Matematika 2

Diferencialne enačbe drugega reda

(1) Reši homogene diferencialne enačbe drugega reda s konstantnimi koeficienti:

(a) $y'' - 6y' + 8y = 0$,
(b) $y'' - 2y' + y = 0$,
(c) $y'' + y = 0$,
(d) $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Rešitev: Homogene diferencialne enačbe drugega reda s konstantnimi koeficienti so enačbe oblike

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Z nastavkom $y = e^{\lambda x}$ pridemo do karakteristične enačbe

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Rešitvi $\lambda_{1,2}$ karakteristične enačbe imenujemo karakteristični števili. Splošna rešitev enačbe je odvisna od karakterističnih števil. Zapišemo jo lahko v obliki

- $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, če sta $\lambda_1 \neq \lambda_2$ realni števili.
- $y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x}$, če je $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$.
- $y(x) = C_1 e^{\lambda x} \cos \omega x + C_2 e^{\lambda x} \sin \omega x$, če je $\lambda_1 = \lambda + i\omega$ in $\lambda_2 = \lambda - i\omega$.

(a) $y'' - 6y' + 8y = 0$:

Karakteristična enačba $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ ima rešitvi $\lambda_1 = 2$ in $\lambda_2 = 4$. Torej je splošna rešitev diferencialne enačbe

$$y(x) = \underline{\underline{C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}}}.$$

(b) $y'' - 2y' + y = 0$:

Karakteristična enačba $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ ima rešitev $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Splošna rešitev je

$$y(x) = \underline{\underline{(C_1 + C_2 x) e^{x}}}.$$

(c) $y'' + y = 0$:

Karakteristična enačba $\lambda^2 + 1 = 0$ ima imaginarni rešitvi $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Splošna rešitev se zato glasi

$$y(x) = \underline{\underline{C_1 \cos x + C_2 \sin x}}.$$

(d) $y'' + 2y' + 2y = 0$:

Karakteristična enačba $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ ima kompleksni rešitvi $\lambda_1 = -1 + i$ in $\lambda_2 = -1 - i$. Splošna rešitev pa je

$$y(x) = \underline{\underline{C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x}}.$$

□

(2) Z metodo nedoločenih koeficientov reši nehomogene diferencialne enačbe:

(a) $y'' - 4y' + 3y = 3x - 4$,
(b) $y'' - 7y' + 10y = 4e^x$,
(c) $y'' + 4y' - 5y = 26 \sin x$.

Rešitev: Nehomogeno diferencialno enačbo drugega reda s konstantnimi koeficienti lahko zapišemo v obliki

$$y'' + ay' + by = r(x).$$

Splošna rešitev enačbe je oblike

$$y = y_h + y_p,$$

kjer je y_h rešitev homogene enačbe, partikularno rešitev y_p pa lahko poskusimo najti z metodo nedoločenih koeficientov, če je nehomogeni člen naslednje oblike:

Nehomogeni člen	Nastavek
$p(x)$	$P(x)$
$C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$	$A \cos \omega x + B \sin \omega x$
$Ce^{\lambda x}$	$Ae^{\lambda x}$

Pri tem je P polinom iste stopnje kot polinom p, katerega koeficiente moramo še določiti. Če je nehomogeni člen vsota večih členov, izračunamo partikularno rešitev za vsak člen posebej in nato te rešitve seštejemo.

(a) $y'' - 4y' + 3y = 3x - 4$:

Homogeni del:

Karakteristična enačba $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ ima rešitvi $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = 3$. Dobimo

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

Nehomogeni del:

Nehomogeni del je linearna funkcija, zato vzemimo za nastavek poljubno linearno funkcijo $y_p(x) = Ax + B$. Od tod sledi

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= A, \\ y_p''(x) &= 0. \end{aligned}$$

Če to vstavimo v diferencialno enačbo, dobimo

$$-4A + 3(Ax + B) = 3x - 4,$$

kar prepišemo v sistem enačb

$$\begin{aligned} 3A &= 3, \\ 3B - 4A &= -4. \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je $A = 1$ in $B = 0$. Sledi $y_p(x) = x$ in

$$y(x) = \underline{\underline{C_1 e^x + C_2 e^{3x} + x}}.$$

(b) $y'' - 7y' + 10y = 4e^x$:

Homogeni del:

Karakteristična enačba $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$ ima rešitvi $\lambda_1 = 2$ in $\lambda_2 = 5$, kar nam da

$$y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}.$$

Nehomogeni del:

Nehomogeni del je eksponentna funkcija. Če vzamemo nastavek $y_p(x) = Ae^x$, dobimo $y_p'(x) = Ae^x$ in $y_p''(x) = Ae^x$. Ko to vstavimo v diferencialno enačbo, dobimo

$$Ae^x - 7Ae^x + 10Ae^x = 4e^x,$$

od koder dobimo enačbo $4A = 4$, ki ima rešitev $A = 1$. Sledi $y_p(x) = e^x$ in

$$y(x) = \underline{\underline{C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x} + e^x}}.$$

(c) $y'' + 4y' - 5y = 26 \sin x$:

Homogeni del:

Karakteristična enačba $\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$ ima rešitvi $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = -5$, zato je

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-5x}.$$

Nehomogeni del:

Na desni strani imamo sinusno funkcijo, zato bomo vzeli nastavek $y_p(x) = A \sin x + B \cos x$.

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= A \cos x - B \sin x, \\ y_p''(x) &= -A \sin x - B \cos x. \end{aligned}$$

Ko to vstavimo v diferencialno enačbo, dobimo enačbo

$$\begin{aligned} -A \sin x - B \cos x + 4A \cos x - 4B \sin x - 5A \sin x - 5B \cos x &= 26 \sin x, \\ (-6A - 4B) \sin x + (4A - 6B) \cos x &= 26 \sin x. \end{aligned}$$

S primerjavo koeficientov pri funkcijah sin in cos pridemo do sistema enačb

$$\begin{aligned} -6A - 4B &= 26, \\ 4A - 6B &= 0, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = -3$, $B = -2$. Torej je $y_p(x) = -3 \sin x - 2 \cos x$, splošna rešitev pa je

$$y(x) = \underline{\underline{C_1 e^x + C_2 e^{-5x} - 3 \sin x - 2 \cos x}}.$$

$\square$

(3) Reši diferencialne enačbe pri danih začetnih pogojih:

(a) $y'' - y = 2\cos x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$,
(b) $y'' - 4y' + 4y = 12x - 12$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$.

Rešitev:

(a) $y'' - y = 2\cos x,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0$:

Homogeni del:

Karakteristična enačba $\lambda^2 - 1 = 0$ ima rešitvi $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = -1$. Sledi

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Nehomogeni del:

Nehomogeni člen je kosinusna funkcija, zato je primeren nastavek $y_p(x) = A\cos x + B\sin x$. Odvoda partikularne rešitve sta enaka

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= -A\sin x + B\cos x, \\ y_p''(x) &= -A\cos x - B\sin x. \end{aligned}$$

Sedaj dobimo enačbo

$$-A\cos x - B\sin x - (A\cos x + B\sin x) = 2\cos x,$$

od koder sledi

$$\begin{aligned} -2A &= 2, \\ -2B &= 0. \end{aligned}$$

Partikularna rešitev je tako enaka $y_p(x) = -\cos x$, splošna rešitev enačbe pa je

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \cos x.$$

Konstanti C_1 in C_2 bomo določili z upoštevanjem začetnih pogojev. Iz enakosti

$$y'(x) = C_1 e^x - C_2 e^{-x} + \sin x$$

sledi

$$\begin{aligned} -1 = y(0) &= C_1 + C_2 - 1, \\ 0 = y'(0) &= C_1 - C_2. \end{aligned}$$

Sledi $C_1 = C_2 = 0$, kar pomeni, da je rešitev enačbe pri danih začetnih pogojih funkcija

$$y(x) = \underline{\underline{-\cos x}}.$$

(b) $y'' - 4y' + 4y = 12x - 12,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 5$:

Homogeni del:

Karakteristična enačba $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ ima dvojno ničlo $\lambda_{1,2} = 2$, kar pomeni, da je splošna rešitev homogene enačbe oblike

$$y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

Nehomogeni del:

Nehomogeni člen je linearna funkcija, zato bomo vzeli nastavek $y_p(x) = Ax + B$. Odvoda partikularne rešitve sta $y_p'(x) = A$ in $y_p''(x) = 0$, kar nam da

$$-4A + 4(Ax + B) = 12x - 12.$$

Dobimo sistem

$$\begin{aligned} 4A &= 12, \\ -4A + 4B &= -12, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = 3$ in $B = 0$. Partikularna rešitev je $y_p(x) = 3x$, splošna rešitev enačbe pa je

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + 3x.$$

Z odvajanjem

$$y'(x) = 2C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x} + 2C_2 x e^{2x} + 3$$

in upoštevanjem začetnih pogojev dobimo

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = C_1, \\ 5 &= y'(0) = 2C_1 + C_2 + 3. \end{aligned}$$

Sledi $C_1 = 1$ in $C_2 = 0$, zato je rešitev enačbe funkcija

$$y(x) = \underline{\underline{e^{2x} + 3x}}.$$

$\square$

(4) Na vzmet s koeficientom $k = 100\,\mathrm{N/m}$ je pripeta utež z maso $m = 1\,\mathrm{kg}$. Vzmet raztegnemo za $0.1\,\mathrm{m}$ in pustimo, da niha. Nihanje vzmeti je modelirano z diferencialno enačbo

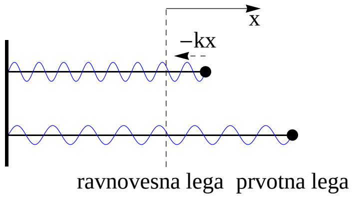
$$mx'' + kx = 0.$$

Natančno izračunaj, kako se vzmet premika v odvisnosti od časa.

Rešitev: Naš sistem je sestavljen iz uteži in vzmeti. Če utež izmaknemo iz ravnovesne lege, jo vzmet vleče nazaj v ravnovesje. Privzeli bomo, da se lahko sistem giblje v smeri vzmeti in uporabili oznake

- $x = x(t) \ldots$ odmik uteži iz ravnovesne lege,
- $x'' = x''(t) \ldots$ pospešek uteži.

Na utež deluje sila vzmeti $F_{\mathrm{vz}} = -kx$, ki jo dobimo iz Hookovega zakona.



Newtonov zakon lahko sedaj zapišemo v obliki

$$ma = F_{\mathrm{vz}}.$$

Če upoštevamo, da je pospešek enak $a = x''$, dobimo enačbo

$$mx'' = -kx$$

oziroma

$$x'' + \omega^2 x = 0,$$

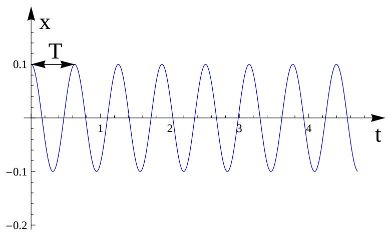
kjer smo označili $\omega^2 = \frac{k}{m}$. To je homogena diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti, ki ima splošno rešitev

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Njen odvod je enak $\dot{x}(t) = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t$. Naši začetni pogoji so $x(0) = 0.1$ in $\dot{x}(0) = 0$. Če jih upoštevamo, dobimo, da je $C_1 = 0.1$ in $C_2 = 0$. Torej je rešitev

$$x(t) = 0.1 \cos \omega t.$$

Vidimo, da vzmet harmonično niha.



Amplituda nihanja je enaka

$$A = 0.1\,\mathrm{m}.$$

Parametru $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ rečemo krožna frekvenca. V našem primeru je

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{1}}\,\mathrm{Hz} = 10\,\mathrm{Hz}.$$

Nihajni čas je enak

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 0.63\mathrm{s}.$$

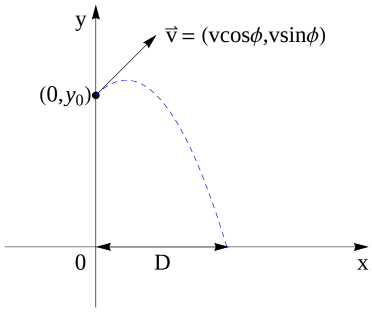
□

(5) Telo z maso m se premika pod vplivom sile teže. Na začetku je na višini y_0 in ima hitrost v v smeri, ki je pod kotom ϕ glede na vodoravnico.

(a) Izračunaj parabolo leta.

(b) Izračunaj domet telesa.

Rešitev: (a) Pri tej nalogi si bomo pogledali poševni met. Zaradi enostavnosti bomo privzeli, da se v začetnem trenutku masna točka nahaja na y-osi.



Masna točka se giblje pod vplivom sile teže $\vec{F} = (0, -mg)$, njen položaj ob času t pa bomo označili z $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$.

Gibanje točke po prostoru določa drugi Newtonov zakon

$$\vec{F} = m\vec{r}''.$$

Matematično gledano je to sistem dveh navadnih diferencialnih enačb drugega reda, ki ga po komponentah lahko zapišemo v obliki

$$\begin{aligned} mx'' &= 0, \\ my'' &= -mg. \end{aligned}$$

Rešitev takšnega sistema diferencialnih enačb je določena z začetnim položajem in pa z začetno hitrostjo točke

$$\begin{aligned} \vec{r}(0) &= (0, y_0), \\ \vec{r}'(0) &= (v\cos\phi, v\sin\phi). \end{aligned}$$

V našem primeru so na srečo komponente sistema separirane, zato lahko vsako enačbo rešimo posebej. V bistvu nam niti ni potrebno znati reševati diferencialnih enačb, saj zadostuje že dvakratno integriranje.

V smeri osi x:

Z integriranjem enačbe $mx'' = 0$ (oziroma $x'' = 0$) dobimo

$$\begin{aligned} x' &= C, \\ x &= Ct + D. \end{aligned}$$

Z upoštevanjem začetnih pogojev $x(0) = 0$ in $\dot{x}(0) = v_x$ od tod sledi

$$x(t) = v\cos\phi\, t.$$

V smeri osi y:
V navpični smeri z integriranjem enačbe $my'' = -mg$ (oziroma $y'' = -g$) dobimo

$$y' = -gt + C,$$
$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + Ct + D.$$

Če upoštevamo, da je $y(0) = y_0$ in $\dot{y}(0) = v\sin\phi$, dobimo

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v\sin\phi\, t + y_0.$$

Trajektorija točke pri poševnem metu je torej

$$\vec{r}(t) = \left(v\cos\phi\, t, -\frac{1}{2}gt^2 + v\sin\phi\, t + y_0\right).$$

V tem zapisu za vsak čas natančno vemo, kje se točka nahaja. Če iz enakosti $x = v\cos\phi\, t$ izrazimo t in rezultat vstavimo v $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v\sin\phi\, t + y_0$, pa dobimo, da se točka giblje po paraboli

$$y = -\frac{g}{2v^2\cos^2\phi}x^2 + \operatorname{tg}\phi\, x + y_0.$$

(b) Sedaj nas bo zanimalo, kje točka pade na tla. Tam bo $y = 0$ oziroma

$$-\frac{g}{2v^2\cos^2\phi}x^2 + \operatorname{tg}\phi\, x + y_0 = 0.$$

Ta kvadratna enačba ima dve rešitvi: eno pozitivno in eno negativno. Pozitivna rešitev je enaka dometu

$$D = \frac{\operatorname{tg}\phi + \sqrt{\operatorname{tg}^2\phi + \frac{4gy_0}{2v^2\cos^2\phi}}}{\frac{g}{2v^2\cos^2\phi}}.$$

Če mečemo s tal, je

$$D = \frac{2v^2}{g}\sin 2\phi,$$

od koder sledi, da bo domet maksimalen, če je začetni kot enak $\phi = 45°$. $\square$