, 2, 8), \\
|\dot{\vec{r}}(0) \times \ddot{\vec{r}}(0)| &= 6\sqrt{2}, \\
|\dot{\vec{r}}(0)| &= 2\sqrt{2}, \\
(\dot{\vec{r}}(0) \times \ddot{\vec{r}}(0)) \cdot \dddot{\vec{r}}(0) &= 16.
\end{aligned}$$

Od tod dobimo:

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3} = \frac{6\sqrt{2}}{(2\sqrt{2})^3} = \frac{3}{8}, \\
\omega &= \frac{(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \cdot \dddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2} = \frac{16}{(6\sqrt{2})^2} = \frac{2}{9}.
\end{aligned}$$

□

· [6] Izračun odvodov.

· [6] Izračun κ.

· [3] Izračun ω.

6. [10] Ploskev je podana parametrično s predpisom $\vec{r}(u, v) = (u^2v, uv^2, u + v^2)$. Določi tangentno ravnino na ploskev v točki $\vec{r}(1, 1)$.

Rešitev: Smerna odvoda sta:

$$\begin{aligned} \vec{r}_u &= (2uv, v^2, 1), \\ \vec{r}_v &= (u^2, 2uv, 2v). \end{aligned}$$

V točki $\vec{r}(1, 1) = (1, 1, 2)$ je $\vec{r}_u(1, 1) = (2, 1, 1)$ in $\vec{r}_v(1, 1) = (1, 2, 2)$. Od tod dobimo smer normale

$$\vec{n} = (2, 1, 1) \times (1, 2, 2) = (0, -3, 3).$$

Tangentna ravnina ima enačbo $-3y + 3z = d$. Če v to enačbo vstavimo koordinate točke $\vec{r}(1, 1) = (1, 1, 2)$, dobimo, da je $d = 3$. Sledi:

$$\begin{aligned} -3y + 3z &= 3, \\ -y + z &= 1. \end{aligned}$$

□

· [2] Izračun smernih odvodov.

· [4] Smer normale in točka na ravnini.

· [4] Enačba tangentne ravnine.

7. [10] Izračunaj odvod funkcije $F(x) = \int\limits_{-x}^{x} (x+y)^2 \, dy$.

Rešitev: Označimo $\alpha(x) = -x$, $\beta(x) = x$ in $f(x,y) = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Sledi $\alpha'(x) = -1$, $\beta'(x) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2y$ in

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_{-x}^{x} (2x+2y)\, dy + 1 \cdot f(x,x) - (-1) \cdot f(x,-x) = (2xy + y^2)\Big|_{y=-x}^{y=x} + 4x^2 + 0, \\ &= (2x^2 + x^2) - (-2x^2 + x^2) + 4x^2, \\ &= 8x^2. \end{aligned}$$

□

· [4] Izračun α, β, f in njihovih odvodov.

· [4] Izračun odvoda funkcije F.

· [2] Rezultat.

8. [10] Izračunaj integrala:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{t^3} e^{-t}\, dt,$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x\, dx.$

Rešitev:

(a) $$\int_0^\infty \sqrt{t^3} e^{-t}\, dt = \int_0^\infty t^{\frac{3}{2}} e^{-t}\, dt = \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.$$

(b) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2} B\left(2, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(2)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{15}.$$

□

· [3] Uporaba funkcije gama.
· [2] Rezultat.
· [3] Uporaba funkcije beta.
· [2] Rezultat.