Matematika 2

Slučajne spremenljivke

(1) V posodi so štiri kroglice s številkami -2, -1, 0 in 1. Iz posode naključno izvlečemo eno kroglico in označimo z X število na njej.

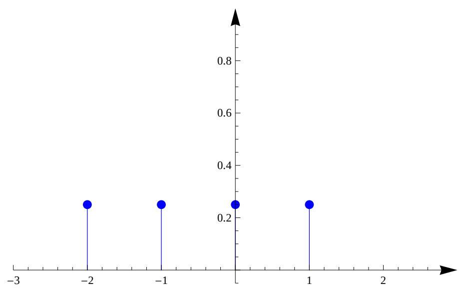
(a) Izračunaj porazdelitvi slučajnih spremenljivk X in X^2.

(b) Izračunaj povprečno vrednost slučajne spremenljivke X.

Rešitev: (a) Slučajna spremenljivka je funkcija, katere vrednost je odvisna od izida poskusa. Zanima nas predvsem, kakšne so verjetnosti, da zavzame neko vrednost. Če iz posode naključno izvlečemo eno kroglico, se lahko zgodi, da bo na njej število -2, -1, 0 ali pa 1. Porazdelitev slučajne spremenljivke X lahko predstavimo s tabelo

$$X : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

ali pa grafično s histogramom



Slučajna spremenljivka X^2 pa lahko zavzame vrednosti 0, 1 ali 4. Njena porazdelitev je

$$X^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Možne vrednosti spremenljivk X in X^2 v obeh primerih tvorijo neko zaporedje števil. Takšnim slučajnim spremenljivkam rečemo diskretne slučajne spremenljivke.

(b) Povprečna vrednost diskretne slučajne spremenljivke X je definirana s predpisom

$$E(X) = \sum_k x_k \cdot P(X = x_k),$$

kjer vsota teče po vseh možnih vrednostih slučajne spremenljivke X. V našem primeru je

$$\begin{aligned} E(X) &= -2 \cdot \frac{1}{4} - 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 + 1 \cdot \frac{1}{4}, \\ &= \frac{-2 - 1 + 0 + 1}{4}, \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

(2) Šestkrat vržemo igralno kocko. Naj bo X slučajna spremenljivka, ki pove, kolikokrat je padla šestica.

(a) Izračunaj porazdelitev slučajne spremenljivke X.

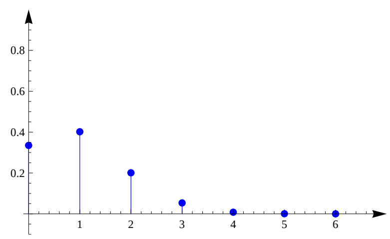
(b) Izračunaj $P(X \geq 1)$ in $P(3 \leq X \leq 5)$.

Rešitev: (a) Če vržemo kocko šestkrat, se lahko zgodi, da bo padla ena, dve, tri, štiri, pet, šest šestic, lahko pa se zgodi tudi, da ne pade nobena. Posamezne verjetnosti bomo izračunali z Bernoullijevo formulo.

V našem primeru je $n = 6$ in $p = \frac{1}{6}$. Sledi:

$$P(X=0) = \binom{6}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^6 = \frac{15625}{46656} = 0.33490,$$
$$P(X=1) = \binom{6}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{18750}{46656} = 0.40188,$$
$$P(X=2) = \binom{6}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{9375}{46656} = 0.20094,$$
$$P(X=3) = \binom{6}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{2500}{46656} = 0.05358,$$
$$P(X=4) = \binom{6}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{375}{46656} = 0.00804,$$
$$P(X=5) = \binom{6}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{30}{46656} = 0.00064,$$
$$P(X=6) = \binom{6}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{46656} = 0.00002.$$

Poglejmo si še histogram porazdelitve spremenljivke X.



Iz porazdelitve vidimo, da je najverjetneje, da bo v šestih metih padla ena šestica.

(b) Izraz $P(X \geq 1)$ nam pove, kolikšna je verjetnost, da je med šestimi meti kocke padla vsaj ena šestica. Velja:

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6), \\ &= 1 - P(X=0), \\ &= 0.67. \end{aligned}$$

Izraz $P(3 \leq X \leq 5)$ nam pove, kolikšna je verjetnost, da je šestica padla trikrat, štirikrat ali petkrat. Velja

$$P(3 \leq X \leq 5) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = 0.06.$$

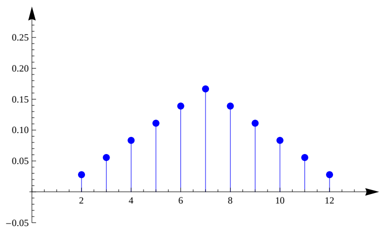
Opomba: Za spremenljivke, ki jih dobimo pri Bernoullijevih zaporedjih poskusov, rečemo, da so porazdeljene binomsko s parametroma n in p. □

(3) Hkrati vržemo dve pošteni igralni kocki in z X označimo vsoto pik na obeh kockah. Izračunaj porazdelitev, povprečno vrednost, varianco in standardni odklon X.

Rešitev: Možne vrednosti vsote pik na obeh kockah so med 2 in 12. Vsoto 2 dobimo, če pade na obeh kockah enica, vsoto 12 pa, če pade na obeh kockah šestica. Ta dva primera sta najbolj preprosta, pri ostalih pa imamo več možnosti. Vsota 3 tako lahko nastopi v dveh primerih, saj je $3 = 1 + 2 = 2 + 1$, vsota 7 pa kar v šestih $7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 4 + 3 = 5 + 2 = 6 + 1$. Če poračunamo verjetnosti za vse možne vrednosti slučajne spremenljivke X, dobimo porazdelitveno shemo

$$X : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

Histogram te porazdelitve ima simetrično obliko.



Povprečna vrednost slučajne spremenljivke X je definirana s predpisom

$$E(X) = \sum_k x_k \cdot P(X = x_k),$$

kjer vsota teče po vseh možnih vrednostih X. V našem primeru je:

$$\begin{aligned} E(X) &= 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + \ldots + 12 \cdot \frac{1}{36}, \\ &= \frac{2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 40 + 36 + 30 + 22 + 12}{36}, \\ &= 7. \end{aligned}$$

To pomeni, da v povprečju dobimo vsoto pik enako $E(X) = 7$.

Poleg povprečne vrednosti je pomemben še podatek, kako so vrednosti slučajne spremenljivke razpršene okrog povprečja. Za opis razpršenosti uporabljamo varianco

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_k (x_k - E(X))^2 \cdot P(X = x_k) = E(X^2) - E(X)^2$$

in pa standardni odklon

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

Izraz $E(X^2)$ izračunamo podobno kot povprečno vrednost, le da vrednosti spremenljivke X nadomestimo z njihovimi kvadrati. Sledi:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 2^2 \cdot \frac{1}{36} + 3^2 \cdot \frac{2}{36} + \ldots + 12^2 \cdot \frac{1}{36}, \\ &= \frac{4 + 9 \cdot 2 + 16 \cdot 3 + 25 \cdot 4 + 36 \cdot 5 + 49 \cdot 6 + 64 \cdot 5 + 81 \cdot 4 + 100 \cdot 3 + 121 \cdot 2 + 144}{36}, \\ &= \frac{329}{6}. \end{aligned}$$

Od tod dobimo:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \frac{329}{6} - 49 = \frac{35}{6},\\ \sigma(X) &= \sqrt{\mathrm{Var(X)}} = 2.42.\end{aligned}$$

□

(4) Študentka tekom dneva prejme v povprečju štiri telefonske klice na uro. S Poissonovo porazdelitvijo oceni verjetnosti:

(a) da prejme študentka med drugo in tretjo uro popoldne vsaj dva klica,
(b) da študentki med predavanjem, ki traja 45 minut, telefon nikoli ne zazvoni.

Rešitev: Pri tej nalogi se bomo ukvarjali z naslednjim problemom. Recimo, da vemo, kako pogosto se v povprečju ponavlja nek dogodek na dano časovno enoto. Zanima pa nas, kako je porazdeljena frekvenca ponovitev dogodka v dani časovni enoti.

V našem primeru predpostavljamo, da študentka prejme v povprečju štiri klice na uro, zanimajo pa nas verjetnosti, da v eni ure ne prejme nobenega klica, da prejme en klic, da prejme dva klica itd. En možen model za oceno teh verjetnosti predpostavlja, da je število klicev X porazdeljeno po Poissonovem zakonu

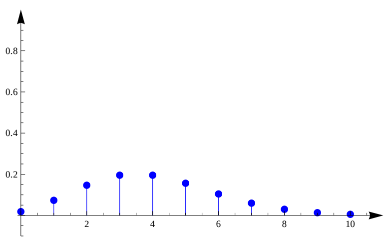
$$P(X = k) = \frac{a^k}{k!} \cdot e^{-a},$$

kjer je a povprečno število klicev v dani časovni enoti. Možne vrednosti so $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

(a) Za časovno enoto bomo vzeli eno uro, povprečno število klicev pa je $a = 4$. Vzeli bomo torej Poissonovo porazdelitev pri parametru $a = 4$, kar pomeni, da je

$$P(X = k) = \frac{4^k}{k!} \cdot e^{-4}.$$

Histogram te porazdelitve je skiciran na spodnji sliki.



Zanima nas verjetnost, da študentka prejme vsaj dva klica, oziroma

$$\begin{aligned}P(X \geq 2) &= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + \ldots,\\ &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1),\\ &= 1 - e^{-4} - 4e^{-4},\\ &= 0.91.\end{aligned}$$

(b) Sedaj je časovna enota namesto ene ure 45 minut. Če prejme študentka v eni uri v povprečju štiri klice, bo v 45 minutah v povprečju prejela tri klice, zato bomo porazdelitev aproksimirali s Poissonovim zakonom pri $a = 3$. Verjetnost, da študentka ne prejme nobenega klica, je enaka

$$P(X = 0) = e^{-3} = 0.05.$$

□

(5) Z Laplaceovo aproksimacijo približno izračunaj naslednji verjetnosti:

(a) V 100 metih kovanca pade grb med 40 in 60-krat.

(b) V 4500 metih kocke pade šestica med 750 in 800-krat.

Rešitev: Natančne verjetnosti binomske porazdelitve je pri velikem številu poskusov težko računati. Z Laplaceovo aproksimacijo pa lahko binomsko porazdelitev dobro aproksimiramo z ustrezno normalno porazdelitvijo. Pri velikih n uporabljamo aproksimacijo

$$\mathrm{Bin}(n,p) \sim N(np, \sqrt{np(1-p)}).$$

V praksi to pomeni, da za binomsko porazdeljeno slučajno spremenljivko X s parametroma n in p velja

$$P(a \leq X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

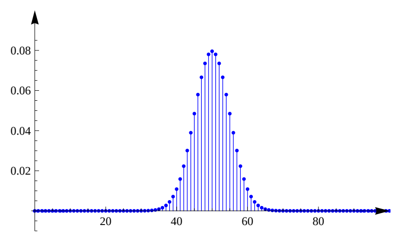
(a) Naj slučajna spremenljivka X označuje, koliko grbov pade v 100 metih kovanca. Potem je X porazdeljena binomsko s parametroma $n = 100$ in $p = 1/2$. Sledi

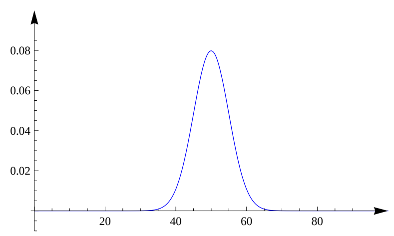
$$P(40 \leq X \leq 60) \approx \Phi\left(\frac{60-50}{\sqrt{25}}\right) - \Phi\left(\frac{40-50}{\sqrt{25}}\right) = 2\Phi(2) = 0.9544.$$

Če bi šli izračunati natančno vrednost z uporabo Bernoullijeve formule, bi dobili

$$P(40 \leq X \leq 60) = P(X = 40) + P(X = 41) + \cdots + P(X = 60) = 0.9648.$$

Poglejmo si še histogram binomske porazdelitve $\mathrm{Bin}(100, 1/2)$ in pa gostoto normalne porazdelitve $N(50, 5)$. Vidimo, da se ustrezna Gaussova funkcija zelo prilega histogramu binomske porazdelitve.





(b) Naj sedaj X označuje, koliko šestic je padlo v 4500 metih kovanca. Potem je X porazdeljena binomsko s parametroma $n = 4500$ in $p = 1/6$. Sledi

$$P(750 \leq X \leq 800) \approx \Phi\left(\frac{800-750}{\sqrt{625}}\right) - \Phi\left(\frac{750-750}{\sqrt{625}}\right) = \Phi(2) - \Phi(0) = 0.4722.$$

Natančna vrednost pa je tokrat

$$P(750 \leq X \leq 800) = 0.4838.$$

□

(6) Na izpitu je 50 vprašanj izbirnega tipa, študent pa izpit opravi, če pravilno odgovori na vsaj 25 vprašanj. Denimo, da študent pride na izpit popolnoma nepripravljen in pri vsakem vprašanju naključno izbere enega izmed treh možnih odgovorov. Z Laplaceovo aproksimacijo približno izračunaj verjetnost, da študent opravi izpit.

Rešitev: Če študent popolnoma naključno izbira odgovore nalog, je situacija podobna kot pri metu kovanca ali pa kocke. Gre za zaporedje izbir odgovorov, pri čemer študent pri vsaki nalogi z isto verjetnostjo ugane pravilen rezultat.

Naj slučajna spremenljivka X označuje, koliko pravilnih odgovorov študent ugane, če so pri vsaki nalogi možni trije odgovori. Potem je X porazdeljena binomsko s parametroma $n = 50$ in $p = 1/3$. Sledi

$$P(25 \leq X \leq 50) \approx \Phi\left(\frac{50 - \frac{50}{3}}{\sqrt{50 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}}\right) - \Phi\left(\frac{50 - \frac{50}{3}}{\sqrt{50 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}}\right) = \Phi(10) - \Phi(2.5) = 0.0062.$$

Natančna vrednost pa je

$$P(25 \leq X \leq 50) = 0.0108.$$

Vidimo, da študent nima prav veliko možnosti, da opravi izpit, če ugiba odgovore. □

(7) Igralec igra naslednjo igro s kocko. Pri vsakem metu dobi za sodo število pik toliko evrov, kolikor pik je vrgel, za liho število pik pa vedno plača 3 evre. Njegov dobitek je slučajna spremenljivka X. Izračunaj povprečno vrednost in standardni odklon X. Kolikšna je verjetnost, da bo po desetih igrah imel pozitiven izkupiček?

Rešitev: Možne vrednosti, ki jih zavzame slučajna spremenljivka X, so -3, 2, 4 in 6, njena porazdelitev pa je

$$X : \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 6 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Od tod sklepamo, da je povprečna vrednost slučajne spremenljivke X enaka

$$E(X) = -3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 0.5.$$

Izračunajmo še varianco in standardni odklon. Najprej je

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 9 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 16 \cdot \frac{1}{6} + 36 \cdot \frac{1}{6}, \\ &= \frac{83}{6}. \end{aligned}$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \frac{83}{6} - \frac{1}{4} = \frac{163}{12}, \\ \sigma(X) &= 3.69. \end{aligned}$$

Označimo z Y dobiček po n igrah. Potem imamo oceno

$$P(a \leq Y \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b - nE(X)}{\sigma(X)\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{a - nE(X)}{\sigma(X)\sqrt{n}}\right).$$

V našem primeru je $n = 10$, kar nam da

$$P(Y \geq 0) = P(0 \leq Y < \infty) \approx \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{0 - 5}{3.69\sqrt{10}}\right) = \frac{1}{2} - \Phi(-0.43) = 0.67.$$

Natančna vrednost je $P(Y \geq 0) = 0.68$. □