Matematika 2

Osnove verjetnosti

(1) (a) V ekipi je 5 igralcev. Koliko različnih trojic lahko sestavimo?
(b) V paketu je 52 kart. Koliko različnih kompletov petih kart lahko dobimo pri deljenju?

Rešitev: Kadar iz množice k elementov izbiramo r-terice elementov, pri čemer vrstni red ni pomemben, govorimo o kombinacijah k elementov reda r. Število kombinacij k elementov reda r je enako

$$C_r^k = \binom{k}{r} = \frac{k!}{r!\,(k-r)!}.$$

(a) Število možnih trojic, ki jih lahko sestavimo iz petih igralcev, je enako

$$n = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10.$$

Če označimo igralce z A, B, C, D in E, so možne trojice

$$ABC,\ ABD,\ ABE,\ ACD,\ ACE,\ ADE,\ BCD,\ BCE,\ BDE,\ CDE.$$

(b) Število možnih kompletov petih kart, ki jih lahko dobimo pri deljenju, je enako

$$n = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5!\,47!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2598960.$$

□

(2) V posodi imamo 5 rdečih, 4 bele in 3 modre kroglice. Na slepo izvlečemo dve kroglici.

(a) Kolikšna je verjetnost, da bosta obe beli?
(b) Kolikšna je verjetnost, da bosta različnih barv?

Rešitev: Pri verjetnosti poskušamo s pomočjo matematičnih modelov opisati verjetnost, da se pri danem poskusu zgodi nek dogodek. Če je pri poskusu možnih končno mnogo enako verjetnih izidov, potem je klasična definicija verjetnosti dogodka A enaka

$$P(A) = \frac{\text{število izidov v dogodku } A}{\text{število vseh izidov}}.$$

Pri našem poskusu izmed 12 kroglic izvlečemo 2 kroglici, zato je število vseh možnih izidov enako $\binom{12}{2} = 66$.

(a) Število parov, pri katerih sta obe kroglici beli, je $\binom{4}{2} = 6$, zato je

$$P(\text{obe kroglici sta beli}) = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}.$$

(b) Če sta obe kroglici različnih barv, sta v paru bodisi rdeča in bela, rdeča in modra, ali pa bela in modra kroglica. Število vseh takšnih parov je enako $5 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 47$. Sledi

$$P(\text{obe kroglici sta različnih barv}) = \frac{47}{66}.$$

□

(3) Pri deljenju dobimo 5 kart izmed 52. Izračunaj verjetnosti, da dobimo kraljevo lestvico, barvno lestvico, poker in full house.

Rešitev: Število možnih kompletov petih kart, ki jih lahko dobimo pri deljenju je enako

$$\binom{52}{5} = 2598960.$$

Kraljeva lestvica pomeni, da imamo asa, kralja, damo, fanta in desetico iste barve. Ker imamo pri kartah štiri barve, so možne štiri različne kraljeve lestvice, zato je

$$P(\text{kraljeva lestvica}) = \frac{4}{2598960} \approx 0.00000154.$$

Pri barvni lestvici moramo imeti pet zaporednih kart iste barve, izvzemši kraljevo lestvico. Pri dani barvi imamo tako lahko lestvice: as do petice, dvojka do šestice,...,devetica do kralja, kar je vsega skupaj devet lestvic. Vseh barvnih lestvic pa je $9 \cdot 4 = 36$. Torej je

$$P(\text{barvna lestvica}) = \frac{36}{2598960} \approx 0.0000139.$$

Pri pokru moramo imeti štiri karte iste vrednosti, peta karta pa je lahko poljubna. Različnih vrednosti je 13, pri dani vrednosti pa imamo za peto karto 48 možnosti. Skupaj je tako $13 \cdot 48 = 624$ različnih pokrov in

$$P(\text{poker}) = \frac{624}{2598960} \approx 0.00024.$$

Pri full housu moramo imeti tri karte ene vrednosti preostali dve karti pa neke druge, a iste, vrednosti. Za izbiro vrednosti prvih treh kart imamo 13 možnosti, za izbiro vrednosti ostalih dveh kart pa nam ostane še 12 možnosti. Trojico kart iste vrednosti lahko izberemo na $\binom{4}{3} = 4$ načine, par kart iste vrednosti pa na $\binom{4}{2} = 6$ načinov. Vseh različnih full housov je torej $13 \cdot 12 \cdot 4 \cdot 6 = 3744$. Sledi

$$P(\text{full house}) = \frac{3744}{2598960} \approx 0.00144.$$

$\square$

(4) Pri Lotu izberemo 7 številk od možnih 39. Izžreba se 7 številk. Kolikšna je verjetnost, da zadenemo sedmico, šestico oziroma petico?

Rešitev: Število možnih kombinacij pri lotu je

$$\binom{39}{7} = 15380937.$$

Sedmica pomeni, da smo zadeli vseh sedem številk, kar pomeni da je takšna ena sama možnost. Sledi

$$P(\text{sedmica}) = \frac{1}{15380937}.$$

Šestico dobimo, če smo zadeli 6 od 7 številk. Za preostalo številko je torej na voljo $39 - 7 = 32$ možnosti, vseh možnosti pa je $7 \times 32 = 224$. Torej je

$$P(\text{šestica}) = \frac{224}{15380937}.$$

Pri petici pravilno napovemo 5 številk, narobe pa 2. Takšnih možnosti je $\binom{7}{5}\binom{32}{2} = 10416$, verjetnost petice pa je enaka

$$P(\text{petica}) = \frac{10416}{15380937}.$$

$\square$

(5) V razredu je 11 ljudi. Kolikšna je verjetnost, da nobena dva izmed njih nimata rojstnega dneva na isti dan v mesecu?

Rešitev: Predpostavimo zaradi enostavnosti, da je možnih 31 različnih dni in da so vsi enako verjetni (to seveda ni čisto res). Verjetnost, da imajo vsi rojstne dneve na različne dneve v mesecu, je potem enaka

$$P = 1 \cdot \frac{30}{31} \cdot \frac{29}{31} \cdot \frac{28}{31} \cdot \ldots \cdot \frac{21}{31} \approx 0.133.$$

$\square$

(6) Izračunaj verjetnosti:

(a) da v dveh metih kocke pade nič, ena oziroma dve šestici,

(b) da v treh metih kocke pade nič, ena, dve ali tri šestice.

Rešitev: (a) Označimo:

$A \ldots$ v dveh metih kocke padeta dve šestici,
$B \ldots$ v dveh metih kocke pade ena šestica,
$C \ldots$ v dveh metih kocke ne pade nobena šestica.

Vseh možnih izidov pri metu dveh kock je 36. Od tega se samo enkrat zgodi, da padeta dve šestici, zato je

$$P(A) = \frac{1}{36}.$$

Ena šestica pade v desetih izidih, zato je

$$P(B) = \frac{10}{36}.$$

V preostalih primerih ne pade nobena šestica, oziroma

$$P(C) = \frac{25}{36}.$$

(b) Označimo sedaj z X število šestic v treh metih kocke. Možne vrednosti X so potem 0, 1, 2 ali 3. Vsako izmed teh vrednosti bi lahko izračunali podobno kot prej, namesto tega pa bomo raje uporabili Bernoullijevo formulo.

Denimo, da imamo zaporedje n neodvisnih poskusov. V vsakem izmed poskusov se zgodi dogodek A z verjetnostjo $P(A) = p$. Če nam slučajna spremenljivka X pove, kolikokrat se je v n poskusih zgodil dogodek A, je

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

V našem primeru je $n = 3$, dogodek A pa pomeni, da je padla šestica. Torej je $p = \frac{1}{6}$. Sledi

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= \binom{3}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216} \approx 0.579,\\
P(X=1) &= \binom{3}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216} \approx 0.347,\\
P(X=2) &= \binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{15}{216} \approx 0.069,\\
P(X=3) &= \binom{3}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{216} \approx 0.005.
\end{aligned}$$

□

(7) Na voljo imaš naslednji igri na srečo:

(a) 4× zapored vržeš kocko. Zmagaš, če pade vsaj ena šestica.
(b) 24× zapored vržeš par kock. Zmagaš, če vsaj enkrat padeta dve šestici.

Katero izmed teh dveh iger se ti bolj splača igrati?

Rešitev: (a) Naj bo dogodek

$A \ldots$ v štirih metih pade vsaj ena šestica.

To pomeni, da padejo ena, dve, tri ali pa štiri šestice. Da bi izračunali, na koliko načinov se to lahko zgodi, bi potrebovali kar nekaj časa. Precej hitreje pa lahko izračunamo, na koliko načinov se zgodi dogodek $\overline{A}$. To pomeni, da nikoli ne pade šestica, takšnih možnosti pa je 5^4. Ker je vseh možnosti 6^4, je $P(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$ in

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.5177.$$

(b) Naj bo sedaj dogodek

$B \ldots$ v 24 metih padeta vsaj enkrat dve šestici.

Podobno kot prej dobimo $P(\overline{B}) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$ in

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0.4914.$$

Vidimo, da se nam bolj splača igrati prvo igro. □

(8) Trikrat zapored vržemo kovanec. Izračunaj pogojni verjetnosti:

(a) da pade v tretjem metu grb, če vemo, da sta v prvih dveh metih padla grba,
(b) da pade v tretjem metu grb, če vemo, da je padel natanko en grb.

Rešitev: Vseh možnih elementarnih izidov je v tem primeru 8, in sicer

$$CCC,\ CCG,\ CGC,\ CGG,\ GCC,\ GCG,\ GGC,\ GGG.$$

(a) Definirajmo dogodka:

$A \ldots$ na tretjem kovancu je grb,
$B \ldots$ v prvih dveh metih padeta dva grba.

Pogojna verjetnost dogodka A glede na dogodek B je potem definirana s predpisom

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Pove nam, kakšna je verjetnost, da se zgodi dogodek A, če vemo, da se je zgodil dogodek B. Za dogodek AB je ugoden izid GGG, za dogodek B pa izida GGC in GGG. Od tod sledi

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{2}{8}} = \frac{1}{2}.$$

Brezpogojna verjetnost dogodka A je enaka $P(A) = \frac{1}{2}$, kar pomeni, da je $P(A) = P(A|B)$. To pomeni, da sta dogodka A in B neodvisna, čeprav se nam pogosto zdi, da se verjetnost, da bo padel grb zmanjša, če je pred tem že nekajkrat zapored padel grb. Ker je vsak met neodvisen od drugih, je vsakič verjetnost natanko ena polovica.

(b) Naj bo sedaj:

$A \ldots$ na tretjem kovancu je grb,
$B \ldots$ pade natanko en grb.

Potem je $P(AB) = \frac{1}{8}$ in $P(B) = \frac{3}{8}$. Sledi

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{3}.$$

V tem primeru $P(A) \neq P(A|B)$, kar pomeni, da sta dogodka A in B odvisna. Če namreč vemo, da je padel natanko en grb, potem bo z verjetnostjo ena tretjina padel v prvem, drugem ali pa v tretjem metu. □

(9) V prvi posodi imamo 6 belih in 4 črne kroglice, v drugi pa 3 bele in 6 črnih. Iz prve posode na slepo izberemo eno kroglico in jo prenesemo v drugo posodo, nato pa iz druge posode izvlečemo eno kroglico.

(a) Kolikšna je verjetnost, da je ta kroglica bela?
(b) Kolikšna je verjetnost, da je bila kroglica, ki smo jo prenesli iz prve v drugo posodo bela, če smo izvlekli belo kroglico?

Rešitev: (a) Pri tej nalogi imamo primer dvofaznega poskusa:

· V prvi fazi nastopi natanko ena izmed hipotez H_1, H_2,. . .,H_n,
· Izid poskusa v drugi fazi je odvisen od izida v prvi fazi.

Verjetnost dogodka A v drugi fazi potem izračunamo z obrazcem za popolno verjetnost

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + \cdots + P(A|H_n)P(H_n).$$

V prvi fazi iz prve posode v drugo posodo prenesemo eno kroglico. Za hipotezi bomo vzeli:

$H_1 \dots$ iz prve posode izvlečemo belo kroglico,
$H_2 \dots$ iz prve posode izvlečemo črno kroglico.

Verjetnosti, da se zgodita H_1 oziroma H_2 sta $P(H_1) = \frac{6}{10}$ in $P(H_2) = \frac{4}{10}$. Naj bo sedaj še

$A \dots$ iz druge posode izvlečemo belo kroglico.

Če smo iz prve posode v drugo prenesli belo kroglico, bodo v drugi posodi 4 bele in 6 črnih kroglic. Verjetnost, da iz druge posode izvlečemo belo kroglico, je v tem primeru enaka $P(A|H_1) = \frac{4}{10}$. Če pa smo iz prve posode v drugo prenesli črno kroglico, bodo v drugi posodi 3 bele in 7 črnih kroglic. Tedaj je $P(A|H_2) = \frac{3}{10}$. Z obrazcem za popolno verjetnost tako dobimo

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{36}{100}.$$

(b) Denimo sedaj, da smo iz druge posode izvlekli belo kroglico. Zanima nas, kakšna je potem verjetnost, da smo iz prve v drugo posodo prenesli belo kroglico, oziroma $P(H_1|A)$. Pomagali si bomo z Bayesovim obrazcem

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A)}.$$

Le-ta nam pove, kolikšna je verjetnost, da velja hipoteza H_i, če vemo, da se je zgodil dogodek A. V našem primeru je

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10}}{\frac{36}{100}} = \frac{2}{3}.$$

Rezultat lahko interpretiramo takole. Če smo iz druge posode izvlekli belo kroglico, je dvakrat bolj verjetno, da smo iz prve v drugo posodo prenesli belo kroglico, kot pa črno. $\square$

(10) Na dirki tekmuje 100 kolesarjev, eden izmed njih pa uživa nedovoljena poživila. Kolesarje testirajo s preizkusom, ki da z 99-odstotno verjetnostjo pozitiven rezultat, če je kolesar dopingiran in z 99-odstotno verjetnostjo negativen rezultat, če ni.

(a) Kolikšna je verjetnost, da bo test pozitiven, če testiramo naključnega kolesarja?
(b) Kolikšna je verjetnost, da je kolesar dopingiran, če je bil pozitiven na testu?

Rešitev: (a) Tudi tokrat imamo opravka z dvofaznim poskusom. V prvi fazi izberemo kolesarja, zato bomo za hipotezi vzeli:

$H_1 \dots$ izbrani kolesar je dopingiran,
$H_2 \dots$ izbrani kolesar ni dopingiran.

Velja $P(H_1) = \frac{1}{100}$ in $P(H_2) = \frac{99}{100}$. V drugi fazi izbranega kolesarja testiramo. Označimo dogodek

$A \dots$ test da pozitiven rezultat.

Če je bil izbrani kolesar dopingiran, bo $P(A|H_1) = \frac{99}{100}$, sicer pa $P(A|H_2) = \frac{1}{100}$. Sledi

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = \frac{99}{100} \cdot \frac{1}{100} + \frac{1}{100} \cdot \frac{99}{100} = \frac{198}{10000}.$$

(b) Predpostavimo sedaj, da je bil izbrani kolesar na testu pozitiven. Verjetnost, da je bil zares dopingiran, pa je

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{99}{100} \cdot \frac{1}{100}}{\frac{198}{10000}} = \frac{1}{2}.$$

Kljub temu, da je test 99-odstotno zanesljiv, je verjetnost, da smo našli dopingiranega kolesarja samo 50-odstotna. $\square$