

## 2. sklop dodatnih vaj iz Matematike 2

---

(1) Izračunaj integrale naslednjih funkcij po pravokotniku, omejenem s premicami  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$  in  $y = 2$ .

- (a)  $f(x, y) = x + xy - x^2 - y^2$ ,
- (b)  $f(x, y) = 2 - x + y$ ,
- (c)  $f(x, y) = x^2 + 10xy - y^2 + 2x - 1$ .

Rešitev:

- (a)  $I = -\frac{4}{3}$ ,
- (b)  $I = 5$ ,
- (c)  $I = 8$ .

(2) Izračunaj integrale danih funkcij po trikotniku z oglišči  $A(0, 0)$ ,  $B(2, 0)$  in  $C(0, 2)$ :

- (a)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,
- (b)  $f(x, y) = 1 + x + y$ ,
- (c)  $f(x, y) = x^3 + 3y - 2$ .

Rešitev:

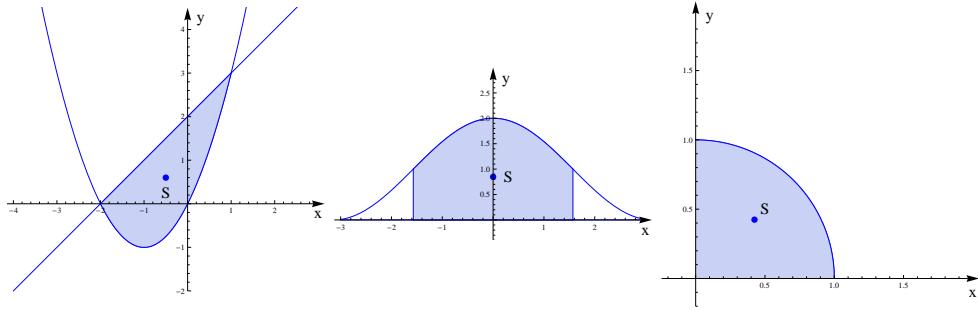
- (a)  $I = \frac{8}{3}$ ,
- (b)  $I = \frac{14}{3}$ ,
- (c)  $I = \frac{8}{5}$ .

(3) Izračunaj središča naslednjih ravninskih likov:

- (a) Lika, omejenega s krivuljama  $y = x^2 + 2x$  in  $y = x + 2$ .
- (b) Lika, omejenega s krivuljami  $y = \cos x + 1$ ,  $y = 0$  in  $x = \pm \frac{\pi}{2}$ .
- (c) Krožnega izseka  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $y \geq 0$  in  $x \geq 0$ .

Rešitev:

- (a)  $T = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right)$ ,
- (b)  $T = \left(0, \frac{8+3\pi}{8+4\pi}\right)$ ,
- (c)  $T = \left(\frac{4}{3\pi}, \frac{4}{3\pi}\right)$ .



- (4) Izračunaj integrale naslednjih funkcij po kocki, omejeni z ravninami  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $y = 1$ ,  $z = 0$  in  $z = 1$ .
- $f(x, y, z) = xz + xy - x^2z - y^2 + 1$ ,
  - $f(x, y, z) = 2x + y + z$ ,
  - $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ .

Rešitev:

- $I = 1$ ,
- $I = 2$ ,
- $I = 1$ .

- (5) Izračunaj integrale naslednjih funkcij po valju, omejenem s ploskvami  $z = -1$ ,  $z = 1$  in  $x^2 + y^2 = 1$ .
- $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ ,
  - $f(x, y, z) = z$ ,
  - $f(x, y, z) = xz + yz$ .

Rešitev:

- $I = \pi$ ,
- $I = 0$ ,
- $I = 0$ .

- (6) Izračunaj središči naslednjih dveh teles.

- Piramide, omejene s ploskvami  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  in  $x + y + z = 1$ .
- Paraboloida, omejenega s ploskvama  $z = 1$  in  $z = x^2 + y^2$ .

Rešitev:

- $T = \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right)$ ,
- $T = \left( 0, 0, \frac{2}{3} \right)$ .

(7) Reši diferencialne enačbe z ločljivimi spremenljivkami:

- (a)  $y' + y \tan x = 0$ ,
- (b)  $y'(x-1) - \frac{x+1}{y} = 0$ ,  $y(2) = 2$ ,
- (c)  $y' = \cos^2 y$ ,  $y(0) = 0$ .

Rešitev:

- (a)  $y(x) = C \cos x$ ,
- (b)  $y(x) = \sqrt{2x + 4 \ln|x-1|}$ ,
- (c)  $y(x) = \arctan x$ .

(8) Reši linearne diferencialne enačbe:

- (a)  $y' = y - x^2$ ,
- (b)  $y' + xy = (x+1)e^x$ ,  $y(-2) = 0$ ,
- (c)  $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$ ,  $y(-3) = 8$ .

Rešitev:

- (a)  $y(x) = Ce^x + x^2 + 2x + 2$ ,
- (b)  $y(x) = e^x - e^{-\frac{x^2}{2}}$ ,
- (c)  $y(x) = \frac{1}{2}(x+1)^4$ .

(9) Reši Bernoullijeve diferencialne enačbe:

- (a)  $y' + \frac{y}{3} = e^x y^4$ ,
- (b)  $y' + xy = xy^3$ ,  $y(0) = \frac{1}{2}$ ,
- (c)  $y' = \frac{2y}{x} - x^2 y^2$ ,  $y(1) = 1$ .

Rešitev:

- (a)  $y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{Ce^x - 3xe^x}}$ ,
- (b)  $y(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + 3e^{x^2}}}$ ,
- (c)  $y(x) = \frac{5x^2}{x^5 + 4}$ .

(10) Reši diferencialne enačbe drugega reda s konstantnimi koeficienti:

- (a)  $y'' + y = 4e^{3x}$ ,
- (b)  $y'' + 6y' + 8y = 7 \sin x + 6 \cos x$ ,
- (c)  $y'' - 5y' + 6y = 6$ ,  $y(0) = y'(0) = 1$ .

Rešitev:

- (a)  $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{2}{5}e^{3x}$ ,
- (b)  $y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-2x} + \sin x$ ,
- (c)  $y(x) = 1 - e^{2x} + e^{3x}$ .

(11) Štiri bele in štiri črne predmete naključno razvrstimo v raven niz. Kolikšna je verjetnost, da bodo beli predmeti skupaj?

Rešitev:  $P = \frac{1}{14}$ .

(12) Petkrat zapored vržemo kovanec.

- (a) Kolikšna je verjetnost, da je na prvem kovancu cifra, na petem pa grb?
- (b) Kolikšna je verjetnost, da grb pade natanko dvakrat?
- (c) Kolikšna je verjetnost, da pade enako cifer kot grbov?

Rešitev:

- (a)  $P = \frac{1}{4}$ ,
- (b)  $P = \frac{5}{16}$ ,
- (c)  $P = 0$ .

(13) Trikrat zapored vržemo igralno kocko. Izračunaj naslednje verjetnosti:

- (a) da padeta natanko dve šestici,
- (b) da pade na vseh treh kockah sodo število pik,
- (c) da pade na vseh treh kockah različno število pik.

Rešitev:

- (a)  $P = \frac{15}{216}$ ,
- (b)  $P = \frac{1}{8}$ ,
- (c)  $P = \frac{120}{216}$ .

(14) V posodi so 3 bele in 7 črnih kroglic. Iz posode zaporedoma izvlečemo tri kroglice brez vračanja.

- (a) Kolikšna je verjetnost, da sta prvi dve kroglici beli?
- (b) Kolikšna je verjetnost, da sta prvi dve kroglici različne barve?
- (c) Kolikšna je verjetnost, da so vse tri kroglice črne?

Rešitev:

- (a)  $P = \frac{1}{15}$ ,
- (b)  $P = \frac{7}{15}$ ,
- (c)  $P = \frac{7}{24}$ .

(15) V prvi posodi imamo 5 belih in 5 črnih kroglic, v drugi pa 4 bele in 5 črnih. Iz prve posode na slepo izberemo eno kroglico in jo prenesemo v drugo posodo, nato pa iz druge posode izvlečemo eno kroglico.

- (a) Kolikšna je verjetnost, da je ta kroglica bela?
- (b) Kolikšna je verjetnost, da je bila kroglica, ki smo jo prenesli iz prve v drugo posodo bela, če smo izvlekli črno kroglico?

Rešitev:

- (a)  $P = \frac{9}{20}$ ,
- (b)  $P = \frac{5}{11}$ .

(16) Na izpit je prišlo 100 študentov. 30 izmed njih je učenju posvetilo precej časa, 40 nekaj časa, 30 pa se jih sploh ni učilo. Študent, ki se je precej učil, opravi izpit z 90-odstotno verjetnostjo, študent, ki se je malo učil, s 50-odstotno verjetnostjo, študent, ki se ni učil, pa z 10-odstotno verjetnostjo.

- (a) Kakšna je verjetnost, da bo naključno izbrani študent opravil izpit?
- (b) Kakšna je verjetnost, da se študent, ki je opravil izpit, ni učil?

Rešitev:

- (a)  $P = \frac{1}{2}$ ,
- (b)  $P = \frac{6}{100}$ .

- (17) V posodi so 4 bele in 2 črni kroglici. Na slepo izvlečemo 3 kroglice. Število črnih kroglic med temi tremi kroglicami označimo z  $X$ . Izračunaj porazdelitev slučajne spremenljivke  $X$ .

Rešitev:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

- (18) V seriji 100 izdelkov je 10 pokvarjenih. Iz serije enega za drugim izberemo 3 izdelke brez vračanja in z  $X$  označimo število pokvarjenih izdelkov v tem vzorcu treh izdelkov. Izračunaj porazdelitev slučajne spremenljivke  $X$ .

Rešitev:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.727 & 0.248 & 0.025 & 0.001 \end{pmatrix}.$$

- (19) Igralec igra naslednjo igro. Pri metu kocke dobi pri sodem število pik 1 evro, pri lihem številu pik pa plača 1 evro. Na začetku ima 10 evrov, nato pa odigra tri igre. Stanje na njegovem računu po treh igrach označimo z  $X$ .

- (a) Izračunaj porazdelitveno shemo slučajne spremenljivke  $X$ .  
 (b) Izračunaj povprečno vrednost in standardni odklon  $X$ .

Rešitev:

(a)  $X : \begin{pmatrix} 7 & 9 & 11 & 13 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix},$

(b)  $E(X) = 10$ ,  $\sigma(X) = \sqrt{3}$ .

- (20) S pomočjo Laplaceove aproksimacije približno izračunaj verjetnosti:

- (a) V 400 metih kovanca pade grb med 180 in 190-krat.  
 (b) V 18000 metih kocke pade šestica med 2950 in 3050-krat.

Rešitev:

- (a)  $P(180 \leq X \leq 190) \approx 0.1359$ ,  
 (b)  $P(2950 \leq Y \leq 3050) \approx 0.6826$ .