Rešitve in kriterij ocenjevanja 1. kolokvija iz Matematike 2

1. [10] Izračunaj odvoda funkcij:

   (a) $f(x) = x \sin x$,

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

   Rešitev:

   a) $f'(x) = x' \sin x + x(\sin x)' = \sin x + x \cos x$,

   b) $f'(x) = \dfrac{(1)'(1+x^2) - 1(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}.$

   □

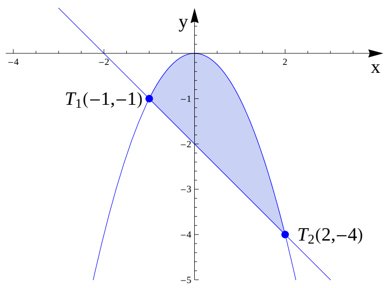
   · [2] Uporaba formule za odvod produkta.
   · [3] Rezultat.
   · [2] Uporaba formule za odvod kvocienta.
   · [3] Rezultat.

2. [15] Skiciraj lik, ki je omejen s krivuljama $y = -x^2$ in $y = -x - 2$ in nato izračunaj njegovo ploščino.

Rešitev: Presečišči danih krivulj dobimo iz enačbe:

$$\begin{aligned} -x^2 &= -x - 2, \\ x^2 - x - 2 &= 0, \\ (x-2)(x+1) &= 0. \end{aligned}$$

Presečišči sta v točkah $T_1(-1,-1)$ in $T_2(2,-4)$.



Ploščina danega lika je enaka integralu funkcije $y = -x^2 + x + 2$ na intervalu $[-1, 2]$:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{2} \left(-x^2 + x + 2\right)\, dx, \\ &= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_{-1}^{2}, \\ &= \left(-\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4\right) - \left(-\frac{-1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right), \\ &= \underline{\underline{\frac{9}{2}}}. \end{aligned}$$

□

· [3] Izračun presečišč.

· [3] Skica.

· [2] Nastavek: $S = \int_{-1}^{2} \left(-x^2 + x + 2\right)\, dx$.

· [4] Integracija.

· [3] Rezultat.

3. [10] Poišči presečišče premic p in q, ki sta definirani z enačbama:

$$p:\ \vec{r}=(3,1,10)+t(1,-1,2),$$
$$q:\ x=1,\ y-2=\frac{z-3}{3}.$$

Rešitev: Najprej zapišimo premico q v parametrični obliki

$$\vec{r}=(1,2,3)+s(0,1,3).$$

Če komponente parametrizacij obeh premic paroma izenačimo, dobimo sistem treh enačb za dve neznanki

$$\begin{aligned} 3+t&=1,\\ 1-t&=2+s,\\ 10+2t&=3+3s, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $t=-2$ in $s=1$. Presečišče premic p in q je točka $T(1,3,6)$. $\square$

· [2] Parametrična oblika premice q.
· [3] Sistem enačb.
· [3] Izračun t in s.
· [2] Presečišče.

4. [10] Poišči pravokotno projekcijo točke $T(2,2,-4)$ na ravnino Π, ki ima smer normale $\vec{n} = (1,1,-4)$ in gre skozi točko $A(-1,-1,-1)$.

Rešitev: Najprej bomo poiskali normalno enačbo ravnine Π. Ravnina gre skozi točko $A(-1,-1,-1)$ in ima smer normale $\vec{n} = (1,1,-4)$. Od tod sledi

$$\begin{aligned}
(\vec{r} - \vec{r}_A) \cdot \vec{n} &= 0, \\
(x+1, y+1, z+1) \cdot (1,1,-4) &= 0, \\
x + 1 + y + 1 - 4z - 4 &= 0, \\
x + y - 4z &= 2.
\end{aligned}$$

Pravokotno projekcijo točke T na ravnino Π bomo izračunali kot presek ravnine in pa premice, ki je pravokotna na ravnino in gre skozi T. Parametrična oblika enačbe te premice je $\vec{r} = (2,2,-4) + t(1,1,-4)$. Ko komponente vstavimo v enačbo ravnine Π, dobimo enačbo

$$\begin{aligned}
2 + t + 2 + t - 4(-4 - 4t) &= 2, \\
18t + 20 &= 18,
\end{aligned}$$

ki ima rešitev $t = -1$. Projekcija točke T na ravnino Π je točka $P(1,1,0)$. □

· [4] Normalna oblika enačbe ravnine Π.

· [2] Enačba.

· [2] Izračun t.

· [2] Pravokotna projekcija.

5. [15] Krivulja je podana v parametrični obliki s predpisom $\vec{r}(t) = (1, e^{-t}, \sin 2t)$. Izračunaj fleksijsko ter torzijsko ukrivljenost krivulje v točki $T(1, 1, 0)$.

Rešitev: Najprej izračunajmo prve tri odvode položaja:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}(t) &= (0, -e^{-t}, 2\cos 2t), \\ \ddot{\vec{r}}(t) &= (0, e^{-t}, -4\sin 2t), \\ \dddot{\vec{r}}(t) &= (0, -e^{-t}, -8\cos 2t). \end{aligned}$$

Točka $T(1, 1, 0)$ ustreza parametru $t = 0$, kjer velja $\dot{\vec{r}}(0) = (0, -1, 2)$, $\ddot{\vec{r}}(0) = (0, 1, 0)$ in $\dddot{\vec{r}}(0) = (0, -1, -8)$. Sledi

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}(0) \times \ddot{\vec{r}}(0) &= (-2, 0, 0), \\ |\dot{\vec{r}}(0) \times \ddot{\vec{r}}(0)| &= 2, \\ |\dot{\vec{r}}(0)| &= \sqrt{5}, \\ (\dot{\vec{r}}(0) \times \ddot{\vec{r}}(0)) \cdot \dddot{\vec{r}}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Od tod dobimo

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3} = \frac{2}{\sqrt{5}^3} = \sqrt{\frac{4}{125}}, \\ \omega &= \frac{(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \cdot \dddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2} = 0. \end{aligned}$$

□

· [6] Izračun odvodov.

· [6] Izračun κ.

· [3] Izračun ω.

6. [10] Ploskev je podana parametrično s predpisom $\vec{r}(u,v) = (u+v, u-v, u^2+v^2)$. Določi tangentno ravnino na ploskev v točki $\vec{r}(1,1)$.

Rešitev: Najprej izračunajmo smerna odvoda:

$$\begin{aligned}\vec{r}_u &= (1, 1, 2u),\\ \vec{r}_v &= (1, -1, 2v).\end{aligned}$$

V točki $\vec{r}(1,1) = (2,0,2)$ je $\vec{r}_u(1,1) = (1,1,2)$ in $\vec{r}_v(1,1) = (1,-1,2)$. Od tod dobimo smer normale

$$\vec{n} = (1,1,2) \times (1,-1,2) = (4,0,-2).$$

Tangentna ravnina ima tako enačbo

$$\begin{aligned}(\vec{r} - \vec{r}(1,1)) \cdot \vec{n} &= 0,\\ (x-2, y, z-2) \cdot (4,0,-2) &= 0,\\ 4x - 8 - 2z + 4 &= 0,\\ 4x - 2z &= 4,\\ 2x - z &= 2.\end{aligned}$$

□

· [2] Izračun smernih odvodov.

· [4] Smer normale in točka na ravnini.

· [4] Enačba tangentne ravnine.

7. [10] Izračunaj odvod funkcije $F(x) = \int\limits_1^x (2x-y)^2\, dy$.

Rešitev: Označimo $\alpha(x) = 1$, $\beta(x) = x$ in $f(x,y) = (2x-y)^2 = 4x^2 - 4xy + y^2$. Sledi $\alpha'(x) = 0$, $\beta'(x) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 8x - 4y$ in

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_1^x (8x-4y)\, dy + 1 \cdot f(x,x) - 0 = (8xy - 2y^2)\Big|_{y=1}^{y=x} + x^2, \\ &= (8x^2 - 2x^2) - (8x - 2) + x^2, \\ &= 7x^2 - 8x + 2. \end{aligned}$$

□

· [4] Izračun α, β, f in njihovih odvodov.

· [4] Izračun odvoda funkcije f.

· [2] Rezultat.

8. [10] Izračunaj integrala:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty t^5 e^{-t}\,dt$,

(b) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2 - x^3}\,dx$.

Rešitev:

(a) $$\int_0^\infty t^5 e^{-t}\,dt = \int_0^\infty t^{6-1} e^{-t}\,dt = \Gamma(6) = 5! = 120.$$

(b) $$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{x^2 - x^3}\,dx &= \int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx = \int_0^1 x^{2-1}(1-x)^{\frac{3}{2}-1}\,dt,\\ &= B\left(2, \frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(2\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = \frac{1\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{15}.\end{aligned}$$

□

· [2] Uporaba funkcije gama.
· [2] Rezultat.
· [3] Uporaba funkcije beta.
· [3] Rezultat.