Verjetnost

Inštitut za biostatistiko in medicinsko informatiko
Medicinska fakulteta, Univerza v Ljubljani

Kaj je verjetnost nekega dogodka?

- relativna frekvenca opazovanega dogodka
- delež pri vseh ponovitvah poskusa
  - če lahko ponovimo poskus velikokrat

$$\textbf{relativna frekvenca} = \frac{\textbf{frekvenca dogodka}}{\textbf{število vseh poskusov}}$$

- delež ugodnih izidov (izmed vseh izidov)
  - če so vsi izidi enako verjetni

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{število ugodnih izidov}}{\text{število vseh izidov}}.$$

- kako močno verjamemo, da se bo dogodek zgodil ('degree of belief‘)

Zakaj potrebujemo verjetnost?

športniki

ostali

Povprečje populacije: μ_s

Povprečje populacije: μ_{ns}

??? $\mu_s = \mu_{ns}$???

Namen: Primerjati povprečen pulz v mirovanju pri športnikih in ostalih v populaciji

Osnove verjetnosti

- E: dogodek (event): pojav, ki se lahko zgodi

- A={Izberemo študenta, ki se aktivno ukvarja s športom}
- B={Rodi se deklica}
- C={Pri metu kocke pade enka}

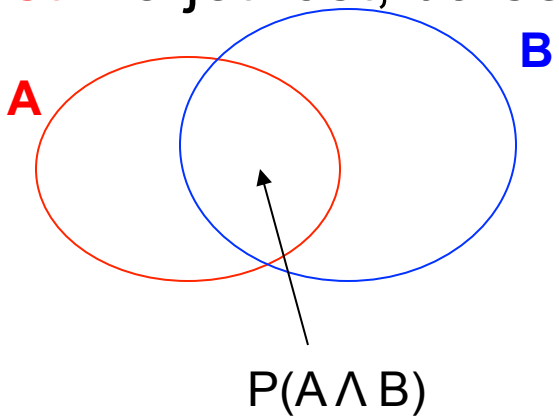
- $0 \leq P(E) \leq 1$: velja za vsak dogodek

- Če se E ne more zgoditi: $P(E)=0$ (nemogoč dogodek)
- Če se E vedno zgodi : $P(E)=1$ (gotov dogodek)

Osnove verjetnosti

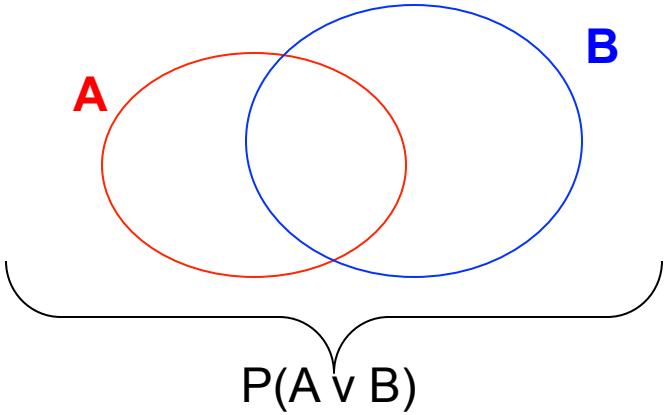
- Λ: “in”, “presek” – Produkt dogodkov
- E=A Λ B, dogodek, ki se zgodi, ko se zgodita A in B
  - P(A Λ B) = P(A) P(B), če A in B sta neodvisna
  - P(A Λ B) = 0, če A in B se ne moreta zgodita hkrati
  - P(A Λ B) = P(A) P(B|A), če A in B nista neodvisna

  - P(B|A): pogojna verjetnost: verjetnost, da se zgodi B, če se zgodi A



Osnove verjetnosti

- V: ”ali”, “unija” – Unija dogodkov
- E=A v B, dogodek, ki se zgodi, ko se zgodi A ali B
  - P(A v B) = P(A)+P(B), če A in B se medsebojno izključujeta, se ne moreta zgoditi hkrati (nezdružljivi dogodki)
  - P(A v B) = P(A)+P(B)-P(A Λ B) če se A in B medsebojno ne izključujeta



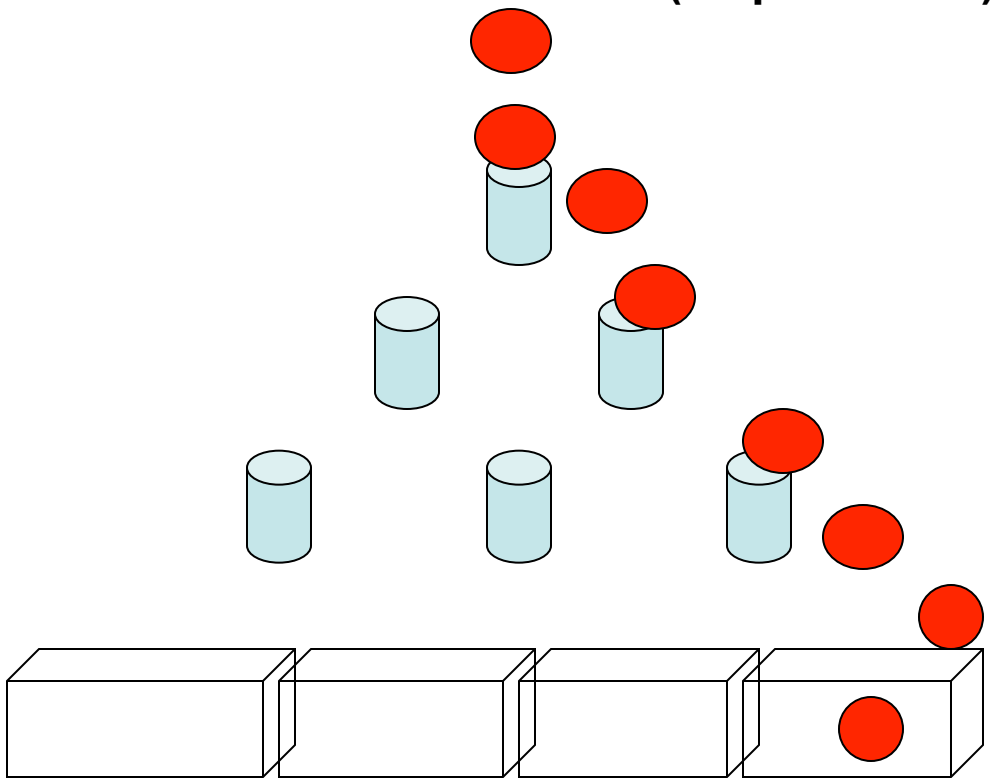
Slučajne spremenljivke (Random Variables)

- Slučajne spremenljivke so numerični izid nekega poskusa
  - Merjena količina, katere vrednosti naključno variirajo
  - Primeri:
    - Število grbov, ko mečemo kovanec 10 krat (G, g=0,1,...,10)
    - Število metov kocke, preden dobimo prvo enko
    - Prisotnost bolezni
    - Višina
    - Število srčnih utripov v eni minuti
    - Genska izraženost
    - …
- Če poznamo vse možne izide in verjetnost vsakega izida, poznamo verjetnostno porazdelitev ene slučajne spremenljivke

- STATISTIKA: predpostavljamo porazdelitev, preverjamo, ali je predpostavka dovolj verjetna

Koliko bi stavili (p), da se bo žogica ustavila v skrajno desni škatli?

... da lahko dobite 1 enoto (na primer 1 €)



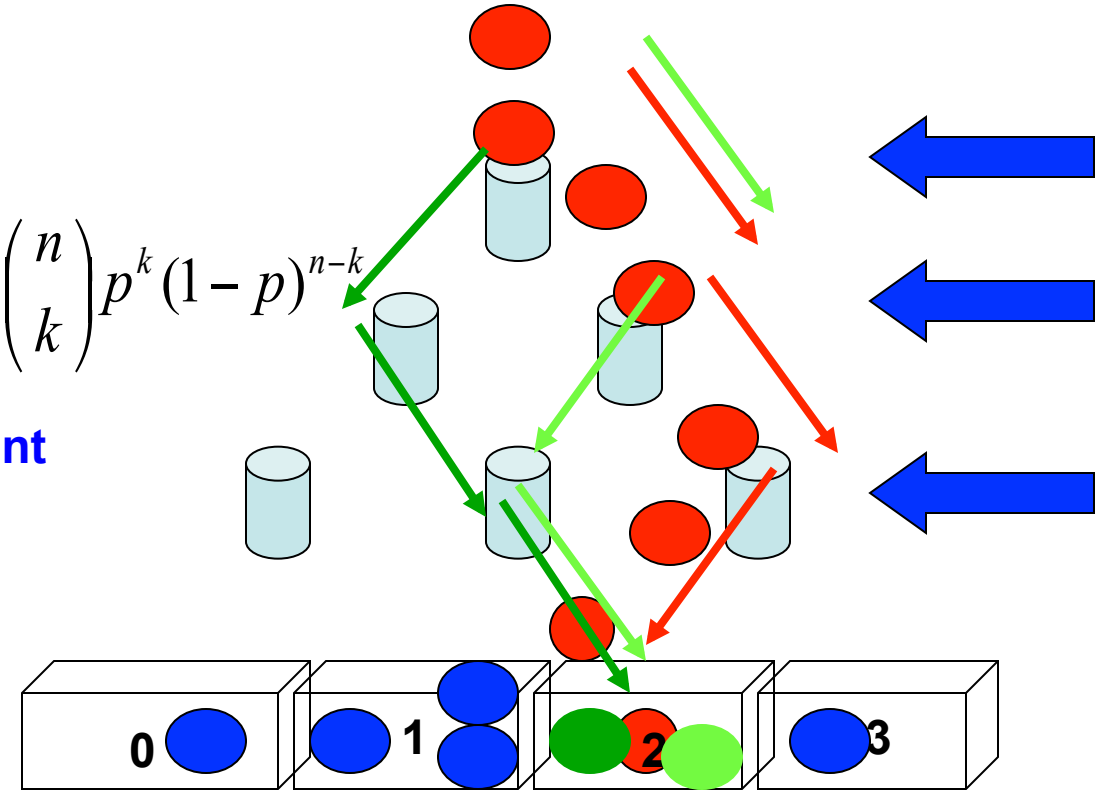
(… ampak ne izberete!) – kakšna je verjetnost? (p)

Koliko bi stavili?

$$P(K = k \mid n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Binomski koeficient

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$



Število poskusov, n

Število "R" (uspehov, k)

P=?

Verjetnost, da gre desno ("right",R)= ? 0.50 =p

neodvisna dogodka

Verjetnost rdeče poti= ? **P(R ∧ R ∧ L) = P(R) P(R) P(L) = p*p*(1-p) = $p^2 (1-p)^1$ =0.50*0.50*0.50=.125**

nezdružljivi

P(3 škatla) = P(pot1 v pot2 v pot3) = P(pot1) + P(pot2) + P(pot3) =**0.125+?+?= 3Pr(pot1)**

Binomska porazdelitev

$$P(K = k \mid n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

parametri

Binomski koeficient

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Kdaj uporabljamo to porazdelitev?

Izid (K: slučajna spremenljivka): število dogodkov pri n enotah; n enot je med seboj neodvisnih, vsaka ima isto verjetnost uspeha (p)

Povprečna vrednost (pričakovana vrednost, expected value)

E(K)=ΣP(K=k)k=np

Var(K)=np(1-p)

Primer

- Kako lahko izračunamo verjetnost, da ima ženska s tremi otroki 0, 1, 2 ali 3 punčke?
  - Kaj merimo: spol vsakega otroka
    - X_1=spol prvega otroka
    - X_2=spol drugega otroka
    - X_3=spol tretjega otroka
  - Izid: Punčka/Fantek; Da/Ne; 1/0;

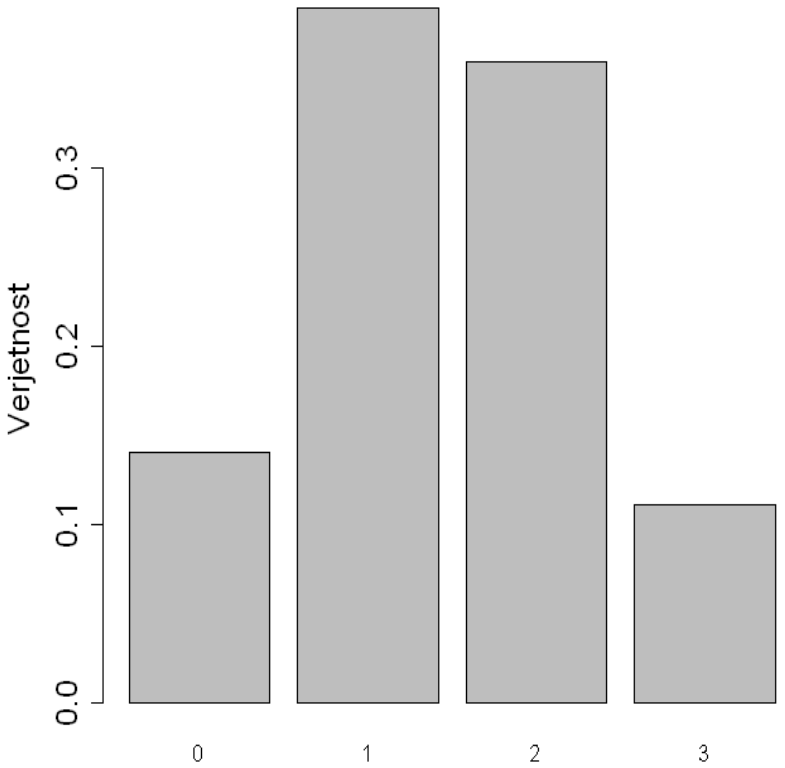
Primer (nadaljevanje)

- X=punčka
- P(X=1)=P(punčka)=p (=0.48)
- P(X=0)=P(fantek)=1-p (=0.52)
- p je enak za vsak porod in spol vsakega otroka je neodvisen od spola drugih otrok
- $K=X_1+X_2+X_3$: število punčk
- P(K=k)=?
  - Možni izidi: k=0,1,2,3

	X_1	X_2	X_3	K	P(Out)
Out1	0	0	0	0	$P(X_1=0 \wedge X_2=0 \wedge X_3=0) = P(X_1=0)P(X_2=0)P(X_3=0) = (1-p)(1-p)(1-p) = (1-p)^3$ $P(K=0)=(1-p)^3$
Out2	1	0	0	1	$p(1-p)^2$
Out3	0	1	0	1	$p(1-p)^2$ $P(K=1)=3p(1-p)^2$
Out4	0	0	1	1	$p(1-p)^2$
Out5	1	1	0	2	$p^2(1-p)$
Out6	1	0	1	2	$p^2(1-p)$ $P(K=2)=3p^2(1-p)$
Out7	0	1	1	2	$p^2(1-p)$
Out8	1	1	1	3	p^3 $P(K=3)=p^3$

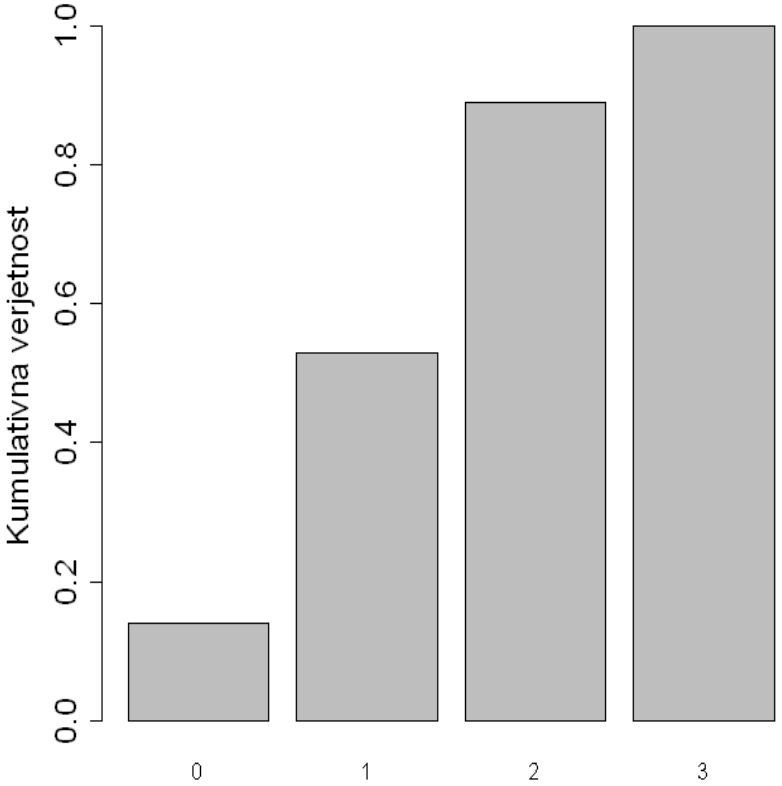
Porazdelitev slučajne spremenljivke K
"število punčk za žensko s tremi otroki"

P(K=k) = p(k)



Verjetnostna porazdelitev (stolpični diagram za verjetnosti vsakega izida)

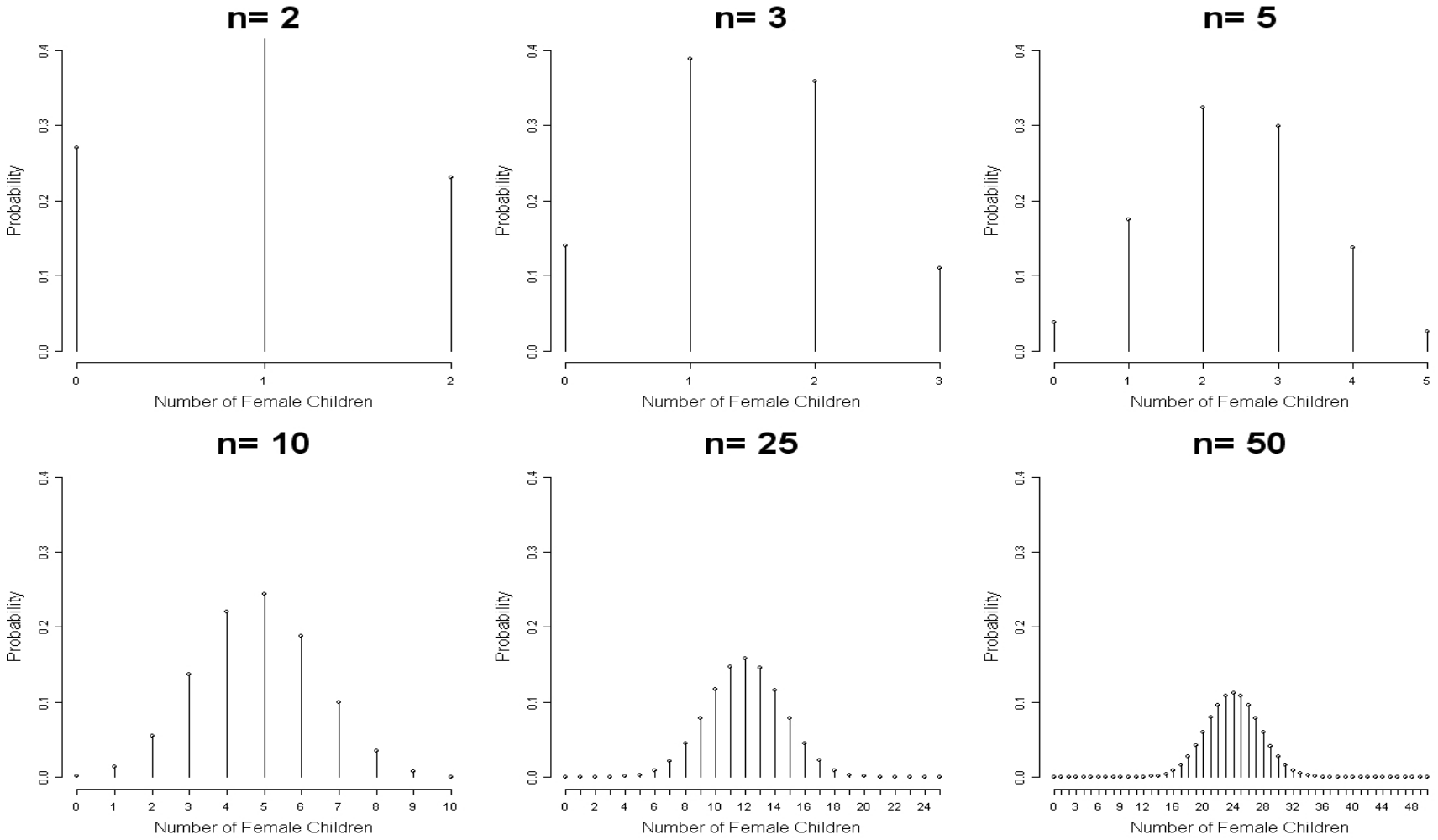
P(K<=k) = F(k)



Porazdelitvena funkcija

(stolpični diagram za kumulativne verjetnosti)

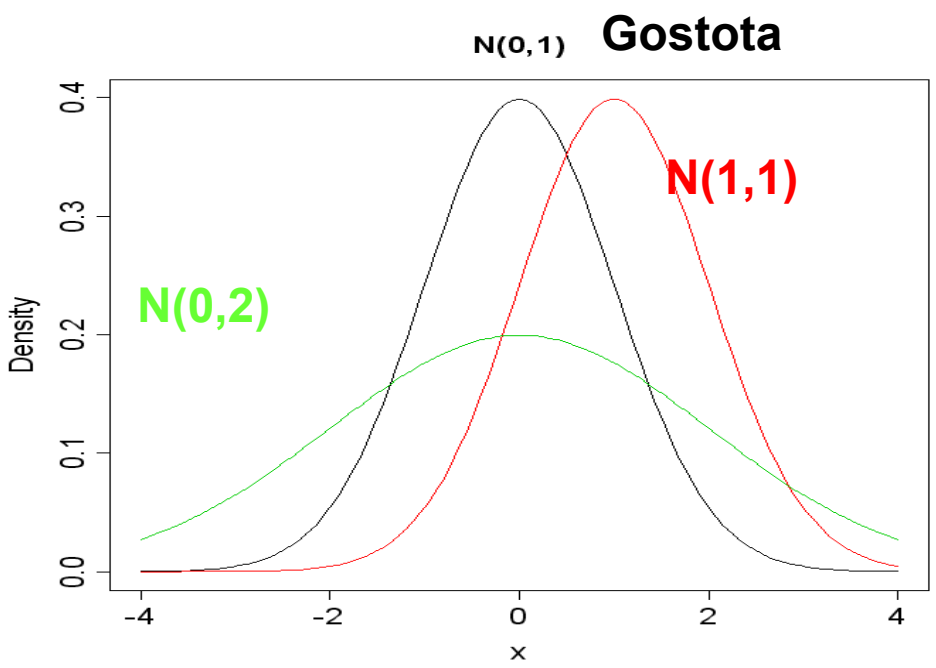
Če povečamo število seštetih spremenljivk (otroci), kaj se zgodi s porazdelitvijo?

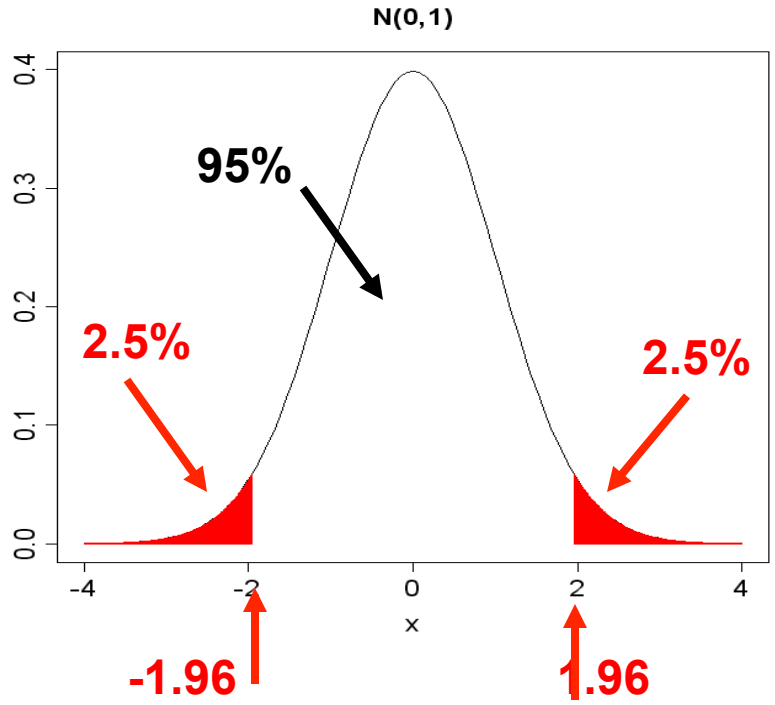


p=0.48

np in n(1-p)>5

Normalna porazdelitev – zvezna



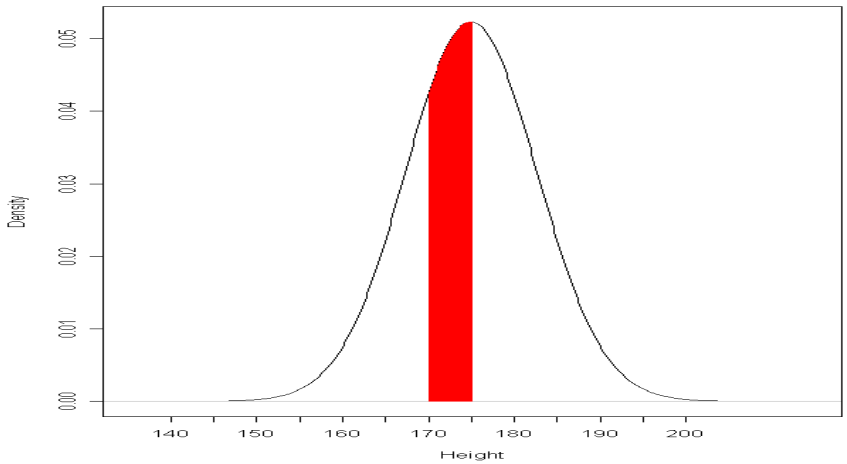


2,5 percentil

$z_{0,025}=-z_{0,975}$

97,5 percentil

$z_{0.975}=z_{1-0.05/2}$



P(170<X<175| μ, σ)=?

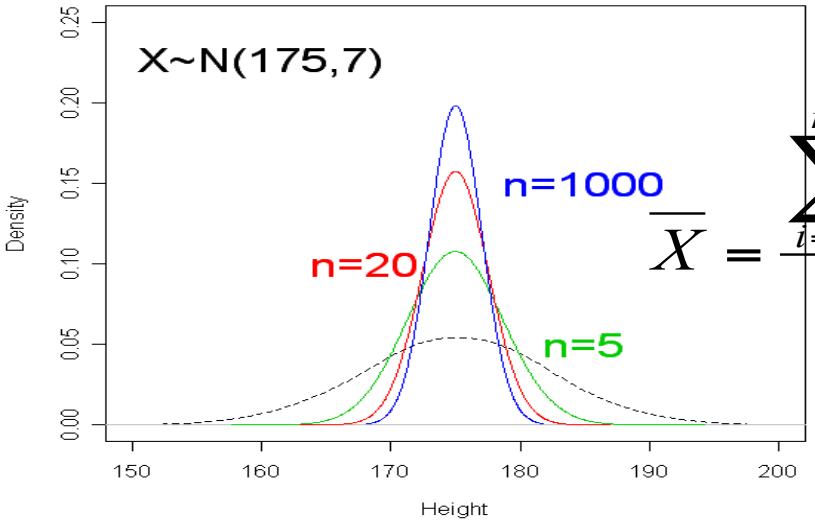
$z_{0,025}$: P(Z<= $z_{0,025}$) =0,025

- X~N(μ, σ), Z=(X- μ)/σ
- Z~N(0, 1) standardna normalna porazdelitev

Zakaj je normalna porazdelitev tako pomemebna?
Centralni limitni izrek

- Povprečje neodvisnih spremenljivk, ki imajo enako porazdelitev, se porazdeli z normalno porazdelitvijo (če imamo veliko spremenljivk – velik n)

Neodvisni X_i, $E(X_i)=\mu$, $SD(X_i)=\sigma$



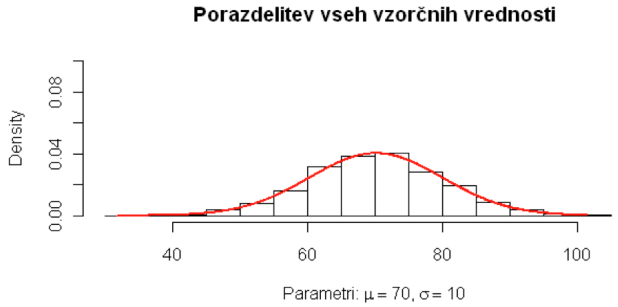
$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \sim N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$$

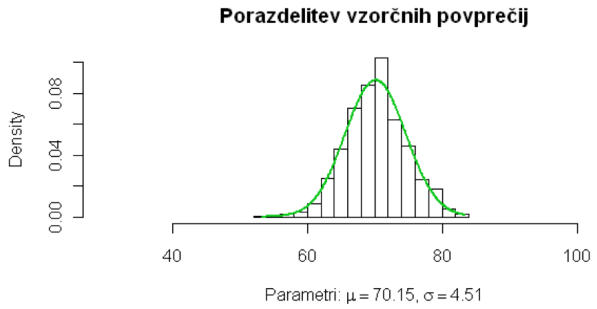
Standardna napaka (standard error of the mean, SE)

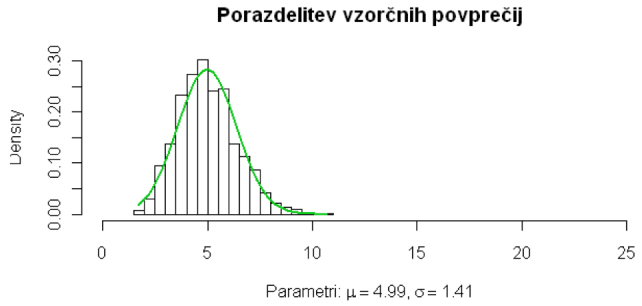
$$K = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, \sqrt{n}\,\sigma)$$

CLI - nadaljevanje

- CLI pojasnjuje, zakaj v praksi tako pogosto srečamo (skoraj) normalno porazdeljene slučajne spremenljivke - spremenljivka, na katero vpliva večje število neodvisnih slučajnih dejavnikov bo skoraj normalno porazdeljena.







Raziskovalno vprašanje

športniki

ostali

Povprečje populacije: μ_s

Povprečje populacije: μ_{ns}

??? $\mu_s = \mu_{ns}$???

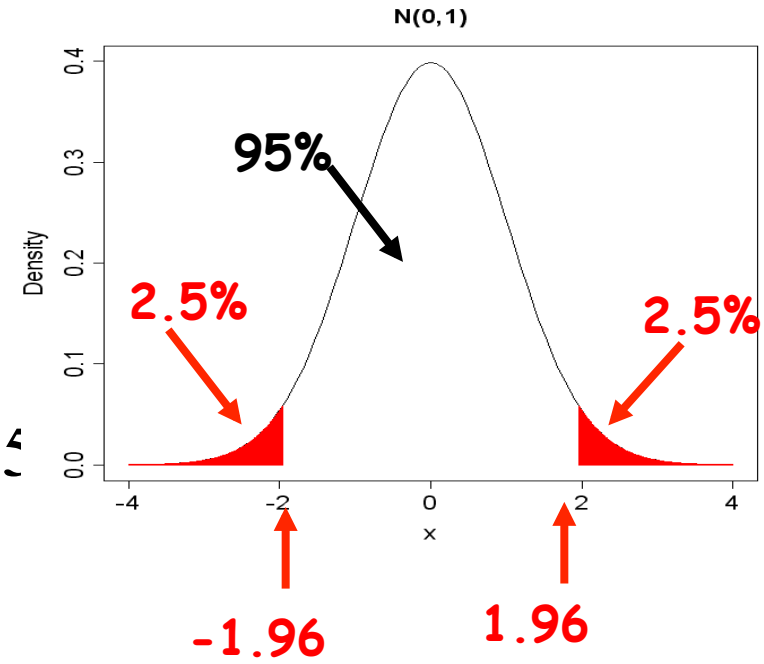
Je natančnost raziskave odvisna od velikosti vzorca?

Intervali zaupanja

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

$$P(-1{,}96 < Z < 1{,}96) = 0{,}95$$

$$P(-1{,}96 < \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < 1{,}96) = 0{,}95$$



$$P(\overline{X} - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 0{,}95$$

$$P(\overline{X} - 1{,}96SE < \mu < \overline{X} + 1{,}96SE) = 0{,}95$$

95% interval zaupanja za populacijsko povprečje

Primer: interval zaupanja za populacijsko povprečje

- 1, 2, 3, 4, 5, σ=2, spremenljivka se porazdeli normalno
- Vzorčno povprečje=3
- n=5
- SE= σ/√n =2/ √5=0,89
- 95% interval zaupanja za μ
  - Spodnji limit 3-1,96*0,89=1,25
  - Zgornji limit 3+1,96*0,89=4,75
- Od 1,25 do 4,75

Populacija vs. vzorec

Populacija	**Vzorec**
N = velikost populacije	n = velikost vzorca
$\mu = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N}$ *populacijsko povprečje*	$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ *vzorčno povprečje*
$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2$ *populacijska varianca*	$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ *vzorčna varianca*
$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ *populacijski standardni odklon*	$s = \sqrt{s^2}$ *vzorčni standardni odklon*