Matematika 2

Krivulje in ploskve

(1) Krivulja je podana parametrično s predpisom $\vec{r}(t) = (3\cos t, \sin t)$.

(a) Skiciraj dano krivuljo.

(b) Izračunaj ploščino lika, ki ga omejuje krivulja.

Rešitev: Vektorska funkcija oziroma parametrično podana krivulja je funkcija

$$\vec{r} : D \to \mathbb{R}^2,$$

kjer je $D \subset \mathbb{R}$. Najlažje si jo predstavljamo kot gibanje točke po ravnini. Parameter $t \in D$ si predstavljamo kot čas, vrednost $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ pa kot položaj točke ob času t.

Tir vektorske funkcije je načeloma težko skicirati, poskusimo pa lahko tako, da izračunamo vrednosti funkcije in njenega odvoda v nekaterih točkah. Tipično vzamemo točke, kjer je katera izmed komponent položaja ali pa hitrosti enaka nič. Po potrebi pa dodamo še kakšno točko. Nato narišemo izračunane položaje in jih opremimo še z majhnimi puščicami v smeri hitrosti. Nato skozi te točke potegnemo krivuljo.

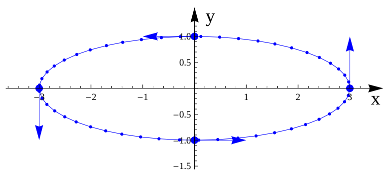
(a) V našem primeru so komponente položaja in hitrosti enake:

$$\begin{aligned} x(t) &= 3\cos t, \\ y(t) &= \sin t, \\ \dot{x}(t) &= -3\sin t, \\ \dot{y}(t) &= \cos t. \end{aligned}$$

Vzemimo vrednosti $t \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$ in zapišimo položaje in hitrosti pri teh parametrih v tabelo.

t	$\vec{r}(t)$	$\dot{\vec{r}}(t)$
0	$(3,0)$	$(0,1)$
$\frac{\pi}{2}$	$(0,1)$	$(-3,0)$
π	$(-3,0)$	$(0,-1)$
$\frac{3\pi}{2}$	$(0,-1)$	$(3,0)$
2π	$(3,0)$	$(0,1)$

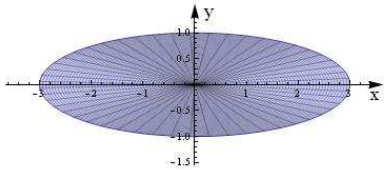
Če te točke povežemo v krivuljo, dobimo elipso s polosema $a = 3$ in $b = 1$.



(b) Če imamo krivuljo v parametrični obliki podano s predpisom $\vec{r} : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^2$, potem družina zveznic med krivuljo in pa koordinatnim izhodiščem opiše lik, katerega ploščina je enaka

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - \dot{x}y)\, dt.$$

Pri tem je treba biti pozoren na predznak. Če se po krivulji premikamo v 'pozitivni' smeri glede na izhodišče, dobimo običajno ploščino, pri premikanju v 'negativni' smeri pa negativno predznačeno ploščino. Če se del poti premikamo v pozitivni smeri del poti pa v negativni smeri, je treba obravnavati vsak kos posebej.



V našem primeru je ploščina elipse enaka

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(x\dot{y}-\dot{x}y)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(3\cos t\,\cos t-(-3\sin t)\sin t)\,dt, \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(3\cos^2 t+3\sin^2 t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}3\,dt = \frac{3}{2}t\Big|_0^{2\pi} = 3\pi.
\end{aligned}
$$

□

(2) Krivulja je podana parametrično s predpisom $\vec{r}(t)=(t^2,3t-t^3)$.

(a) Skiciraj dano krivuljo.

(b) Izračunaj tangento na krivuljo v točki, ki ustreza parametru $t=1$.

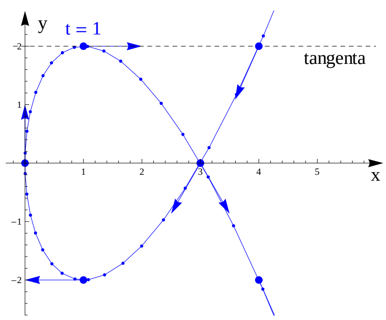
Rešitev: (a) Komponente položaja in hitrosti so:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= t^2, \\
y(t) &= 3t-t^3, \\
\dot{x}(t) &= 2t, \\
\dot{y}(t) &= 3-3t^2.
\end{aligned}
$$

Izračunajmo položaje in hitrosti pri nekaj parametrih:.

t	$\vec{r}(t)$	$\dot{\vec{r}}(t)$
-2	$(4,2)$	$(-4,-9)$
$-\sqrt{3}$	$(3,0)$	$(-2\sqrt{3},-6)$
-1	$(1,-2)$	$(-2,0)$
0	$(0,0)$	$(0,3)$
1	$(1,2)$	$(2,0)$
$\sqrt{3}$	$(3,0)$	$(2\sqrt{3},-6)$

Krivulja ima obliko pentlje.



(b) Tangenta na krivuljo, ki ustreza parametru $t = 1$, ima smer $\vec{s} = \dot{\vec{r}}(1) = (2, 0)$ in gre skozi točko $\vec{r}(1) = (1, 2)$. Njena enačba je tako

$$\vec{r} = (1, 2) + s(2, 0),$$

oziroma po komponentah

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2s, \\ y &= 2. \end{aligned}$$

$\square$

(3) Cikloida je podana parametrično s predpisom $\vec{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$.

(a) Skiciraj dano krivuljo.

(b) Izračunaj dolžino enega loka cikloide.

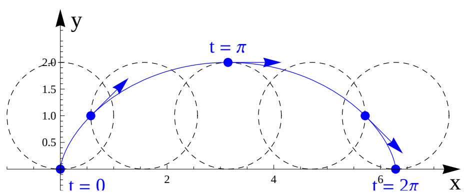
Rešitev: (a) Komponente položaja in hitrosti so:

$$\begin{aligned} x(t) &= t - \sin t, \\ y(t) &= 1 - \cos t, \\ \dot{x}(t) &= 1 - \cos t, \\ \dot{y}(t) &= -\sin t. \end{aligned}$$

Najprej izračunajmo nekaj položajev in hitrosti:.

t	$\vec{r}(t)$	$\dot{\vec{r}}(t)$
0	$(0, 0)$	$(0, 0)$
$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2} - 1, 1)$	$(1, 1)$
π	$(\pi, 2)$	$(2, 0)$
$\frac{3\pi}{2}$	$(\frac{3\pi}{2} + 1, 1)$	$(1, -1)$
2π	$(2\pi, 0)$	$(0, 0)$

Geometrično lahko opišemo cikloido kot krivuljo, ki jo opiše točka na obodu krožnice pri kotaljenju po premici.



(b) Dolžino parametrično podane krivulje izračunamo po formuli

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt.$$

Dolžina enega loka cikloide je tako enaka

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt, \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt, \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\, dt, \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt, \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}}\, dt, \\
&= \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{t}{2}\, dt, \\
&= -4 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi}, \\
&= 8.
\end{aligned}$$

□

(4) Kardioida je podana v polarnih koordinatah s predpisom $r(\phi) = 1 + \cos\phi$.

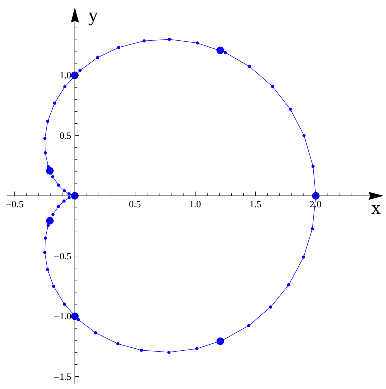
(a) Skiciraj dano krivuljo.

(b) Izračunaj obseg kardioide.

Rešitev: (a) Krivuljo, ki jo podana v polarnih koordinatah, skiciramo tako, da si izberemo nekaj točk na njej, potem pa skoznje poskusimo narisati krivuljo, upoštevajoč, kako se spreminja razdalja točke od izhodišča.

ϕ	$r(\phi)$
0	2
$\frac{\pi}{4}$	$1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{3\pi}{4}$	$1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$
π	0

Ker je $\cos(2\pi - \phi) = \cos\phi$, je krivulja simetrična glede na abscisno os. Tako dobimo krivuljo, ki po obliki spominja na srce, zato jo imenujemo tudi kardioida. Gladka je povsod, razen v koordinatnem izhodišču, kjer ima ost.



(b) Dolžina krivulje, ki je podana v polarnih koordinatah, je enaka

$$l = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{r(\phi)^2 + r'(\phi)^2}\, d\phi.$$

Za izračun obsega kardioide najprej opazimo, da je $r'(\phi) = -\sin\phi$. Od tod sledi

$$\begin{aligned}\sqrt{r(\phi)^2 + r'(\phi)^2} &= \sqrt{(1+\cos\phi)^2 + \sin^2\phi},\\ &= \sqrt{1 + 2\cos\phi + \cos^2\phi + \sin^2\phi},\\ &= \sqrt{2 + 2\cos\phi},\\ &= \sqrt{4\cos^2\frac{\phi}{2}}.\end{aligned}$$

Pri korenjenju moramo biti pozorni, saj je $\sqrt{4\cos^2\frac{\phi}{2}} = 2\cos\frac{\phi}{2}$ samo za $\phi \in [0, \pi]$, v splošnem pa velja $\sqrt{4\cos^2\frac{\phi}{2}} = 2\left|\cos\frac{\phi}{2}\right|$. Da bi se izognili integriranju absolutnih vrednosti, bomo upoštevali, da je kardioida simetrična glede na abscisno os, zato je dovolj izračunati dolžino njene zgornje polovice.

$$l = 2\int_0^{\pi} \sqrt{r(\phi)^2 + r'(\phi)^2}\, d\phi = 2\int_0^{\pi} 2\cos\frac{\phi}{2}\, d\phi = 8\sin\frac{\phi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8.$$

□

(5) Logaritmična spirala je podana v polarnih koordinatah s predpisom $r(\phi) = e^{\frac{\phi}{2\pi}}$.

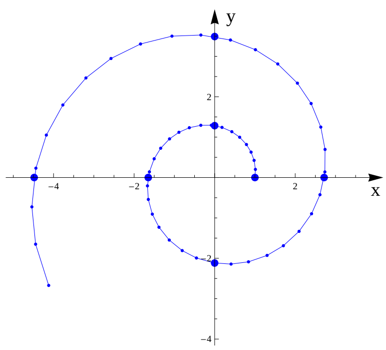
(a) Skiciraj dano krivuljo.

(b) Parametriziraj krivuljo z naravnim parametrom.

Rešitev: (a) Najprej izračunajmo nekaj vrednosti.

ϕ	$r(\phi)$
0	1
$\frac{\pi}{2}$	$e^{1/4}$
π	$e^{1/2}$
$\frac{3\pi}{2}$	$e^{3/4}$
2π	e

V tem primeru krivulja ni sklenjena, pač pa se čedalje bolj oddaljuje od izhodišča. Njen tir ima obliko spirale.



(b) Naravni parameter nam pove, kako daleč od začetne točke vzdolž krivulje je dana točka. Izračunamo ga podobno kot dožino loka po formuli

$$s(\phi) = \int_0^\phi \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\phi.$$

V primeru logaritmične spirale je $r'(\phi) = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{\phi}{2\pi}}$, od koder sledi

$$\begin{aligned}
s(\phi) &= \int_0^\phi \sqrt{\left(e^{\frac{\phi}{2\pi}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\pi} e^{\frac{\phi}{2\pi}}\right)^2}\, d\phi, \\
&= \int_0^\phi e^{\frac{\phi}{2\pi}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2}\, d\phi, \\
&= \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2} \int_0^\phi e^{\frac{\phi}{2\pi}}\, d\phi, \\
&= \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2} \cdot 2\pi e^{\frac{\phi}{2\pi}} \Big|_0^\phi, \\
&= \sqrt{1 + 4\pi^2} \left(e^{\frac{\phi}{2\pi}} - 1\right).
\end{aligned}$$

□

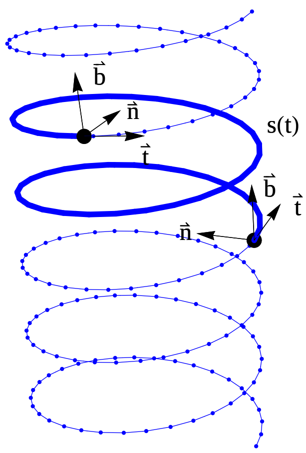
(6) Vijačnica je podana parametrično s predpisom $\vec{r}(t) = (6\cos t, 6\sin t, 8t)$.

(a) Parametriziraj krivuljo z naravnim parametrom.

(b) Izračunaj fleksijsko ter torzijsko ukrivljenost krivulje.

(c) Izračunaj spremljajoči trieder.

Rešitev: (a) Imamo vijačnico, katere tloris je krožnica s polmerom 6.



Za izračun naravnega parametra moramo najprej izračunati odvod položaja:

$$\dot{\vec{r}}(t) = (-6\sin t, 6\cos t, 8).$$

Od tod dobimo zvezo med dano in naravno parametrizacijo krivulje

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{36\sin^2 t + 36\cos^2 t + 64}\, dt = \int_0^t \sqrt{36+64}\, dt = \int_0^t 10\, dt = 10t\Big|_0^t = 10t.$$

Torej velja $t = s/10$, zato lahko v naravni parametrizaciji krivuljo zapišemo v obliki

$$\vec{r}(s) = (6\cos(s/10), 6\sin(s/10), 4/5s)\,.$$

(b) Fleksijsko in torzijsko ukrivljenost krivulje lahko izračunamo s pomočjo naslednjih formul:

$$\kappa = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3},$$
$$\omega = \frac{(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \cdot \dddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2}.$$

Najprej moramo izračunati še višje odvode položaja:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = (-6\cos t, -6\sin t, 0),$$
$$\dddot{\vec{r}}(t) = (6\sin t, -6\cos t, 0).$$

Od tod dobimo:

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = (48\sin t, -48\cos t, 36),$$
$$|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}| = 60,$$
$$|\dot{\vec{r}}| = 10,$$
$$(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \cdot \dddot{\vec{r}} = 288.$$

Ko te številke vstavimo v formule, dobimo, da velja:

$$\kappa = \frac{6}{100},$$
$$\omega = \frac{8}{100}.$$

(c) Če ima prostorska krivulja v dani točki neničelno ukrivljenost, ji priredimo spremljajoči trieder $\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$, kjer je $\vec{t}$ enotski vektor v smeri tangente na krivuljo, $\vec{n}$ normalni vektor, $\vec{b}$ pa binormalni vektor. Vektorja $\vec{t}$ in $\vec{n}$ določata pritisnjeno ravnino, ki se v dani točki najbolj prilega krivulji. Te vektorje lahko izračunamo s pomočjo naslednjih formul:

$$\vec{t} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|},$$
$$\vec{b} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|},$$
$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}.$$

V našem primeru tako dobimo:

$$\vec{t} = \frac{(-6\sin t, 6\cos t, 8)}{10} = (-3/5\sin t, 3/5\cos t, 4/5),$$
$$\vec{b} = \frac{(48\sin t, -48\cos t, 36)}{60} = (4/5\sin t, -4/5\cos t, 3/5),$$
$$\vec{n} = (-\cos t, -\sin t, 0).$$

□

(7) Krivulja je podana parametrično s predpisom $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$.

(a) Izračunaj fleksijsko ter torzijsko ukrivljenost krivulje v točki $T(0, 0, 0)$.
(b) Izračunaj enačbi pritisnjene in normalne ravnine na krivuljo v točki $T(0, 0, 0)$.

Rešitev: (a) Najprej izračunajmo prve tri odvode položaja:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}(t) &= (1, 2t, 3t^2), \\ \ddot{\vec{r}}(t) &= (0, 2, 6t), \\ \dddot{\vec{r}}(t) &= (0, 0, 6). \end{aligned}$$

Zanimajo nas vrednosti teh količin v točki $T(0, 0, 0)$. Ta točka ustreza parametru $t = 0$, kjer velja $\dot{\vec{r}}(0) = (1, 0, 0)$, $\ddot{\vec{r}}(0) = (0, 2, 0)$ in $\dddot{\vec{r}}(0) = (0, 0, 6)$. Sledi

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3} = \frac{|(1, 0, 0) \times (0, 2, 0)|}{|(1, 0, 0)|^3} = \frac{|(0, 0, 2)|}{1^3} = 2, \\ \omega &= \frac{(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \cdot \dddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2} = \frac{((1, 0, 0) \times (0, 2, 0)) \cdot (0, 0, 6)}{|(1, 0, 0) \times (0, 2, 0)|^2} = \frac{(0, 0, 2) \cdot (0, 0, 6)}{|(0, 0, 2)|^2} = \frac{12}{2^2} = 3. \end{aligned}$$

(b) Pritisnjena ravnina je ravnina, ki se v dani točki najbolje prilega krivulji. Normalna ravnina pa je po drugi strani tista ravnina, ki jo krivulja seka pravokotno v dani točki.

Pritisnjena ravnina ima normalo v smeri binormale, zato moramo najprej izračunati vektor binormale.

$$\vec{b} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|} = \frac{(1, 0, 0) \times (0, 2, 0)}{|(1, 0, 0) \times (0, 2, 0)|} = \frac{(0, 0, 2)}{|(0, 0, 2)|} = \frac{(0, 0, 2)}{2} = (0, 0, 1)$$

Pritisnjena ravnina ima torej normalo $\vec{n} = (0, 0, 1)$ in gre skozi točko $T(0, 0, 0)$. Njena enačba je potem:

$$\begin{aligned} (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} &= 0, \\ (x - 0, y - 0, z - 0) \cdot (0, 0, 1) &= 0, \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Normalna ravnina ima normalo v smeri tangente na krivuljo. Smer tangente je

$$\vec{t} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} = \frac{(1, 0, 0)}{|(1, 0, 0)|},$$

od koder dobimo enačbo normalne ravnine:

$$\begin{aligned} (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} &= 0, \\ (x - 0, y - 0, z - 0) \cdot (1, 0, 0) &= 0, \\ x &= 0. \end{aligned}$$

$\square$

(8) Dana je parametrično podana krivulja $\vec{r}(t) = (2t + 1, 3t^2 - 1, t^2 + t + 1)$. Pokaži, da je krivulja ravninska in izračunaj enačbo ravnine, v kateri krivulja leži.

Rešitev: Krivulja z neničelno ukrivljenostjo je ravninska natanko takrat, ko ima ničelno torzijo. Za dano krivuljo je:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t) &= (2, 6t, 2t + 1),\\ \ddot{\vec{r}}(t) &= (0, 6, 2),\\ \dddot{\vec{r}}(t) &= (0, 0, 0),\end{aligned}$$

od koder sledi $\omega = 0$.

Ker je krivulja ravninska, ima binormala konstantno smer, ki kaže v smeri normale na ravnino krivulje. Binormala kaže v smeri vektorja $\vec{n} = \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = (-6, -4, 12)$, za izhodiščno točko ravnine pa lahko izberemo poljubno točko na krivulji. Tako dobimo enačbo ravnine

$$-3x - 2y + 6z = 5,$$

ki vsebuje krivuljo. □

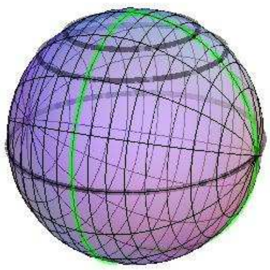
(9) Sfera je podana parametrično s predpisom $\vec{r}(\phi, \theta) = (\cos\theta \cos\phi, \cos\theta \sin\phi, \sin\theta)$.

(a) Opiši koordinatne krivulje.

(b) Izračunaj enačbi tangentnih ravnin v točkah $\vec{r}(0, 0)$ in $\vec{r}(0, \pi/4)$.

(c) Izračunaj razdaljo med točkama na sferi.

Rešitev: (a) Geografski pomen koordinat ϕ in θ je naslednji. Koordinata ϕ nam pove geografsko dolžino točke in teče po intervalu $\phi \in [0, 2\pi]$, medtem ko koordinata θ opisuje geografsko širino in teče po intervalu $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Krivulje pri konstantnem θ so vzporedniki, krivulje pri konstantnem ϕ pa poldnevniki.



(b) Za izračun enačbe tangentne ravnine v dani točki moramo najprej izračunati smer normale. Dobimo jo kot vektorski produkt

$$\vec{n} = \vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta,$$

kjer kažeta vektorja $\vec{r}_\phi$ in $\vec{r}_\theta$ v smeri vzporednika oziroma poldnevnika. Ta dva vektorja dobimo z odvajanjem položaja po parametrih ϕ oziroma θ. Sledi:

$$\begin{aligned}\vec{r}_\phi &= (-\cos\theta \sin\phi, \cos\theta \cos\phi, 0),\\ \vec{r}_\theta &= (-\sin\theta \cos\phi, -\sin\theta \sin\phi, \cos\theta)\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}\vec{n} &= (-\cos\theta\sin\phi, \cos\theta\cos\phi, 0) \times (-\sin\theta\cos\phi, -\sin\theta\sin\phi, \cos\theta),\\ &= (\cos^2\theta\cos\phi, \cos^2\theta\sin\phi, \cos\theta\sin\theta).\end{aligned}$$

V točki, ki ustreza parametroma $\phi = 0$ in $\theta = 0$, velja:

$$\begin{aligned}\vec{n} &= (1,0,0),\\ \vec{r}(0,0) &= (1,0,0).\end{aligned}$$

Za začetno točko tangentne ravnine vzemimo kar točko $\vec{r}_0 = \vec{r}(0,0) = (1,0,0)$. Od tod dobimo enačbo tangentne ravnine:

$$\begin{aligned}(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} &= 0,\\ (x-1, y-0, z-0) \cdot (1,0,0) &= 0,\\ x - 1 &= 0,\\ x &= 1.\end{aligned}$$

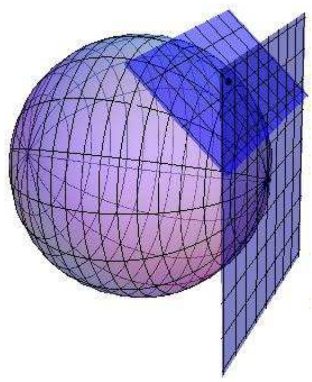
V točki $\vec{r}(0, \pi/4)$ je:

$$\begin{aligned}\vec{n} &= (1/2, 0, 1/2),\\ \vec{r}(0,\pi/4) &= \left(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2\right),\end{aligned}$$

enačba tangentne ravnine pa je:

$$\begin{aligned}(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} &= 0,\\ (x - \sqrt{2}/2, y - 0, z - \sqrt{2}/2) \cdot (1/2, 0, 1/2) &= 0,\\ x/2 + z/2 - \sqrt{2}/2 &= 0,\\ x + z &= \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Poglejmo še sliko.



(c) Razdaljo med točkama na sferi s polmerom R lahko izračunamo s pomočjo formule

$$d = R \arccos\left(\sin\theta_1 \sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2\cos(\phi_1 - \phi_2)\right).$$

Pri tem sta (ϕ_1, θ_1) koordinati prve točke, (ϕ_2, θ_2) pa koordinati druge točke.

Izračunajmo s to formulo razdaljo med Ljubljano in New Yorkom. Koordinate Ljubljane so $46.05°$ severno od ekvatorja in $14.51°$ vzhodno od Greenwicha. Koordinate New Yorka pa so $40.71°$ severno od ekvatorja in $74.01°$ zahodno od Greenwicha. Od tod dobimo:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= 46.05°,\\ \theta_2 &= 40.71°,\\ \phi_1 - \phi_2 &= 88.52°.\end{aligned}$$

Če vzamemo, da je polmer Zemlje približno $R = 6400km$, dobimo z uporabo formule razdaljo

$$d \approx 6800km.$$

□

(10) Ploskev je podana parametrično s predpisom $\vec{r}(u, v) = (u^2 + v^2, u - v, 4uv)$. Določi tangentno ravnino in normalno premico na ploskev v točki $\vec{r}(1, -2)$.

Rešitev: Sedaj je:

$$\begin{aligned}\vec{r}_u &= (2u, 1, 4v),\\ \vec{r}_v &= (2v, -1, 4u).\end{aligned}$$

Od tod dobimo smer normale

$$\vec{n} = (2u, 1, 4v) \times (2v, -1, 4u) = (4u + 4v, 8v^2 - 8u^2, -2u - 2v).$$

Parametroma $u = 1$ in $v = -2$ ustreza točka na ploskvi $T(5, 3, -8)$, normala na ploskvev v tej točki pa je $\vec{n} = (-4, 24, 2)$. Tangentna ravnina ima tako enačbo:

$$\begin{aligned}(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} &= 0,\\ (x - 5, y - 3, z + 8) \cdot (-4, 24, 2) &= 0,\\ -4x + 20 + 24y - 72 + 2z + 16 &= 0,\\ -2x + 12y + z &= 18.\end{aligned}$$

Normalna premica pa ima parametrizacijo

$$\vec{r} = (5, 3, -8) + t(-4, 24, 2).$$

□