Matematika 2

Diferencialne enačbe prvega reda

(1) Reši diferencialne enačbe z ločljivimi spremenljivkami:

(a) $y' = 2xy$,
(b) $y' \operatorname{tg} x = y$,
(c) $y' = 2x(1 + y^2)$,
(d) $xyy' = 1 - x^2$.

Rešitev: Diferencialna enačba ima *ločljive spremenljivke*, če jo lahko zapišemo v obliki

$$y' = f(x)g(y)$$

za neki zvezni funkciji f in g. Diferencialne enačbe z ločljivimi spremenljivkami rešujemo po naslednjem postopku:

(1) Zapišemo $y' = \frac{dy}{dx}$,
(2) enačbo preoblikujemo tako, da damo x-e na eno stran, y-e pa na drugo stran,
(3) integriramo vsako stran enačbe posebej,
(4) izrazimo $y = y(x)$.

(a) $y' = 2xy$:

Ta enačba ima ločljive spremenljivke. Izberemo lahko $f(x) = 2x$ in $g(y) = y$. Računajmo

$$\begin{aligned} y' &= 2xy, \\ \frac{dy}{dx} &= 2xy, \\ \frac{dy}{y} &= 2x\,dx, \\ \ln y &= x^2 + c, \\ y &= e^{x^2+c}, \\ y &= e^c e^{x^2}. \end{aligned}$$

Vidimo, da je rešitev odvisna še od konstante c. Če je c konstanta, je tudi e^c konstanta, ki jo označimo z C. Od tod dobimo splošno rešitev enačbe

$$y(x) = \underline{\underline{Ce^{x^2}}}.$$

Za vsako izbiro konstante C dobimo natanko določeno rešitev enačbe. Pri računanju smo potiho predpostavili, da je $y \neq 0$. Hitro pa se lahko prepričamo, da je rešitev enačbe tudi funkcija $y(x) = 0$.

(b) $y' \operatorname{tg} x = y$:

Tudi ta enačba ima ločljive spremenljivke. Računajmo

$$\begin{aligned} y' \operatorname{tg} x &= y, \\ \frac{dy}{y} &= \operatorname{ctg}\, dx, \\ \ln y &= \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \ln(\sin x) + c, \\ y &= e^{\ln(\sin x) + c}, \\ y &= e^c \sin x. \end{aligned}$$

Če spet pišemo $C = e^c$, dobimo splošno rešitev enačbe

$$y(x) = \underline{\underline{C \sin x}}.$$

(c) $y' = 2x(1 + y^2)$:

Sedaj imamo

$$\begin{aligned} y' &= 2x(1 + y^2), \\ \frac{dy}{1 + y^2} &= 2x\, dx, \\ \operatorname{arc\,tg} y &= x^2 + C. \end{aligned}$$

Od tod dobimo

$$y(x) = \underline{\underline{\operatorname{tg}(x^2 + C)}}.$$

(d) $xyy' = 1 - x^2$:

Računajmo:

$$\begin{aligned} xyy' &= 1 - x^2, \\ y\, dy &= \left(\frac{1}{x} - x\right) dx, \\ \frac{y^2}{2} &= \ln x - \frac{x^2}{2} + C. \end{aligned}$$

Od tod lahko izrazimo splošno rešitev enačbe

$$y(x) = \underline{\underline{\pm\sqrt{2 \ln x - x^2 + 2C}}}.$$

□

(2) Reši diferencialne enačbe pri danih začetnih pogojih:

(a) $y' = 2y$, $y(0) = 3$,

(b) $y' + xy = 0$, $y(0) = 1$,

(c) $y' = \frac{y}{x}$, $y(1) = 2$.

Rešitev: Splošna rešitev diferencialne enačbe prvega reda sestoji iz enoparametrične družine krivulj, ki so parametrizirane z neko konstanto. Točno določeno rešitev pa dobimo z upoštevanjem začetnega pogoja.

(a) $y' = 2y,\ y(0) = 3$:

Najprej poiščimo splošno rešitev dane diferencialne enačbe:

$$\begin{aligned} y' &= 2y, \\ \frac{dy}{y} &= 2\,dx, \\ \ln y &= 2x + c, \\ y &= e^{2x+c}, \\ y &= Ce^{2x}. \end{aligned}$$

Z upoštevanjem začetnega pogoja dobimo

$$3 = y(0) = Ce^{2\cdot 0} = C,$$

od koder sledi $C = 3$. Rešitev enačbe je torej funkcija

$$y(x) = \underline{\underline{3e^{2x}}}.$$

(b) $y' + xy = 0,\ y(0) = 1$:

Splošna rešitev diferencialne enačbe je:

$$\begin{aligned} y' + xy &= 0, \\ \frac{dy}{y} &= -x\,dx, \\ \ln y &= -\frac{x^2}{2} + c, \\ y &= e^{-\frac{x^2}{2}+c}, \\ y &= Ce^{-\frac{x^2}{2}}. \end{aligned}$$

Z upoštevanjem začetnega pogoja dobimo

$$1 = y(0) = Ce^{0} = C,$$

od koder sledi $C = 1$. Rešitev enačbe je funkcija

$$y(x) = \underline{\underline{e^{-\frac{x^2}{2}}}}.$$

(c) $y' = \frac{y}{x}$, $y(1) = 2$:

Splošna rešitev diferencialne enačbe je tokrat:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y}{x}, \\ \frac{dy}{y} &= \frac{dx}{x}, \\ \ln y &= \ln x + c, \\ y &= Cx. \end{aligned}$$

Začetni pogoj nam da

$$2 = y(1) = C \cdot 1 = C,$$

od koder sledi $C = 2$ in

$$y(x) = \underline{\underline{2x}}.$$

□

(3) Na banko naložimo 1000 evrov. Privzemimo, da je letna obrestna mera 5%, obresti pa se izračunavajo po relativni obrestni meri. Izračunaj vrednost glavnice po 5 letih, če se obresti kapitalizirajo letno, mesečno, dnevno in zvezno.

Rešitev: Označimo z G_0 začetno vrednost glavnice in naj bo p letna obrestna mera. Če se obresti kapitalizirajo n-krat letno, se glavnica vsako leto n-krat poveča za p/n procentov. To pomeni, da je vrednost glavnice po t letih, če vsako leto obresti kapitaliziramo n-krat, enaka

$$G_n(t) = G_0 \left(1 + \frac{p}{n}\right)^{nt}.$$

Pri posameznih kapitalizacijskih dobah bi tako po petih letih imeli na računu

$$\begin{aligned} G_1(5) &= 1000 \left(1 + \frac{0.05}{1}\right)^5 = 1276.28, \\ G_{12}(5) &= 1000 \left(1 + \frac{0.05}{12}\right)^{60} = 1283.36, \\ G_{365}(5) &= 1000 \left(1 + \frac{0.05}{365}\right)^{1825} = 1284, \end{aligned}$$

evrov. Pri zvezni kapitalizaciji, bi vrednost glavnice zadoščala diferencialni enačbi

$$G'_\infty = p\, G_\infty,$$

katere rešitev je $G_\infty(t) = G_0 e^{pt}$. Od tod sledi

$$G_\infty(5) = 1000 e^{0.25} = 1284.03$$

evrov. Vidimo, da razlike med posameznimi kapitalizacijskimi dobami (z upoštevanjem relativne obrestne mere pri fiksni letni obrestni meri) niso zelo velike. Pri čedalje pogostejši kapitalizaciji obresti se končna vrednost glavnice približuje vrednosti v zveznem primeru.

□

(4) Padalec skoči iz letala in nato pada pod vplivom sile teže in sile zračnega upora. Izračunaj, kako se spreminja hitrost padalca med padanjem in nato še njegovo končno hitrost.

Rešitev: Gibanje padalca določa drugi Newtonov zakon, ki se v tem primeru glasi

$$mv' = mg - \frac{1}{2}\rho A C_d v^2.$$

Z v smo označili hitrost padalca v navpični smeri, člena na desni pa ustrezata sili teže $F_g = mg$ ter sili zračnega upora $F_{upora} = -\frac{1}{2}\rho A C_d v^2$. Koeficienti, ki nastopajo v enačbi, imajo naslednji pomen:

- m masa padalca,
- ρ gostota zraka,
- A ploščina prereza padalca,
- C_d koeficient zračnega upora,
- g težni pospešek.

Da si malce poenostavimo računanje, uvedimo oznaki $a^2 = \frac{\rho A C_d}{2m}$ in $b^2 = g$. Po deljenju z m se enačba prevede v diferencialno enačbo

$$v' = b^2 - a^2 v^2,$$
$$\frac{dv}{b^2 - a^2 v^2} = dt.$$

Integral racionalne funkcije na levi je enak

$$\int \frac{dv}{b^2 - a^2 v^2} = \frac{1}{2ab} \ln \frac{b + av}{b - av} + C.$$

Z integriranjem tako pridemo do enakosti

$$\frac{1}{2ab} \ln \frac{b + av}{b - av} = t + C.$$

Če upoštevamo, da je na začetku hitrost padalca $v(0) = 0$, dobimo $C = 0$, kar nam da

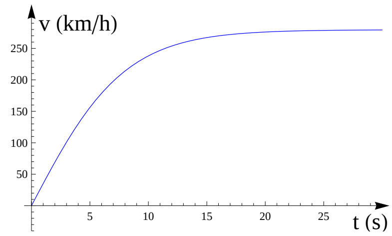
$$\ln \frac{b + av}{b - av} = 2abt.$$

Iz te enačbe lahko sedaj eksplicitno izrazimo $v(t)$. Rešitev je enaka

$$v(t) = \frac{b}{a} \cdot \frac{e^{2abt} - 1}{e^{2abt} + 1} = \sqrt{\frac{2mg}{\rho A C_d}} \cdot \frac{e^{2\sqrt{\frac{\rho A C_d g}{2m}}t} - 1}{e^{2\sqrt{\frac{\rho A C_d g}{2m}}t} + 1}.$$

V limiti dobimo končno hitrost padalca $v_k = \lim_{t\to\infty} v(t) = \sqrt{\frac{2mg}{\rho A C_d}}$.

Poglejmo si še primer s konkretnimi številkami. Vzemimo, da ima padalec $80kg$ in da je $\rho = 1.3kg/m^3$, $g = 9.8m/s^2$. Denimo še, da je padalec med padanjem v navpični legi. Potem je $C_d \approx 1$, čelni prerez pa je $A \approx 0.2m^2$. Pri teh podatkih bi bila končna hitrost padalca $v_k \approx 280km/h$, dosegel pa bi jo v približno $20s$, kot kaže spodnji graf.



$\square$

(5) Reši linearne diferencialne enačbe:

(a) $y' - 3y = 3$,
(b) $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$,
(c) $y' - y = e^{2x}$, $y(0) = 2$,
(d) $(x+1)y' - 2y = (x+1)^4$, $y(1) = 8$.

Rešitev: Linearna diferencialna enačba prvega reda je diferencialna enačba oblike

$$y' + p(x)y = q(x)$$

za neki zvezni funkciji p in q. Če je $q = 0$, je enačba *homogena*, sicer pa je *nehomogena*. Linearne diferencialne enačbe prvega reda rešujemo v dveh korakih:

(1) Poiščemo rešitev prirejene homogene enačbe $y_h(x) = Cy_0(x)$,
(2) splošno rešitev poiščemo z nastavkom $y(x) = C(x)y_0(x)$.

(a) $y' - 3y = 3$:

Homogeni del:

Prirejena homogena enačba linearne diferencialne enačbe je zmeraj enačba z ločljivimi spremenljivkami. V našem primeru je to enačba:

$$\begin{aligned}
y' - 3y &= 0,\\
\frac{dy}{y} &= 3\,dx,\\
\ln y &= 3x + c,\\
y &= e^{3x+c},\\
y &= Ce^{3x}.
\end{aligned}$$

Pri linearni diferencialni enačbi je rešitev homogene enačbe zmeraj oblike

$$y_h(x) = Cy_0(x),$$

zato ponavadi imena konstant izberemo tako, da imamo na koncu konstanto C. V našem primeru je torej $y_0(x) = e^{3x}$.

Nehomogeni del:

Splošno rešitev linearne diferencialne enačbe lahko poiščemo z metodo variacije konstante. Naj bo $y_h(x) = Cy_0(x)$ rešitev homogene enačbe in vzemimo nastavek

$$y(x) = C(x)e^{3x},$$

ki ga vstavimo v enačbo, od koder z integriranjem dobimo $C(x)$. V našem primeru je $y'(x) = C'(x)e^{3x} + 3C(x)e^{3x}$. Če to vstavimo v enačbo, dobimo

$$\begin{aligned} C'(x)e^{3x} + 3C(x)e^{3x} - 3C(x)e^{3x} &= 3, \\ C'(x) &= \frac{3}{e^{3x}} = 3e^{-3x}, \\ C(x) &= \int 3e^{-3x}\,dx = -e^{-3x} + C. \end{aligned}$$

Od tod dobimo rezultat

$$y(x) = C(x)e^{x} = \left(-e^{-3x} + C\right)e^{3x} = \underline{\underline{-1 + Ce^{3x}}}.$$

(b) $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$:

Homogeni del:

Najprej poiščimo splošno rešitev homogene enačbe:

$$\begin{aligned} y' + y\cos x &= 0, \\ \frac{dy}{y} &= -\cos x\,dx, \\ \ln y &= -\sin x + c, \\ y &= Ce^{-\sin x}. \end{aligned}$$

Nehomogeni del:

Vzemimo nastavek $y(x) = C(x)e^{-\sin x}$. Sledi $y'(x) = C'(x)e^{-\sin x} - \cos x\, C(x)e^{-\sin x}$ in

$$\begin{aligned} C'(x)e^{-\sin x} - \cos x\,C(x)e^{-\sin x} + C(x)e^{-\sin x}\cos x &= e^{-\sin x}, \\ C'(x) &= \frac{e^{-\sin x}}{e^{-\sin x}} = 1, \\ C(x) &= \int 1\,dx = x + C. \end{aligned}$$

Od tod dobimo

$$y(x) = C(x)e^{-\sin x} = (x + C)\,e^{-\sin x} = \underline{\underline{xe^{-\sin x} + Ce^{-\sin x}}}.$$

(c) $y' - y = e^{2x}$, $y(0) = 2$:

Homogeni del:

Splošna rešitev homogene enačbe je:

$$\begin{aligned} y' - y &= 0, \\ \frac{dy}{y} &= dx, \\ \ln y &= x + c, \\ y &= Ce^{x}. \end{aligned}$$

Nehomogeni del:

Sedaj je $y(x) = C(x)e^x$ in $y'(x) = C'(x)e^x + C(x)e^x$. Od tod sledi

$$\begin{aligned} C'(x)e^x + C(x)e^x - C(x)e^x &= e^{2x}, \\ C'(x) &= \frac{e^{2x}}{e^x} = e^x, \\ C(x) &= \int e^x\,dx = e^x + C. \end{aligned}$$

Splošna rešitev enačbe je

$$y(x) = C(x)e^x = (e^x + C)\,e^x = e^{2x} + Ce^x.$$

Konstanto C določimo z upoštevanjem začetnega pogoja

$$2 = y(0) = e^0 + Ce^0 = 1 + C.$$

Od tod sledi $C = 1$ in

$$y(x) = \underline{\underline{e^{2x} + e^x}}.$$

(d) $(x+1)y' - 2y = (x+1)^4,\ y(1) = 8$:

Homogeni del:

Splošna rešitev homogene enačbe je tokrat:

$$\begin{aligned} (x+1)y' - 2y &= 0, \\ \frac{dy}{y} &= \frac{2\,dx}{x+1}, \\ \ln y &= 2\ln(x+1) + c, \\ y &= C(x+1)^2. \end{aligned}$$

Nehomogeni del:

Vzeli bomo $y(x) = C(x)(x+1)^2$, od koder sledi $y'(x) = C'(x)(x+1)^2 + C(x)2(x+1)$ in

$$\begin{aligned} (x+1)\big(C'(x)(x+1)^2 + C(x)2(x+1)\big) - 2C(x)(x+1)^2 &= (x+1)^4, \\ C'(x) &= \frac{(x+1)^4}{(x+1)^3} = x + 1, \\ C(x) &= \int (x+1)\,dx = \frac{x^2}{2} + x + C. \end{aligned}$$

Splošna rešitev enačbe je

$$y(x) = C(x)(x+1)^2 = \left(\frac{x^2}{2} + x + C\right)(x+1)^2,$$

konstanta C pa zadošča enakosti

$$8 = y(1) = \left(\frac{1}{2} + 1 + C\right)4.$$

Sledi $C = \frac{1}{2}$ in

$$y(x) = \underline{\underline{\frac{1}{2}(x+1)^4}}.$$

$\square$

(6) Reši Bernoullijevi diferencialni enačbi:

(a) $y' - y = e^x y^2$,

(b) $2xy' - y = \dfrac{x^2}{y}$, pri začetnemu pogoju $y(1) = -2$.

Rešitev: Diferencialna enačba 1. reda je *Bernoullijeva*, če jo lahko zapišemo v obliki

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

za neki zvezni funkciji f in g in $n \in \mathbb{R}$. V primeru $\alpha \in \{0, 1\}$ je to linearna DE, v splošnem pa jo s substitucijo $u = y^{1-n}$ prevedemo na linearno enačbo

$$\frac{1}{1-n}u' + p(x)u = q(x).$$

(a) $y' - y = e^x y^2$:

V tem primeru je $n = 2$, zato je $u = \frac{1}{y}$ in $y = \frac{1}{u}$. Najprej moramo rešiti linearno enačbo

$$-u' - u = e^x.$$

Rešitev homogene enačbe je $u_h = Ce^{-x}$, z nastavkom $u(x) = C(x)e^{-x}$ pa dobimo:

$$\begin{aligned} -\left(C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x}\right) - C(x)e^{-x} &= e^x, \\ C'(x) &= -e^{2x}, \\ C(x) &= -\frac{1}{2}e^{2x} + C. \end{aligned}$$

Sledi

$$u(x) = \left(-\frac{1}{2}e^{2x} + C\right)e^{-x} = -\frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}$$

in

$$y(x) = \underline{\underline{\frac{1}{-\frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}}}}.$$

(b) $2xy' - y = \dfrac{x^2}{y}$:

Sedaj je $n = -1$ in $u = y^2$. Diferencialna enačba za u se tako glasi

$$\frac{1}{2} \cdot 2xu' - u = x^2.$$

Rešitev homogene enačbe $xu' - u = 0$ je $u_h = Cx$, z nastavkom $u(x) = C(x)x$ pa dobimo:

$$\begin{aligned} x\left(C'(x)x + C(x)\right) - C(x)x &= x^2, \\ C'(x) &= 1, \\ C(x) &= x + C. \end{aligned}$$

Od tod sledi $u(x) = (x + C)x = x^2 + Cx$ in

$$y(x) = \pm\sqrt{x^2 + Cx}.$$

Z upoštevanjem začetnega pogoja $-2 = y(1) = \pm\sqrt{1 + C}$ vidimo, da moramo izbrati negativen predznak in da je $C = 3$. Rešitev enačbe, ki ustreza $y(1) = -2$, je torej

$$y(x) = \underline{\underline{-\sqrt{x^2 + 3x}}}.$$

$\square$