Rešitve in kriterij ocenjevanja 2. kolokvija iz Matematike 2

1. [10] Izračunaj integral funkcije $f(x,y) = x^2 + y^2 + x + y$ po krogu $x^2 + y^2 \le 4$.

   Rešitev: Krog $x^2 + y^2 \le 4$ lahko v polarnih koordinatah parametriziramo s predpisoma $\phi \in [0, 2\pi]$ in $r \in [0, 2]$. Sledi:

$$
\begin{aligned}
\iint_K f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^2 (r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi + r\cos\phi + r\sin\phi)r\,dr,\\
&= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^2 (r^3 + r^2(\cos\phi + \sin\phi))\,dr,\\
&= \int_0^{2\pi} d\phi \left(\frac{r^4}{4} + \frac{r^3}{3}(\cos\phi + \sin\phi)\right)\Bigg|_{r=0}^{r=2},\\
&= \int_0^{2\pi} d\phi \left(4 + \frac{8}{3}(\cos\phi + \sin\phi)\right),\\
&= \left(4\phi + \frac{8}{3}(\sin\phi - \cos\phi)\right)\Bigg|_0^{2\pi},\\
&= 8\pi.
\end{aligned}
$$

□

· [2] Izračun mej.
· [3] Integracija po spremenljivki r.
· [3] Integracija po spremenljivki ϕ.
· [2] Rezultat.

2. [15] Poišči središče lika, ki je omejen s krivuljami $y = x$, $x = 0$, $y = 2 - x^2$ in leži v desni polravnini.

Rešitev: Lik lahko parametriziramo s predpisoma $x \in [0, 1]$ in $y \in [x, 2 - x^2]$. Njegova ploščina je enaka

$$S = \int_0^1 ((2 - x^2) - x)\, dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{7}{6}.$$

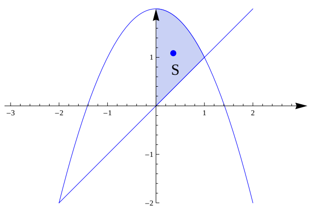
Nadalje velja:

$$\iint_L x\, dx\, dy = \int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} x\, dy = \int_0^1 dx\, (xy)\Big|_{y=x}^{y=2-x^2} = \int_0^1 (2x - x^3 - x^2)\, dx,$$
$$= \left(x^2 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{5}{12},$$
$$\iint_L y\, dx\, dy = \int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} y\, dy = \int_0^1 dx\, \left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=x}^{y=2-x^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 dx\, \left((2 - x^2)^2 - x^2\right),$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^4 - 5x^2 + 4\right)\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^5}{5} - \frac{5}{3}x^3 + 4x\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{19}{15}.$$

Koordinati središča lika sta torej:

$$x_* = \frac{\iint_L x\, dx\, dy}{S} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{7}{6}} = \frac{5}{14},$$
$$y_* = \frac{\iint_L y\, dx\, dy}{S} = \frac{\frac{19}{15}}{\frac{7}{6}} = \frac{38}{35}.$$

Poglejmo še skico.



□

- · [2] Parametrizacija lika.
- · [2] Ploščina lika.
- · [4] Izračun: $\iint_L x\, dx\, dy$.
- · [4] Izračun: $\iint_L y\, dx\, dy$.
- · [3] Koordinate središča.

3. [10] Izračunaj integral funkcije $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + xz + 1$ po kvadru, omejenem z ravninami $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ in $z = 2$.

Rešitev: Kvader lahko parametriziramo z $x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$ in $z \in [0,2]$. Sledi:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^2 (x^2 - y^2 + xz + 1)\, dz &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left(x^2 z - y^2 z + x\frac{z^2}{2} + z \right) \Bigg|_{z=0}^{z=2}, \\
&= \int_0^1 dx \int_0^1 (2x^2 - 2y^2 + 2x + 2)\, dy, \\
&= \int_0^1 dx \left(2x^2 y - \frac{2}{3} y^3 + 2xy + 2y \right) \Bigg|_{y=0}^{y=1}, \\
&= \int_0^1 \left(2x^2 - \frac{2}{3} + 2x + 2 \right) dx, \\
&= \left(\frac{2}{3} x^3 + \frac{4x}{3} + x^2 \right) \Bigg|_{x=0}^{x=1}, \\
&= 3.
\end{aligned}
$$

$\square$

· [2] Izračun mej.
· [2] Integracija po spremenljivki z.
· [2] Integracija po spremenljivki y.
· [2] Integracija po spremenljivki x.
· [2] Rezultat.

4. [15] Poišči rešitev enačbe

$$y' - \frac{y}{x} = 2x^2$$

pri začetnemu pogoju $y(1) = 2$.

Rešitev: Homogeni del:
Imamo enačbo:

$$\begin{aligned} y' - \frac{y}{x} &= 0, \\ \frac{dy}{y} &= \frac{dx}{x}, \\ \ln y &= \ln x + c, \\ y &= e^{\ln x + c}, \\ y &= Cx. \end{aligned}$$

Nehomogeni del:
Vzemimo nastavek

$$y(x) = C(x)x.$$

Potem je $y'(x) = C'(x)x + C(x)$. Če to vstavimo v enačbo, dobimo:

$$\begin{aligned} C'(x)x + C(x) - C(x) &= 2x^2, \\ C'(x) &= 2x, \\ C(x) &= \int 2x\,dx = x^2 + C. \end{aligned}$$

Od tod dobimo

$$y(x) = C(x)x = (x^2 + C)x = x^3 + Cx.$$

Z upoštevanjem začetnega pogoja dobimo $y(1) = 1 + C = 2$, od koder sledi $C = 1$. Rešitev enačbe je torej funkcija

$$y(x) = x^3 + x.$$

□

· [5] Rešitev homogene enačbe.
· [5] Rešitev nehomogene enačbe.
· [2] Izračun konstante C.
· [3] Rešitev enačbe.

5. [10] Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y'' + 3y' + 2y = 10\cos x.$$

Rešitev: Homogeni del:

Karakteristična enačba $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ ima rešitvi $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_2 = -2$, zato je splošna rešitev homogene enačbe

$$y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

Nehomogeni del:

Nehomogeni del je kosinusna funkcija, zato vzemimo nastavek $y_p(x) = A\cos x + B\sin x$. Sledi:

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= -A\sin x + B\cos x, \\ y_p''(x) &= -A\cos x - B\sin x. \end{aligned}$$

Ko to vstavimo v diferencialno enačbo, dobimo:

$$\begin{aligned} -A\cos x - B\sin x + 3(-A\sin x + B\cos x) + 2(A\cos x + B\sin x) &= 10\cos x, \\ (A + 3B)\cos x + (B - 3A)\sin x &= 10\cos x. \end{aligned}$$

Od tod dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} A + 3B &= 10, \\ -3A + B &= 0, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = 1$ in $B = 3$. Partikularna rešitev je tako enaka $y_p(x) = \cos x + 3\sin x$, splošna rešitev enačbe pa je

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \cos x + 3\sin x.$$

□

· [4] Rešitev homogene enačbe.
· [4] Partikularna rešitev.
· [2] Rešitev enačbe.

6. [10] V prvi posodi imamo 3 bele in 3 črne kroglice, v drugi pa 2 beli in 2 črni. Iz prve posode na slepo izberemo dve kroglici in ju prenesemo v drugo posodo, nato pa iz druge posode izvlečemo eno kroglico. Kolikšna je verjetnost, da je ta kroglica bela?

Rešitev: Iskano verjetnost bomo izračunali s pomočjo obrazca za popolno verjetnost. Za hipoteze bomo vzeli:

$H_1 \ldots$ iz prve v drugo posodo prenesemo dve beli kroglici,
$H_2 \ldots$ iz prve v drugo posodo prenesemo eno belo in eno črno kroglico,
$H_3 \ldots$ iz prve v drugo posodo prenesemo dve črni kroglici.

Verjetnosti hipotez so naslednje. V prvi posodi je šest kroglic, dve izmed njih pa lahko izberemo na $\binom{6}{2} = 15$ načinov. Dve beli ali dve črni lahko izberemo na po tri načine, eno belo in eno črno pa na devet načinov. Torej je $P(H_1) = \frac{3}{15}$, $P(H_2) = \frac{9}{15}$ in $P(H_3) = \frac{3}{15}$. Označimo še

$A \ldots$ Iz druge posode izvlečemo belo kroglico.

Potem iz predpostavk sledi $P(A|H_1) = \frac{4}{6}$, $P(A|H_2) = \frac{3}{6}$ in $P(A|H_3) = \frac{2}{6}$. Sledi

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3) = \frac{3}{15} \cdot \frac{4}{6} + \frac{9}{15} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{2}.$$

□

· [4] Izračun $P(H_1)$, $P(H_2)$ in $P(H_3)$.
· [4] Izračun $P(A|H_1)$, $P(A|H_2)$ in $P(A|H_3)$.
· [2] Rezultat.

7. [10] Štirikrat zapored vržemo kovanec in z X označimo število grbov v teh štirih metih. Izračunaj porazdelitev in povprečno vrednost slučajne spremenljivke X.

Rešitev: Slučajna spremenljivka X je porazdeljena binomsko s parametroma $n = 4$ in $p = \frac{1}{2}$. Posamezne verjetnosti bomo izračunali z Bernoullijevo formulo:

$$\begin{aligned}
P(X = 0) &= \binom{4}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16},\\
P(X = 1) &= \binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{16},\\
P(X = 2) &= \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16},\\
P(X = 3) &= \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{4}{16},\\
P(X = 4) &= \binom{4}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

Porazdelitev X je torej

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{4}{16} & \frac{6}{16} & \frac{4}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}.$$

Povprečna vrednost X pa je

$$E(X) = 1 \cdot \frac{4}{16} + 2 \cdot \frac{6}{16} + 3 \cdot \frac{4}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = 2.$$

□

· [5] Porazdelitev X.

· [5] Povprečna vrednost X.

8. [10] Na izpitu je 30 vprašanj izbirnega tipa, študent pa izpit opravi, če pravilno odgovori na vsaj 20 vprašanj. Denimo, da študent pride na izpit nepripravljen in pri vsakem vprašanju naključno izbere enega izmed dveh možnih odgovorov. Z Laplaceovo aproksimacijo oceni verjetnost, da študent opravi izpit.

   Rešitev: Označimo z X število pravilnih odgovorov, ki jih študent ugane. Potem je X porazdeljena binomsko s parametroma $n = 30$ in $p = 1/2$. Sledi

$$\begin{aligned} P(20 \leq X \leq 30) &\approx \Phi\left(\frac{30-15}{\sqrt{30 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}\right) - \Phi\left(\frac{20-15}{\sqrt{30 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}\right), \\ &= \Phi(5.48) - \Phi(1.83) = 0.5 - 0.47, \\ &= 0.03. \end{aligned}$$

□

· [5] Laplaceova aproksimacija.

· [5] Rezultat.