1. sklop dodatnih vaj iz Matematike 2

(1) Izračunaj odvode funkcij:

(a) $h(x) = e^x \cos x$,

(b) $h(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+4x+2}$,

(c) $h(x) = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x$,

(d) $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$,

(e) $h(x) = \ln(\ln x)$,

(f) $h(x) = (x^2+x+1)e^{2x}$.

Rešitev:

(a) $h'(x) = e^x(\cos x - \sin x)$,

(b) $h'(x) = -\dfrac{2x(1+x)}{(x^2+4x+2)^2}$,

(c) $h'(x) = 0$,

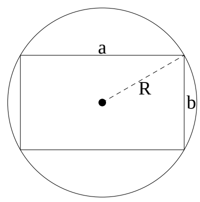
(d) $h'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$,

(e) $h'(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$,

(f) $h'(x) = (2x^2+4x+3)e^{2x}$.

(2) V krog s polmerom R včrtamo pravokotnik s stranicama a in b. Kakšni morata biti dolžini stranic a in b, da bo ploščina tega pravokotnika največja?

Rešitev: $a = b = \sqrt{2}\,R$.



(3) Izračunaj nedoločene integrale:

(a) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos x \, dx$,

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(\operatorname{arc\,tg} x)(1+x^2)}$,

(c) $\displaystyle\int 2x \operatorname{arc\,tg} x \, dx$,

(d) $\displaystyle\int x^2 \ln x \, dx$,

(e) $\displaystyle\int (x^2+1) \cos x \, dx$.

Rešitev:

(a) $I = \dfrac{1}{4}\sin^4 x + C$,

(b) $I = \ln|\operatorname{arc\,tg} x| + C$,

(c) $I = -x + (x^2+1)\operatorname{arc\,tg} x + C$,

(d) $I = -\dfrac{x^3}{9} + \dfrac{x^3 \ln x}{3} + C$,

(e) $I = 2x\cos x + (x^2-1)\sin x + C$.

(4) Izračunaj ploščine naslednjih likov:

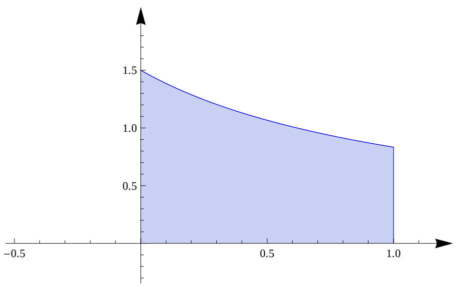
(a) lika med grafom funkcije $f(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{2+x}$ in abscisno osjo na $[0,1]$,

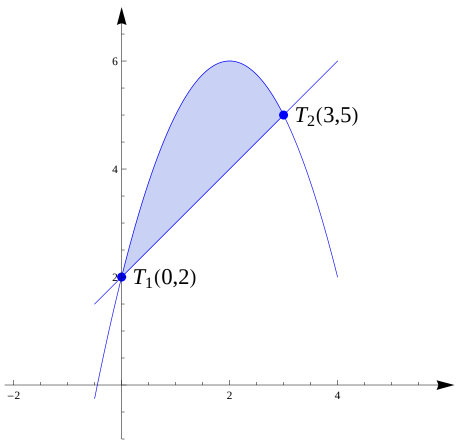
(b) lika med grafoma funkcij $f(x) = x+2$ in $g(x) = -x^2+4x+2$.

Rešitev:

(a) $S = \ln 3$,

(b) $S = \dfrac{9}{2}$.





(5) Izračunaj volumen:

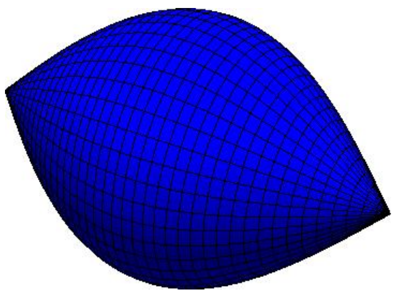
(a) vrtenine, ki jo dobimo, če zavrtimo okoli abscisne osi na $[0,\pi]$ graf funkcije $g(x) = \sin x$,

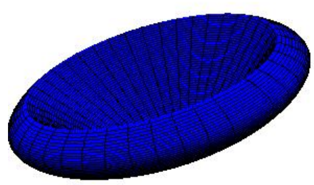
(b) vrtenine, ki jo dobimo, če zavrtimo okoli osi $y=1$ lik med grafoma funkcij $f(x) = x+2$ in $g(x) = -x^2+4x+2$.

Rešitev:

(a) $V = \dfrac{\pi^2}{2}$,

(b) $V = \dfrac{153\pi}{5}$.





(6) Poišči vse lokalne ekstreme danih funkcij in jih klasificiraj:

(a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 3x + 3y$,
(b) $f(x,y) = 4x^3 + 6x^2y + 3xy^2 - 27x - 12y$.

Rešitev:

(a) V $T(-1,-1)$ je lokalni minimum.
(b) V $T_1(2,-1)$ je lok. minimum, v $T_2(-2,1)$ je lok. maksimum, v $T_3(1,1)$ in $T_4(-1,-1)$ pa sedli.

(7) Poišči globalne ekstreme danih funkcij:

(a) $f(x,y) = 3x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 4y + 1$ na trikotniku z oglišči $A(0,0)$, $B(-2,0)$ in $C(0,-3)$,
(b) $f(x,y) = 3x^2 + 2xy - 5y^2 + 4x$ na pravokotniku $A(-2,-1)$, $B(0,-1)$, $C(0,0)$ in $D(-2,0)$,
(c) $f(x,y) = x + y + 2$ na liku, ki je omejen z abscisno osjo in parabolo $y = 1 - x^2$.

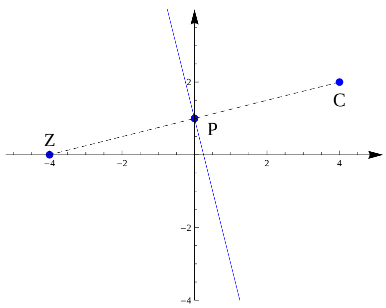
Rešitev:

(a) $\max = 22$ v točki $C\,(0,-3)$, $\min = \dfrac{2}{3}$ v točki $T\left(-\dfrac{1}{3}, 0\right)$.
(b) $\max = \dfrac{24}{5}$ v točki $T\left(-2, -\dfrac{2}{5}\right)$, $\min = -\dfrac{16}{3}$ v točki $T\left(-\dfrac{1}{3}, -1\right)$.
(c) $\max = \dfrac{13}{4}$ v točki $T\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$, $\min = 1$ v točki $T\,(-1,0)$.

(8) V ravnini sta dani premica $p:\ 4x + y - 1 = 0$ in točka $C(4,2)$.

(a) Izračunaj pravokotno projekcijo točke C na premico p.
(b) Izračunaj razdaljo točke C od premice p.
(c) Izračunaj zrcalno sliko točke C glede na premico p.

Rešitev: (a) $\mathrm{pr}_p(C) = (0,1)$, (b) $\mathrm{d}(p,C) = \sqrt{17}$, (c) $\mathrm{zrsl}_p(C) = (-4,0)$.



(9) Izračunaj normalne enačbe naslednjih ravnin:

(a) ravnine π skozi točke $A(0,-1,1)$, $B(-1,2,3)$ in $C(-2,0,2)$,
(b) ravnine π, ki vsebuje premici $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-3}{2}$ in $x = 1, y = 1, z = -2 + t$,
(c) ravnine π skozi točko $A(-1,1,1)$ in s smerjo normale $\vec{n} = (-2,1,-1)$.

Rešitev:

(a) $\pi: \ x - 3y + 5z = 8$,
(b) $\pi: \ 2x - y = 1$,
(c) $\pi: \ -2x + y - z = 2$.

(10) Izračunaj presečišča:

(a) premice p skozi točko $(0,0,0)$ in s smerjo $\vec{s} = (1,1,0)$ in premice $q: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} = z - 1$,
(b) premice $p: \ x - 3 = y - 3, \ z = 3$ ter ravnine $\pi: \ 3x + 4y + z = 17$,
(c) premice $p: \ x = -1 + t, y = 1 - t, z = 0$ ter ravnine $\pi: \ x + y + z = 1$,
(d) ravnine $\pi: \ y + z = 1$ in ravnine Σ skozi točko $(0,0,1)$ in s smerjo normale $\vec{n} = (0,1,0)$,
(e) ravnine $\pi: \ x - y + 2z = 0$ in ravnine $\Sigma: \ -3x + 3y - 6z = 1$.

Rešitev:

(a) $p \cap q = \{(-1,-1,0)\}$,
(b) $p \cap q = \{(2,2,3)\}$,
(c) $p \cap \pi = \emptyset$,
(d) $\pi \cap \Sigma = \{p: \ x = t, \ y = 0, \ z = 1\}$,
(e) $\pi \cap \Sigma = \emptyset$.

(11) Dani sta točka $T(7,1,3)$ in ravnina π, ki gre skozi točke $A(0,0,1)$, $B(0,-1,0)$ in $C(1,2,0)$.

(a) Izračunaj pravokotno projekcijo točke T na ravnino π.
(b) Izračunaj razdaljo točke T od ravnine π.
(c) Izračunaj zrcalno sliko točke T glede na ravnino π.

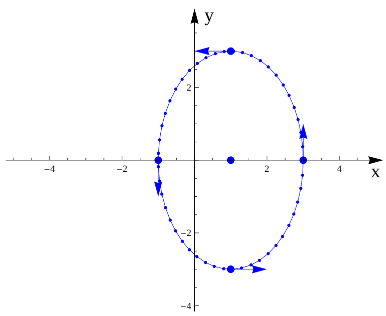
Rešitev:

(a) $\mathrm{pr}_\pi(T) = (1,3,1)$,
(b) $\mathrm{d}(\pi, T) = 2\sqrt{11}$,
(c) $\mathrm{zrsl}_\pi(T) = (-5,5,-1)$.

(12) Dana je parametrično podana krivulja $\vec{r}(t) = (2\cos t + 1, 3\sin t)$.

(a) Skiciraj tir krivulje $\vec{r}(t)$ za $t \in [0, 2\pi]$.
(b) Izračunaj ploščino lika, ki ga omejuje tir krivulje.

Rešitev: $S = 6\pi$.

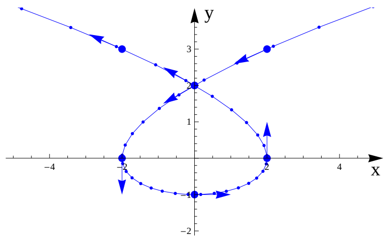


(13) Dana je parametrično podana krivulja $\vec{r}(t) = (3t - t^3, t^2 - 1)$.

(a) Skiciraj tir krivulje $\vec{r}(t)$.

(b) Izračunaj ploščino lika, ki ga omejuje tir krivulje pri $t \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

Rešitev: $S = \frac{24\sqrt{3}}{5}$.



(14) Krivulja je podana parametrično s predpisom $\vec{r}(t) = (\cos 2t, \sin t, e^t)$.

(a) Izračunaj fleksijsko ter torzijsko ukrivljenost krivulje v točki $T(1, 0, 1)$.

(b) Izračunaj spremljajoči trieder v točki $T(1, 0, 1)$.

Rešitev:

(a) $\kappa = \sqrt{\frac{33}{8}}$, $\omega = \frac{8}{33}$,

(b) $\vec{t} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\vec{n} = \left(-\sqrt{\frac{32}{33}}, -\sqrt{\frac{1}{66}}, \sqrt{\frac{1}{66}}\right)$, $\vec{b} = \left(\sqrt{\frac{1}{33}}, -\sqrt{\frac{16}{33}}, \sqrt{\frac{16}{33}}\right)$.

(15) Krivulja je podana parametrično s predpisom $\vec{r}(t) = (t^2 + t, t + 1, t^3 - 1)$.

(a) Izračunaj fleksijsko ter torzijsko ukrivljenost krivulje v točki $T(0, 1, -1)$.

(b) Izračunaj enačbo pritisnjene ravnine v točki $T(0, 0, -2)$.

Rešitev:

(a) $\kappa = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\omega = -3$,

(b) $\Pi :\ 3x + z = -2$.

(16) Ploskev je podana parametrično s predpisom $\vec{r}(u, v) = (uv, u - v, u^2 + 1)$. Določi tangentno ravnino na ploskev v točki $\vec{r}(0, 1)$.

Rešitev: $z = 1$.

(17) Ploskev je podana parametrično s predpisom $\vec{r}(x, y) = (x, y, \sin x + y)$. Poišči enačbo tangentne ravnine na ploskev v točki $T(0, 1, 1)$.

Rešitev: $x + y - z = 0$.

(18) Izračunaj odvode funkcij:

(a) $F(x) = \int_0^x t^2 e^t dt$,

(b) $G(x) = \int_{-x}^x (x - t)^3 dt$,

(c) $H(x) = \int_{-2x}^0 (2x + t)^5 dt$.

Rešitev:

(a) $F'(x) = x^2 e^x$,

(b) $G'(x) = 16x^3$,

(c) $H'(x) = 64x^5$.

(19) Izračunaj naslednje integrale s pomočjo funkcije gama:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty t^2 e^{-t}\, dt$,

(b) $\displaystyle\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}} e^{-t}\, dt$,

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^4 e^{-x^2}\, dx$,

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-4x^2}\, dx$.

Rešitev:

(a) $I = 2$,

(b) $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$,

(c) $I = \dfrac{3\sqrt{\pi}}{4}$,

(d) $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(20) Izrazi naslednje integrale s pomočjo funkcije beta:

(a) $\displaystyle\int_0^1 t^2 \sqrt{1-t}\, dt$,

(b) $\displaystyle\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\, dt$,

(c) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\, dx$,

(d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x\, dx$.

Rešitev:

(a) $I = \dfrac{16}{105}$,

(b) $I = \dfrac{1}{3}$,

(c) $I = \dfrac{4}{3}$,

(d) $I = \dfrac{\pi}{32}$.