Matematika 2

Ponovitev Matematike 1

(1) Nariši grafe naslednjih funkcij:

(a) $f(x) = 2x - 1$,

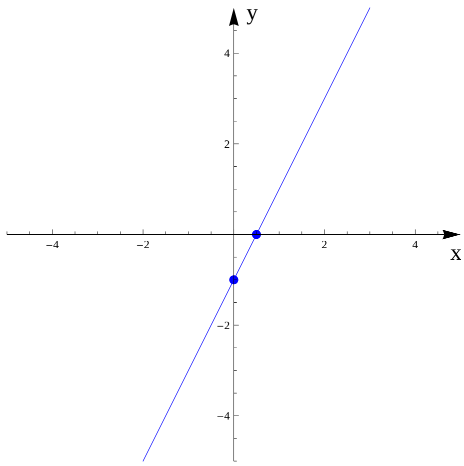
(b) $f(x) = x^2 - 2x - 3$,

(c) $f(x) = x^3 - x$,

(d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$,

(e) $f(x) = \ln(x+1) - 1$.

Rešitev: (a) Linearna funkcija $f(x) = 2x - 1$ ima začetno vrednost $f(0) = -1$ in ničlo $x = 1/2$. Definirana je povsod in zavzame vse vrednosti.



Je naraščajoča in neomejena. Lokalnih ekstremov in prevojev nima.

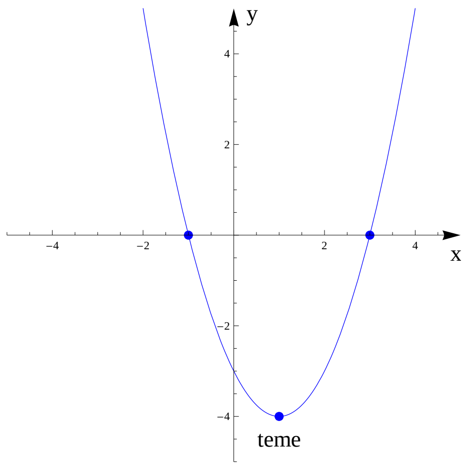
(b) Kvadratna funkcija $f(x) = x^2 - 2x - 3$ je definirana za vsako realno število. Iz razcepa

$$x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$$

lahko preberemo, da ima ničli $x_1 = 3$ in $x_2 = -1$. Kvadratna funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ ima teme v točki

$$T = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{2a}\right).$$

Naša funkcija ima tako teme v točki $T(1, -4)$.

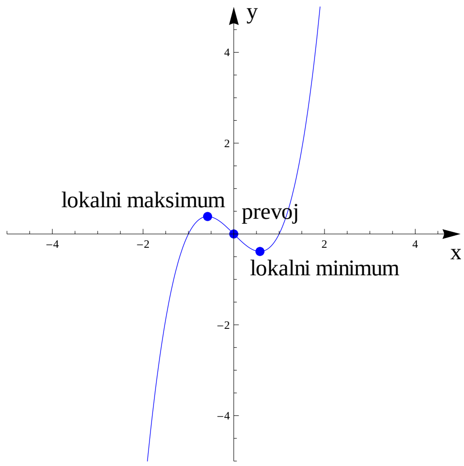


Zaloga vrednosti funkcije f je interval $Z_f = [-4, \infty)$, kar pomeni, da je f neomejena funkcija. Levo od temena pada, desno od temena pa narašča. V temenu ima lokalni minimum. Je konveksna funkcija.

(c) Polinom $f(x) = x^3 - x$ je definiran za vsako realno število, zato je $D_f = \mathbb{R}$. Ker je lihe stopnje, je surjektiven, kar pomeni, da je $Z_f = \mathbb{R}$. Iz razcepa

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$$

lahko preberemo, da ima f tri realne ničle, in sicer $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ in $x_3 = 1$. Pri $x \to \infty$ bo vrednost funkcije f rasla čez vse meje, pri $x \to -\infty$ pa bo šla proti minus neskončno.

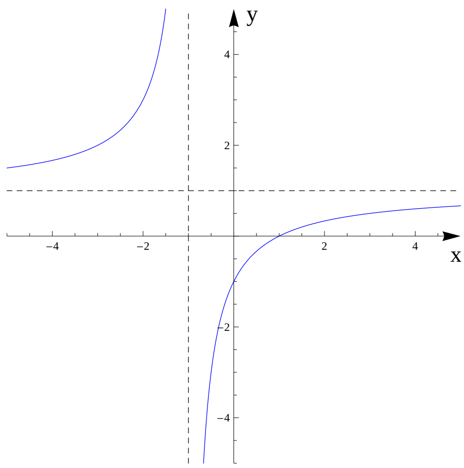


Najprej funkcija nekaj časa narašča, nato pada, nazadnje pa spet narašča. Ima en lokalni minimum in en lokalni maksimum. Levo od izhodišča je funkcija konkavna, desno od izhodišča pa konveksna. V točki $x = 0$ ima prevoj. Ker je vsota samih lihih potenc, je f liha funkcija.

(d) Racionalna funkcija $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ima pol pri $x = -1$ in ničlo $x = 1$. Od tod takoj sledi, da je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Iz enakosti

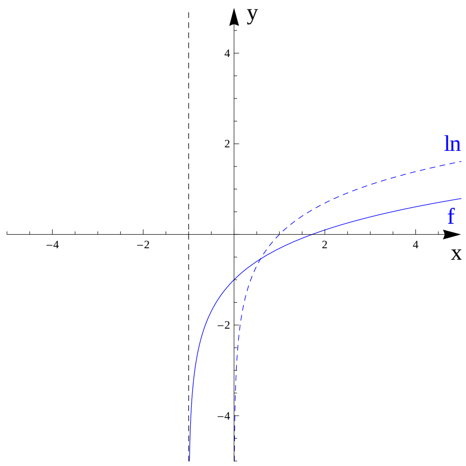
$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$$

sledi, da je premica $y = 1$ vodoravna asimptota funkcije f pri $x \to \pm\infty$ ter da je zaloga vrednosti funkcije f enaka $Z_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.



Funkcija f ves čas narašča. Levo od pola je konveksna, desno od pola pa konkavna. Funkcija f je bijekcija iz množice $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ na množico $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(e) Logaritemska funkcija $f(x) = \ln(x+1) - 1$ je definirana na $D_f = (-1, \infty)$, pri $x = -1$ pa ima logaritemski pol. Ničlo ima pri $x = e-1$. Njen graf dobimo tako, da graf naravnega logaritma prestavimo za eno enoto v levo in eno enoto navzdol.



Funkcija f povsod narašča, a čedalje počasneje. Povsod je konkavna. Lokalnih ekstremov in prevojev nima. Pri $x \to \infty$ raste čez vse meje. Je injektivna in surjektivna, zato definira bijekcijo $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$. $\square$

(2) Izračunaj odvode funkcij:

(a) $h(x) = 3x^3 + 3\cos x + 2e^x - \ln x$,

(b) $h(x) = (x^2 - 2)\sqrt{x}$,

(c) $h(x) = x \ln x$,

(d) $h(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$,

(e) $h(x) = \operatorname{tg} x$.

Rešitev: Odvode naslednjih funkcij bomo izračunali s pomočjo tabele osnovnih odvodov in pa s pomočjo pravil za odvod vsote, produkta in kvocienta funkcij:

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x), \\
(f \cdot g)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \\
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.
\end{aligned}$$

Prvi dve formuli veljata za poljubni odvedljivi funkciji f in g, pri zadnji pa mora biti funkcija g neničelna. Iz formule za odvod produkta in pa dejstva, da je odvod konstante enak nič, sledi še, da za poljuben $c \in \mathbb{R}$ in za poljubno odvedljivo funkcijo f velja

$$(c \cdot f)'(x) = cf'(x).$$

(a) $h'(x) = 9x^2 - 3\sin x + 2e^x - \dfrac{1}{x}$.

(b) $h'(x) = 2x \cdot \sqrt{x} + (x^2 - 2) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$.

(c) $h'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$.

(d) $h'(x) = \dfrac{1 \cdot (1 - x^2) - x \cdot (-2x)}{(1 - x^2)^2} = \dfrac{1 + x^2}{(1 - x^2)^2}$.

(e) $h'(x) = \dfrac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

□

(3) Izračunaj odvode funkcij:

(a) $h(x) = \ln(2x + 3)$,
(b) $h(x) = e^{-x^2}$,
(c) $h(x) = x^2 e^{-x}$.

Rešitev: Za odvod sestavljenih funkcij uporabljamo verižno pravilo

$$(f(y(x)))' = f'(y(x)) \cdot y'(x).$$

Krajše lahko to zapišemo v obliki $(f \circ y)' = f'(y) \cdot y'$. Funkciji f in y poskušamo izbrati tako, da znamo vsako posebej odvajati s pomočjo tabele ali pa ostalih pravil.
(a) Vzemimo $y = 2x + 3$. Potem je $h(x) = \ln y$, $y' = 2$ in

$h'(x) = (\ln y)' = \dfrac{1}{y} \cdot y' = \dfrac{2}{2x + 3}$.

(b) Tokrat naj bo $y = -x^2$. Sledi $h(x) = e^y$, $y' = -2x$ in

$h'(x) = (e^y)' = e^y \cdot y' = -2x\, e^{-x^2}$.

(c) $h'(x) = (x^2)' \cdot e^{-x} + x^2 \cdot (e^{-x})' = 2xe^{-x} + x^2(-e^{-x}) = (2x - x^2)e^{-x}$.

□

(4) Dana je krivulja $y = x^2$.

(a) Poišči tangento in normalo na dano krivuljo v točki z absciso $x = 1$.
(b) Poišči točko na krivulji, v kateri je normala na krivuljo vzporedna premici $y = x + 2$.

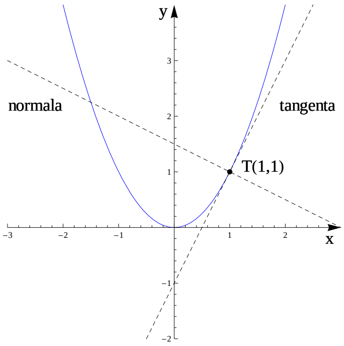
Rešitev: (a) Spomnimo se, da lahko premico, ki ima smerni koeficient k in gre skozi točko $T(x_0, y_0)$, podamo z enačbo

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

V primeru, ko iščemo tangento na krivuljo $y = f(x)$, se lahko spomnemo na geometrijski pomen odvoda, da izpeljemo, da je

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

enačba tangente na dano krivuljo v točki $(x_0, f(x_0))$.



V našem primeru je $y'(x) = 2x$, točka na krivulji pa $T(1, 1)$. Smerni koeficient tangente v tej točki je $k_t = y'(1) = 2$, enačba tangente skozi to točko pa

$$y = 2x - 1.$$

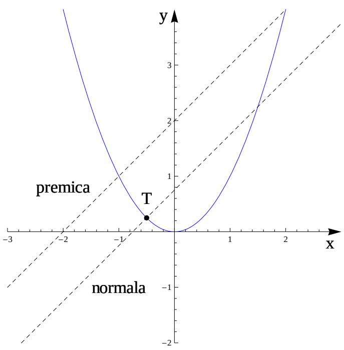
Normala na krivuljo je pravokotna na tangento, kar pomeni, da je $k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{2}$. Od tod dobimo enačbo normale

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}.$$

(b) Premici v ravnini sta vzporedni, če imata isti smerni koeficient. Iščemo torej tak x_0, da bo $-\frac{1}{y'(x_0)} = 1$, oziroma

$$-\frac{1}{2x_0} = 1.$$

Sledi $x_0 = -\frac{1}{2}$, iskana točka pa je $T\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.



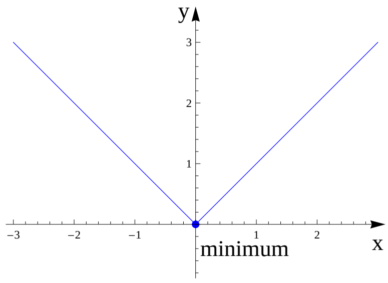
$\square$

(5) Določi globalni maksimum in globalni minimum funkcije $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ na intervalu $[-1, 3]$.

Rešitev: Ena izmed lepih lastnosti zveznih funkcij je ta, da vsaka zvezna funkcija f, ki je definirana na omejenem in zaprtem intervalu $[a, b]$, na tem intervalu doseže svojo minimalno in maksimalno vrednost. Če je funkcija f še razmeroma gladka, lahko ti dve vrednosti poiščemo s pomočjo odvoda. Pri iskanju ekstremnih vrednosti najprej zožimo nabor morebitnih kandidatov na naslednje tipe točk z intervala $[a, b]$:

· stacionarne točke funkcije f v (a, b) (to so točke $x \in (a, b)$, za katere velja $f'(x) = 0$),
· robni točki intervala $[a, b]$,
· točke na intervalu $[a, b]$, v katerih funkcija f ni odvedljiva.

Pri večini funkcij, ki jih obravnavamo, prideta v poštev samo prvi dve možnosti. Primer funkcije, ki ni odvedljiva povsod, pa je funkcija $f(x) = |x|$, ki ni odvedljiva v točki $x = 0$.



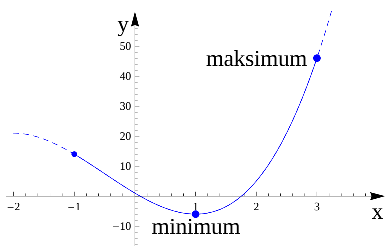
Najprej izračunajmo odvod funkcije $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$. Velja

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x + 2)(x - 1).$$

Stacionarni točki sta torej $x = -2$ in $x = 1$. Znotraj intervala $[-1, 3]$ pa leži samo stacionarna točka $x = 1$. Polinomi so odvedljive funkcije, zato so kandidati za ekstreme funkcije f točke $\{-1, 1, 3\}$. Sedaj moramo izračunati vrednosti funkcije f v teh točkah, da najdemo ekstremni vrednosti. Iz vrednosti $f(-1) = 14$, $f(1) = -6$ in $f(3) = 46$ sklepamo, da je

$$\max(f) = 46 \text{ pri } x = 3,$$
$$\min(f) = -6 \text{ pri } x = 1.$$

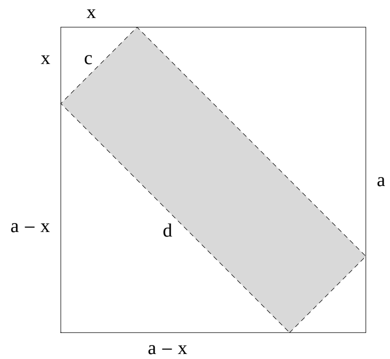
Poglejmo še graf funkcije f.



□

(6) V kvadrat s stranico a včrtamo pravokotnik, katerega stranice so vzporedne diagonalama kvadrata. Med vsemi takšnimi pravokotniki poišči tistega, ki ima največjo ploščino, in jo tudi izračunaj.

Rešitev: Najprej označimo dolžine odsekov na stranicah kvadrata, ki jih določajo stranice pravokotnika z x in $a-x$.



Z uporabo Pitagorovega izreka potem dobimo

$$c = \sqrt{2}x,$$
$$d = \sqrt{2}(a-x).$$

Ploščina včrtanega pravokotnika je odvisna od parametra x, in sicer

$$S(x) = cd = \sqrt{2}x\sqrt{2}(a-x) = 2(ax - x^2).$$

Možne dolžine parametra x ležijo na intervalu $x \in [0, a]$. Robni točki sicer ustrezata degeneriranima pravokotnikoma.

Iščemo torej maksimum funkcije S na intervalu $[0, a]$. Odvod funkcije S je enak

$$S'(x) = 2\left(a - 2x\right),$$

od koder dobimo, da je $x = \frac{a}{2}$ stacionarna točka funkcije S. Levo od stacionarne točke je odvod pozitiven, desno pa negativen, zato v tej točki funkcija S doseže svoj maksimum.

Med včrtanimi pravokotniki ima največjo ploščino kvadrat z dolžino stranice

$$c = d = \frac{a}{2},$$

njegova ploščina pa je enaka $S = \frac{a^2}{2}$. □

(7) Izračunaj integrale s pomočjo tabele elementarnih integralov:

(a) $\displaystyle\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\,dx,$

(b) $\displaystyle\int 5^x 3^{-x}\,dx,$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx,$

(d) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,dx.$

Rešitev:

(a) $\displaystyle\int \left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)\,dx = \int \left(x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}+x-\sqrt{x}+1\right)\,dx = \underline{\underline{\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+x+C}}.$

(b) $\displaystyle\int 5^x 3^{-x}\,dx = \int \left(\frac{5}{3}\right)^x dx = \underline{\underline{\frac{1}{\ln\frac{5}{3}}\left(\frac{5}{3}\right)^x + C}}.$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-2}{x^2+1}\,dx = \int \left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)dx = \underline{\underline{x-2\operatorname{arc\,tg} x + C}}.$

(d) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx = \underline{\underline{\operatorname{tg} x - x + C}}.$

$\square$

(8) Izračunaj integrale s pomočjo substitucije:

(a) $\displaystyle\int (5-2x)^9\,dx,$

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+9},$

(c) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx,$

(d) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx.$

Rešitev:

(a) $\displaystyle\int (5-2x)^9\,dx$:

Vzemimo novo spremenljivko $t = 5-2x$. Sledi $dt = -2dx$ in

$$\int (5-2x)^9\,dx = -\frac{1}{2}\int t^9\,dt = -\frac{1}{20}t^{10}+C = \underline{\underline{-\frac{1}{20}(5-2x)^{10}+C}}.$$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+9}\,dx$:

Vzemimo novo spremenljivko $t = \frac{x}{3}$. Potem je $dt = \frac{dx}{3}$ in

$$\int \frac{1}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \underline{\underline{\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3}+C}}.$$

<u>Opomba</u>: Na podoben način lahko izračunamo, da za vsak $a>0$ velja

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C.$$

(c) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx$:

Poskusimo z novo spremenljivko $t = 2+\sin x$. Potem je $dt = \cos x\,dx$ in

$$\int \frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \underline{\underline{\ln|2+\sin x| + C}}.$$

Opomba: Včasih integriramo funkcije oblike $f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$, kjer je g neka funkcija. V takih primerih uvedemo novo spremenljivko $u = g(x)$ (sledi $du = g'(x)dx$), da dobimo

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|g(x)| + C.$$

(d) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx$:

Uvedimo novo spremenljivko $t = x^2+4$. Sledi $dt = 2x\,dx$ in

$$\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \underline{\underline{\ln|x^2+4| + C}}.$$

$\square$

(9) Izračunaj integrale s pomočjo integracije po delih:

(a) $\displaystyle\int \ln x\,dx$,

(b) $\displaystyle\int xe^{-x}\,dx$,

(c) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx$.

Rešitev: Pri integraciji po delih si pomagamo s formulo

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Ponavadi se pri izbiri u in dv ravnamo po načelu:

· u ... funkcija, ki se pri odvajanju poenostavi,
· dv ... izraz, ki ga znamo integrirati.

(a) $\displaystyle\int \ln x\,dx$:

Vzemimo $u = \ln x$ in $dv = dx$. Sledi $du = \frac{dx}{x}$ in $v = x$. Tako dobimo

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,dx = \underline{\underline{x\ln x - x + C}}.$$

(b) $\int xe^{-x}\,dx$:

Pri tem integralu bomo funkcijo e^{-x} integrirali, funkcijo x pa odvajali.

$$\int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} - \int(-e^{-x})\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = \underline{\underline{(-x-1)e^{-x} + C}}.$$

Opomba: Na podoben način lahko izračunamo integrale oblike

$$\int p(x)e^{kx}\,dx,$$

kjer je p poljuben polinom in k poljubno realno število.

(c) $\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx$:

Funkcijo $\operatorname{arc\,tg} x$ bomo odvajali, izraz dx pa integrirali. V dobljenem integralu bomo nato uvedli novo spremenljivko $t = x^2 + 1$. Sledi

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx &= x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t},\\ &= \underline{\underline{x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C}}.\end{aligned}$$

□

(10) Izračunaj določene integrale s pomočjo Newton-Leibnizeve formule:

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$,

(b) $\int_0^3 (x^2 + x - 1)\,dx$,

(c) $\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx$.

Rešitev: Določeni integral računamo s pomočjo Leibnizove formule. Naj bosta f in F zvezni funkciji na $[a,b]$, za kateri velja $F'(x) = f(x)$ za $x \in (a,b)$. Potem velja

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + 1 = \underline{\underline{1}}$.

(b) $\int_0^3 (x^2 + x - 1)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_0^3 = 9 + \frac{9}{2} - 3 = \underline{\underline{\frac{21}{2}}}$.

(c) $\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{2\pi} = \underline{\underline{\pi}}$.

Opomba: Na integral iz točke (c) pogosto naletimo, zato se splača zapomniti naslednjo lastnost. Velja

$$\int_a^b \sin^2 kx\,dx = \int_a^b \cos^2 kx\,dx = \frac{b-a}{2},$$

če je dolžina intervala $[a,b]$ večkratnik periode funkcij $\sin kx$ oziroma $\cos kx$. To pomeni, da je $b-a = n\cdot\frac{2\pi}{k}$ za neko naravno število n. □

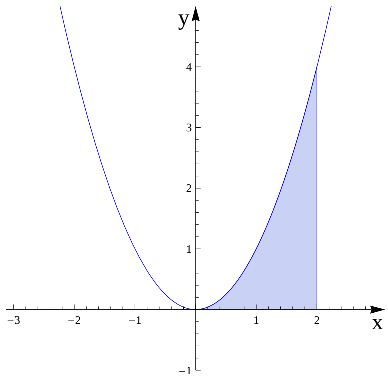
(11) Izračunaj ploščine likov pod grafi danih funkcij:

(a) $f(x) = x^2$ na $[0,2]$,
(b) $f(x) = e^x$ na $[0,1]$,
(c) $f(x) = x\sin x$ na $[0,\pi]$.

Rešitev: Naj bo f zvezna, pozitivna funkcija na intervalu $[a,b]$. Ploščina lika, ki leži pod grafom funkcije f na intervalu $[a,b]$, je enaka

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

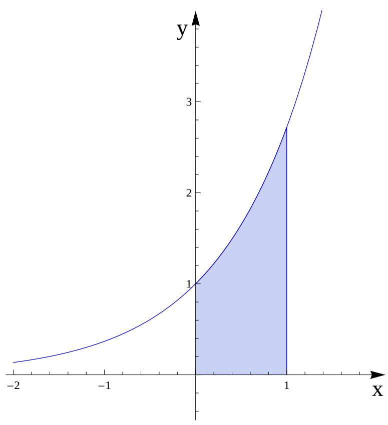
(a) Najprej bomo izračunali ploščino lika pod kvadratno parabolo.



Računajmo:

$$S = \int_0^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \underline{\underline{\frac{8}{3}}}.$$

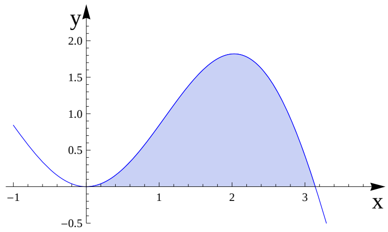
(b) Ploščina lika pod grafom eksponentne funkcije



je enaka

$$S = \int_0^1 e^x \, dx = e^x \Big|_0^1 = \underline{\underline{e - 1}}.$$

(c) Poglejmo si lik pod grafom funkcije $f(x) = x \sin x$ na intervalu $[0, \pi]$.



Za izračun njegove ploščine bomo funkcijo f integrirali po delih. Označimo $u = x$ in $\sin x \, dx = dv$. Potem je $du = dx$ in $v = -\cos x$, kar nam da

$$S = \int_0^\pi x \sin x \, dx = -x \cos x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x \, dx = \pi + \sin x \Big|_0^\pi = \underline{\underline{\pi}}.$$

□