Matematika 2

Premice in ravnine

(1) Dana sta vektorja $\vec{a} = (5, 3, 4)$ in $\vec{b} = (0, -8, 6)$. Izračunaj skalarni produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$, njuni dolžini ter kot med njima.

Rešitev: Skalarni produkt dveh vektorjev $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ je število, definirano s predpisom

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

V našem primeru je tako

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (5, 3, 4) \cdot (0, -8, 6) = 0 - 24 + 24 = 0.$$

S pomočjo skalarnega produkta računamo dolžine vektorjev in pa kote med vektorji. Dolžina vektorja $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ je enaka

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Dolžina vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je torej:

$$|\vec{a}| = \sqrt{25 + 9 + 16} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2},$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{0 + 64 + 36} = \sqrt{100} = 10.$$

Če poznamo skalarni produkt in dolžini vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$, lahko izračunamo kot med njima po formuli

$$\cos\phi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

V našem primeru je

$$\cos\phi = \frac{0}{5\sqrt{2} \cdot 10} = 0,$$

od koder sledi $\phi = 90°$. V splošnem velja, da sta vektorja pravokotna natanko takrat, ko je njun skalarni produkt enak nič. □

(2) Izračunaj vektorske produkte vektorjev:

(a) $\vec{a} = (2, 1, 3)$ in $\vec{b} = (-1, 5, 6)$,

(b) $\vec{a} = (1, 3, 5)$ in $\vec{b} = (1, -2, -3)$,

(c) $\vec{a} = (-2, 8, 1)$ in $\vec{b} = (0, 1, 1)$.

Rešitev: Vektorske produkte računamo s pomočjo determinant. Če sta $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorja, je njun vektorski produkt spet vektor, ki ga dobimo s predpisom

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

(a) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (6\vec{i} - 3\vec{j} + 10\vec{k}) - (15\vec{i} + 12\vec{j} - \vec{k}) = (-9, -15, 11).$

(b) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = (-9\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}) - (-10\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}) = (1, 8, -5).$

(c) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (8\vec{i} + 0\vec{j} - 2\vec{k}) - (\vec{i} - 2\vec{j} + 0\vec{k}) = (7, 2, -2).$

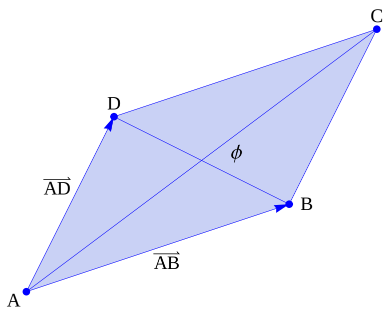
□

(3) Dan je paralelogram z oglišči $A(-3,-2,0)$, $B(3,-3,1)$, $C(5,0,2)$ in $D(-1,1,1)$.

(a) Izračunaj dolžino stranic paralelograma in kot med njegovima diagonalama.

(b) Izračunaj ploščino paralelograma $ABCD$.

Rešitev: (a) Dolžine stranic paralelograma lahko izračunamo tako, da najprej izračunamo ustrezne vektorje, nato pa še njihovo dolžino (slika je simbolna).



Stranici paralelograma sta določeni z vektorjema $\overrightarrow{AB} = (6,-1,1)$ in $\overrightarrow{AD} = (2,3,1)$, zato je

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}} = \sqrt{36+1+1} = \sqrt{38},$$

$$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD}} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}.$$

Kot med premicama je po definiciji ostri kot med njunima smernima vektorjema. Smeri obeh diagonal sta določeni z vektorjema $\overrightarrow{AC} = (8,2,2)$ in $\overrightarrow{BD} = (-4,4,0)$, od koder s pomočjo skalarnega produkta lahko izračunamo, da velja

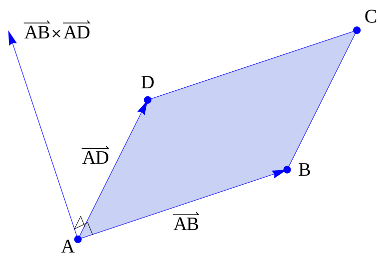
$$\cos\phi = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|} = \frac{|-32+8|}{\sqrt{64+4+4} \cdot \sqrt{16+16}} = \frac{24}{\sqrt{72 \cdot 32}} = \frac{1}{2}.$$

To pomeni, da je $\phi = 60°$.

(b) Izračunajmo najprej vektorski produkt

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 18\vec{k} - (3\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}) = (-4, -4, 20).$$

Ploščino paralelograma $ABCD$ lahko potem izračunamo s pomočjo vektorskega produkta na naslednji način. Vektorski produkt vektorjev $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AD}$ kaže v smer normale na ravnino paralelograma, njegova dolžina pa je enaka ploščini paralelograma, ki ga napenjata ta dva vektorja.



Od tod dobimo

$$S = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = |(-4, -4, 20)| = \sqrt{16 + 16 + 400} = 12\sqrt{3}.$$

$\square$

(4) Zapiši parametrično in normalno obliko enačb naslednjih premic v prostoru:

(a) premice skozi točki $A(1, 2, -1)$ in $B(1, 0, 2)$,

(b) premice skozi točko $A(5, 8, 3)$ in s smerjo $\vec{s} = (2, 2, 1)$,

(c) premice, ki je vzporedna premici $p : \dfrac{x-2}{2} = y + 1 = \dfrac{z+2}{-1}$ in gre skozi točko $A(1, 1, 1)$.

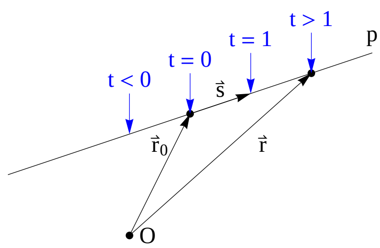
Rešitev: Premica p v prostoru je podana s točko $\vec{r}_0$ na njej in z neničelnim smernim vektorjem $\vec{s} \in \mathbb{R}^3$, ali pa z dvema točkama na njej. Premico lahko parametriziramo s predpisom

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s},$$

pri čemer je t parameter, ki določa, kje na premici smo, lahko pa jo podamo tudi v obliki sistema enačb

$$\frac{x - x_0}{s_x} = \frac{y - y_0}{s_y} = \frac{z - z_0}{s_z},$$

če uporabimo oznake $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ in $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z)$.



(a) Za točko na premici lahko izberemo točko $A(1,2,-1)$ za njeno smer pa vektor od točke A do točke B, oziroma $\vec{s}=(0,-2,3)$. Parametrična oblika enačbe dane premice je tako

$$\vec{r}=(1,2,-1)+t(0,-2,3),$$

normalna oblika pa je

$$x=1,\ \frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{3}.$$

Parametrično obliko enačbe premice lahko zapišemo tudi po komponentah na naslednji način:

$$\begin{aligned} x&=1,\\ y&=2-2t,\\ z&=-1+3t. \end{aligned}$$

(b) V tem primeru vzemimo za točko na premici točko $A(5,8,3)$, za njeno smer pa vektor $\vec{s}=(2,2,1)$. Parametrična in normalna oblika enačbe dane premice sta

$$\vec{r}=(5,8,3)+t(2,2,1) \quad \text{in} \quad \frac{x-5}{2}=\frac{y-8}{2}=z-3.$$

(c) Vzporedni premici imata isto smer, zato je smer iskane premice $\vec{s}=(2,1,-1)$. Za začetno točko bomo vzeli točko $A(1,1,1)$. Enačbi iskane premice sta torej

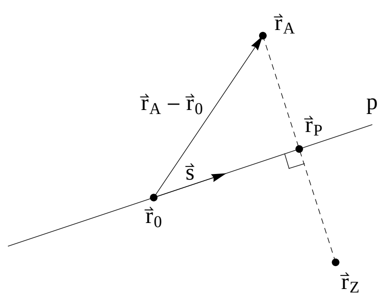
$$\vec{r}=(1,1,1)+t(2,1,-1) \quad \text{in} \quad \frac{x-1}{2}=y-1=1-z.$$

$\square$

(5) Dani sta točka $A(7,1,3)$ in premica $p:\vec{r}=(3,-1,0)+t(1,1,2)$.

(a) Poišči pravokotno projekcijo točke A na premico p.
(b) Poišči zrcalno sliko točke A glede na premico p.

Rešitev: (a) Poglejmo si najprej skico.



Pravokotno projekcijo točke A na premico p lahko izračunamo po formuli

$$\vec{r}_P=\vec{r}_0+((\vec{r}_A-\vec{r}_0)\cdot\vec{s})\,\frac{\vec{s}}{|\vec{s}|^2}$$

V našem primeru je $\vec{s}=(1,1,2)$ in $|\vec{s}|^2=6$. Od tod dobimo

$$\vec{r}_P=(3,-1,0)+\big((4,2,3)\cdot(1,1,2)\big)\frac{\vec{s}}{6}=(5,1,4).$$

(b) Zrcalna slika točke A glede na premico p pa je

$$\vec{r}_Z = \vec{r}_A + 2(\vec{r}_P - \vec{r}_A) = 2\vec{r}_P - \vec{r}_A = (10, 2, 8) - (7, 1, 3) = (3, 1, 5).$$

□

(6) Ugotovi, ali se dani premici sekata. Če se, izračunaj kot med njima.

(a) Premici $p : \vec{r} = (0, 1, 0) + t(1, 1, 0)$ in $q : \vec{r} = (4, 5, 8) + u(0, 0, 1)$.

(b) Premici $p : x = 1, \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+1}{3}$ in $q : x - 7 = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-4}{2}$.

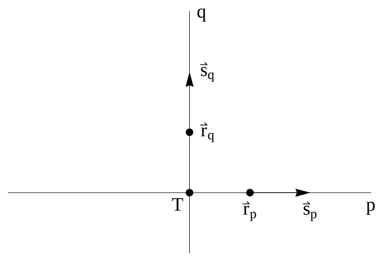
Rešitev: (a) Enačbi obeh premic lahko zapišemo po komponentah kot

$$\begin{aligned} x &= t, & x &= 4, \\ y &= 1 + t, & y &= 5, \\ z &= 0, & z &= 8 + u. \end{aligned}$$

Če komponente paroma izenačimo, dobimo sistem treh enačb za dve neznanki

$$\begin{aligned} t &= 4, \\ 1 + t &= 5, \\ 0 &= 8 + u, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $t = 4$ in $u = -8$. Presečišče premic p in q je torej točka $T(4, 5, 0)$. Kot med premicama je po definiciji tisti kot med njunima smernima vektorjema, ki je oster. Smerna vektorja danih premic sta $\vec{s}_p = (1, 1, 0)$ in $\vec{s}_q = (0, 0, 1)$. Ker je $\vec{s}_p \cdot \vec{s}_q = 0$, sta premici pravokotni.



(b) Sedaj imamo premici podani v normalni obliki, po komponentah pa jih lahko zapišemo v obliki

$$\begin{aligned} x &= 1, & x &= 7 + u, \\ y &= 2 - 2t, & y &= -2 + 2u, \\ z &= -1 + 3t, & z &= 4 + 2u. \end{aligned}$$

Če komponente paroma izenačimo, dobimo sistem

$$\begin{aligned} 1 &= 7 + u, \\ 2 - 2t &= -2 + 2u, \\ -1 + 3t &= 4 + 2u. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe dobimo $u = -6$, iz druge enačbe pa potem sledi $t = 8$. Če ti dve vrednosti vstavimo v tretjo enačbo, dobimo enakost $23 = -8$, ki pa ne velja. To pomeni, da se premici p in q ne sekata. □

(7) Zapiši parametrično in normalno obliko enačb naslednjih ravnin v prostoru:

(a) ravnine skozi točke $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ in $C(0,0,1)$,

(a) ravnine skozi točke $A(1,0,0)$, $B(5,4,0)$ in $C(-3,2,0)$,

(c) ravnine skozi točko $A(3,4,1)$ in s smerjo normale $\vec{n} = (2,-1,1)$.

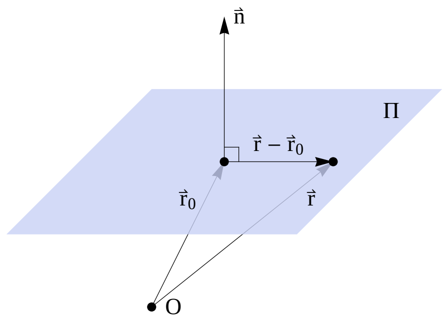
Rešitev: Ravnina Π v prostoru je določena s točko na njej in z normalnim vektorjem, s premico in točko, ki ne leži na premici, ali pa s tremi nekolinearnimi točkami. Če ima ravnina za normalo vektor $\vec{n} \neq \vec{0}$, na njej pa leži točka s krajevnim vektorjem $\vec{r}_0$, lahko zapišemo enačbo ravnine v obliki

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0.$$

Če označimo $\vec{r} = (x,y,z)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ in $\vec{n} = (a,b,c)$, lahko enačbo ravnine napišemo v *standardni* oziroma *normalni* obliki

$$ax + by + cz = d,$$

kjer je $d = ax_0 + by_0 + cz_0$.



Ravnino lahko podamo tudi v parametrični obliki

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}_1 + u\vec{s}_2,$$

kjer je $\vec{r}_0$ točka na ravnini, vektorja $\vec{s}_1$ in $\vec{s}_2$ pa dva linearno neodvisna vektorja, ki ležita v ravnini.

(a) Iščemo ravnino skozi dane tri točke. Če hočemo zapisati ravnino v parametrični obliki, lahko vzamemo za smerna vektorja kar $\vec{s}_1 = \overrightarrow{AB} = (-1,1,0)$ in $\vec{s}_2 = \overrightarrow{AC} = (-1,0,1)$, za točko pa vzemimo točko A. Tako dobimo parametrizacijo ravnine

$$\vec{r} = (1,0,0) + t(-1,1,0) + u(-1,0,1),$$

oziroma po komponentah:

$$\begin{aligned} x &= 1 - t - u, \\ y &= t, \\ z &= u. \end{aligned}$$

Za izračun normalne oblike enačbe dane ravnine moramo najprej izračunati smer normale. Ta je pravokotna na oba smerna vektorja, zato jo lahko dobimo s pomočjo vektorskega produkta

$$\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = (-1,1,0) \times (-1,0,1) = (1,1,1).$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned}(\vec{r}-\vec{r}_A)\cdot\vec{n}&=0,\\(x-1,y,z)\cdot(1,1,1)&=0,\\x-1+y+z&=0.\end{aligned}$$

Normalna enačba dane ravnine je torej

$$x+y+z=1.$$

(b) Smerna vektorja sta tokrat $\vec{s}_1=\overrightarrow{AB}=(4,4,0)$ in $\vec{s}_2=\overrightarrow{AC}=(-4,2,0)$, od koder dobimo parametrično obliko enačbe ravnine

$$\vec{r}=(1,0,0)+t(4,4,0)+u(-4,2,0).$$

Normalni vektor na dano ravnino je vektor

$$\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=(4,4,0)\times(-4,2,0)=(0,0,24).$$

Od tod dobimo še normalno enačbo ravnine

$$\begin{aligned}(\vec{r}-\vec{r}_A)\cdot\vec{n}&=0,\\(x-1,y,z)\cdot(0,0,24)&=0,\\z&=0.\end{aligned}$$

(c) V tem primeru imamo dano točko $A(3,4,1)$ na ravnini in njeno normalo $\vec{n}=(2,-1,1)$. Od tod takoj dobimo normalno enačbo ravnine

$$\begin{aligned}(\vec{r}-\vec{r}_A)\cdot\vec{n}&=0,\\(x-3,y-4,z-1)\cdot(2,-1,1)&=0,\\2(x-3)-(y-4)+(z-1)&=0,\\2x-y+z&=3.\end{aligned}$$

Da bi dobili še parametrizacijo ravnine, moramo najti dva smerna vektorja, ki ležita v ravnini. Dobimo ju lahko na primer tako, da najprej izberemo dve točki na ravnini, ki zadoščata normalni enačbi. Če izberemo točki $B(1,0,1)$ in $C(0,0,3)$, dobimo smerna vektorja $\vec{s}_1=\overrightarrow{AB}=(-2,-4,0)$ in $\vec{s}_2=\overrightarrow{AC}=(-3,-4,2)$. Od tod dobimo parametrizacijo ravnine

$$\vec{r}=(3,4,1)+t(-2,-4,0)+u(-3,-4,2).$$

□

(8) Izračunaj presečišči:

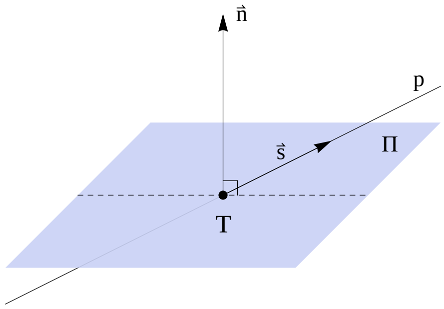
(a) premice $p:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=z+2$ in ravnine $\Pi: x+y-z=-2$,

(b) ravnin $\Pi: 2x+3y-z+1=0$ in $\Sigma: x-y+z-8=0$.

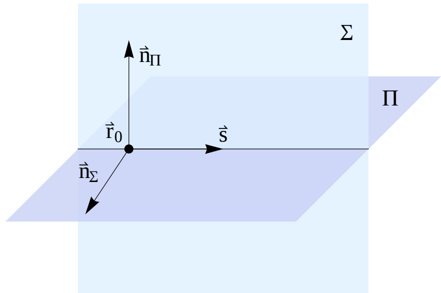
Rešitev: (a) Če premica in ravnina nista vzporedni, se sekata v eni točki. To točko lahko dobimo tako, da komponente parametrične oblike enačbe premice vstavimo v normalno obliko enačbe ravnine. Po komponentah lahko enačbo premice zapišemo v obliki $x=2t$, $y=3t$ in $z=-2+t$. Ko to vstavimo v enačbo ravnine, dobimo

$$2t+3t-(-2+t)=-2.$$

Od tod sledi $t=-1$, kar pomeni, da se premica in ravnina sekata v točki $T(-2,-3,-3)$.



(b) Ravnini imata normalna vektorja $\vec{n}_\Pi = (2, 3, -1)$ in $\vec{n}_\Sigma = (1, -1, 1)$, kar pomeni, da nista vzporedni.



V takšnem primeru je njun presek premica s smerjo $\vec{s} = \vec{n}_\Pi \times \vec{n}_\Sigma$, za izhodiščno točko pa lahko izberemo poljubno točko, ki leži na obeh ravninah. Sledi:

$$\vec{s} = \vec{n}_\Pi \times \vec{n}_\Sigma = (2, 3, -1) \times (1, -1, 1) = (2, -3, -5).$$

Za točko na premici pa lahko na primer izberemo točko $\vec{r}_0 = (1, 2, 9)$. Torej je presek obeh ravnin premica

$$\vec{r} = (1, 2, 9) + t(2, -3, -5).$$

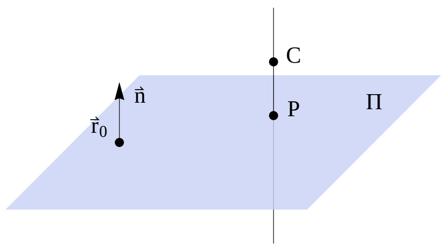
□

(9) Dana je točka $C(1, 0, 1)$ in ravnina $\Pi : x + z = 1$.

(a) Poišči pravokotno projekcijo točke C na ravnino Π.

(b) Izračunaj razdaljo točke C od ravnine Π.

Rešitev: (a) Pravokotno projekcijo točke C na ravnino Π lahko izračunamo kot presek ravnine in pa premice, ki je pravokotna na ravnino in gre skozi C.



Ta premica ima smer $\vec{s} = (1, 0, 1)$, zato je njena parametrična oblika $\vec{r} = (1, 0, 1) + t(1, 0, 1)$. Ko komponente vstavimo v enačbo ravnine Π, dobimo enačbo

$$1 + t + 1 + t = 1,$$

ki ima rešitev $t = 1/2$. Projekcija točke C na ravnino Π je torej točka $P(1/2, 0, 1/2)$.

(b) Razdalja točke od ravnine je enaka razdalji med točko in njeno projekcijo. V našem primeru je tako

$$d(C, \Pi) = |\overrightarrow{CP}| = |(-1/2, 0, -1/2)| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\square$