Rešitve in kriterij ocenjevanja 2. kolokvija iz Matematike 2

1. [10] Izračunaj integral funkcije $f(x,y) = x^2y + xy + y^2 + 1$ po kvadratu, ki ga omejujejo premice $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ in $y = 1$.

   Rešitev: Kvadrat je parametriziran z $x \in [0,1]$ in $y \in [0,1]$. Sledi

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dx \int_0^1 (x^2y + xy + y^2 + 1)\, dy &= \int_0^1 dx \left(\frac{x^2y^2}{2} + \frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{3} + y \right) \Bigg|_{y=0}^{y=1}, \\
&= \int_0^1 dx \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{3} + 1 \right), \\
&= \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} + \frac{4x}{3} \right) \Bigg|_{x=0}^{x=1}, \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{4}{3}, \\
&= \frac{7}{4}.
\end{aligned}$$

$\square$

· [2] Izračun mej.
· [3] Integracija po spremenljivki x.
· [3] Integracija po spremenljivki y.
· [2] Rezultat.

2. [15] Poišči središče krožnega izseka $x^2 + y^2 \leq 4$, $x \leq 0$ in $y \geq 0$.

Rešitev: Iščemo središče četrtine kroga, ki leži v drugem kvadrantu. Parametriziramo ga lahko v polarnih koordinatah s predpisoma $\phi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ in $r \in [0, 2]$. Njegova ploščina je enaka četrtini ploščine kroga s polmerom $R = 2$, kar je $S = \frac{1}{4}\pi \cdot 2^2 = \pi$. Poleg tega je

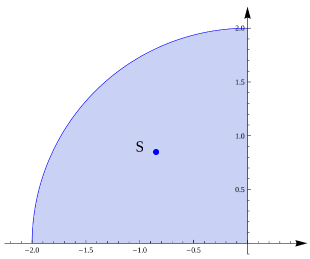
$$
\begin{aligned}
\iint_L x\,dx\,dy &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\phi \int_0^2 r\cos\phi\, r\,dr = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\phi \left(\cos\phi\,\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=2}, \\
&= \frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\phi\,d\phi = \frac{8}{3}\sin\phi\Big|_{\phi=\frac{\pi}{2}}^{\phi=\pi}, \\
&= -\frac{8}{3},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\iint_L y\,dx\,dy &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\phi \int_0^2 r\sin\phi\, r\,dr = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\phi \left(\sin\phi\,\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=2}, \\
&= \frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin\phi\,d\phi = -\frac{8}{3}\cos\phi\Big|_{\phi=\frac{\pi}{2}}^{\phi=\pi}, \\
&= \frac{8}{3},
\end{aligned}
$$

Od tod dobimo koordinati središča krožnega izseka:

$$
\begin{aligned}
x_* &= \frac{\iint_L x\,dx\,dy}{S} = \frac{-\frac{8}{3}}{\pi} = -\frac{8}{3\pi}, \\
y_* &= \frac{\iint_L y\,dx\,dy}{S} = \frac{\frac{8}{3}}{\pi} = \frac{8}{3\pi}.
\end{aligned}
$$

Poglejmo še skico.



$\square$

· [2] Ploščina krožnega izseka.

· [2] Parametrizacija krožnega izseka.

· [4] Izračun: $\iint_L x\,dx\,dy$.

· [4] Izračun: $\iint_L y\,dx\,dy$.

· [3] Koordinate središča.

3. [10] Izračunaj integral funkcije $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$ po valju, ki ga omejujejo ravnini $z = 0$, $z = 2$ ter ploskev $x^2 + y^2 = 1$.

Rešitev: Valj parametriziramo s predpisom:

$$\begin{aligned} \phi &\in [0, 2\pi], \\ r &\in [0, 1], \\ z &\in [0, 2]. \end{aligned}$$

Ker je $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z = r^2 + z$, dobimo:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 dr \int_0^2 (r^2 + z)\, r\, dz &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 dr \left(zr^3 + \frac{rz^2}{2} \right) \Bigg|_{z=0}^{z=2}, \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 dr\, (2r^3 + 2r), \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \left(\frac{2r^4}{4} + r^2 \right) \Bigg|_{r=0}^{r=1}, \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \left(\frac{1}{2} + 1 \right), \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} d\phi, \\ &= 3\pi. \end{aligned}$$

□

· [2] Izračun mej.
· [2] Integracija po spremenljivki z.
· [2] Integracija po spremenljivki r.
· [2] Integracija po spremenljivki ϕ.
· [2] Rezultat.

4. [15] Poišči rešitev enačbe

$$xy' - 2y = 2$$

pri začetnemu pogoju $y(1) = 0$.

Rešitev: Homogeni del:

Imamo enačbo:

$$\begin{aligned} xy' - 2y &= 0, \\ \frac{dy}{y} &= 2\frac{dx}{x}, \\ \ln y &= 2\ln x + c, \\ y &= e^{2\ln x + c}, \\ y &= Cx^2. \end{aligned}$$

Nehomogeni del:

Vzemimo nastavek

$$y(x) = C(x)x^2.$$

Potem je $y'(x) = C'(x)x^2 + 2xC(x)$. Če to vstavimo v enačbo, dobimo

$$\begin{aligned} x(C'(x)x^2 + 2xC(x)) - 2C(x)x^2 &= 2, \\ C'(x) &= \frac{2}{x^3}, \\ C(x) &= \int \frac{2}{x^3}\,dx = -\frac{1}{x^2} + C. \end{aligned}$$

Od tod dobimo

$$y(x) = C(x)x^2 = \left(-\frac{1}{x^2} + C\right)x^2 = -1 + Cx^2.$$

Z upoštevanjem začetnega pogoja dobimo $y(1) = -1 + C = 0$, od koder sledi $C = 1$. Rešitev enačbe je torej funkcija

$$y(x) = x^2 - 1.$$

□

· [5] Rešitev homogene enačbe.
· [5] Rešitev nehomogene enačbe.
· [2] Izračun konstante C.
· [3] Rešitev enačbe.

5. [10] Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y'' + 4y = 4x + 4.$$

Rešitev: Homogeni del:

Karakteristična enačba $\lambda^2 + 4 = 0$ ima dve kompleksni rešitvi $\lambda_1 = 2i$ in $\lambda_2 = -2i$, zato je splošna rešitev homogene enačbe

$$y_h(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Nehomogeni del:

Nehomogeni del je linearna funkcija, zato vzemimo za nastavek linearno funkcijo $y_p(x) = Ax + B$. Sledi

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= A, \\ y_p''(x) &= 0. \end{aligned}$$

Če to vstavimo v diferencialno enačbo, dobimo

$$4(Ax + B) = 4x + 4,$$

kar lahko prepišemo v sistem enačb

$$\begin{aligned} 4A &= 4, \\ 4B &= 4. \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je $A = B = 1$. Torej je $y_p(x) = x + 1$ in

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x + 1.$$

□

· [4] Rešitev homogene enačbe.
· [4] Partikularna rešitev.
· [2] Rešitev enačbe.

6. [10] Na polici so 3 slovenske, 3 angleške in 4 nemške knjige. S police naključno izberemo 3 knjige.

   (a) [5] Kolikšna je verjetnost, da so vse tri knjige v istem jeziku?
   (b) [5] Kolikšna je verjetnost, da so vse tri knjige v različnih jezikih?

Rešitev: Na polici je 10 knjig, naključno pa izberemo 3 knjige. Število vseh možnih izbir treh knjig izmed desetih je enako $\binom{10}{3} = 120$.

a) Če so vse tri knjige v istem jeziku, so lahko vse tri slovenske, vse tri angleške ali pa vse tri nemške. Vseh možnosti je $1 + 1 + 4 = 6$. Od tod sledi

$$P(\text{vse knjige v istem jeziku}) = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}.$$

b) Če so vse tri knjige v različnih jezikih, mora biti ena slovenska, ena angleška in ena nemška. Število takšnih trojic je enako $3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$. Sledi

$$P(\text{vse knjige v različnih jezikih}) = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}.$$

□

· [3] Število trojic knjig v istem jeziku.
· [2] Rezultat.
· [3] Število trojic knjig v različnih jezikih.
· [2] Rezultat.

7. [10] Na izpit iz matematike je prišlo 10 študentov. 8 izmed njih se je učilo, 2 pa sta na izpit prišla nepripravljena. Študent, ki se uči, opravi izpit z 90-odstotno verjetnostjo, študent, ki se ne uči, pa z 10-odstotno verjetnostjo. Kolikšna je verjetnost, da bo naključno izbrani študent opravil izpit?

Rešitev: Iskano verjetnost bomo izračunali s pomočjo obrazca za popolno verjetnost. Za hipotezi bomo vzeli

$H_1 \ldots$ izbrani študent se je učil,
$H_2 \ldots$ izbrani študent se ni učil.

Verjetnosti, da se zgodita H_1 oziroma H_2 sta $P(H_1) = \frac{8}{10}$ in $P(H_2) = \frac{2}{10}$. Označimo še

$A \ldots$ izbrani študent opravi izpit.

Potem iz predpostavk sledi $P(A|H_1) = \frac{9}{10}$ in $P(A|H_2) = \frac{1}{10}$. Sledi

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{74}{100}.$$

□

· [4] Izračun $P(H_1)$ in $P(H_2)$.
· [4] Izračun $P(A|H_1)$ in $P(A|H_2)$.
· [2] Rezultat.

8. [10] V posodi je 10 kroglic s številkami. Na eni kroglici je zapisana številka 1, na dveh številka 2, na treh številka 3 in na štirih številka 4. Iz posode naključno izberemo eno kroglico in z X označimo številko na njej. Izračunaj povprečno vrednost slučajne spremenljivke X.

Rešitev: Možne vrednosti X so 1, 2, 3 in 4, njena porazdelitev pa je

$$X : \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{3}{10} & \frac{4}{10} \end{array} \right).$$

Od tod sledi

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{2}{10} + 3 \cdot \frac{3}{10} + 4 \cdot \frac{4}{10} = 3.$$

□

· [5] Porazdelitev X.

· [5] Povprečna vrednost X.