1. kolokvij iz Matematike
24.4.2014

1. (25 točk) Dano je zaporedje s splošnim členom

$$a_n = \frac{2n+1}{3n-2}.$$

Pokažite, ali je zaporedje naraščajoče ali padajoče, izračunajte limito zaporedja in izračunajte, kateri členi ležijo v ε okolici limite, če je $\varepsilon = 0.01$.

Rešitev:

Naraščanje/padanje: [10 točk]

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2n+3}{3n+1} - \frac{2n+1}{3n-2} \\ &= \frac{(2n+3)(3n-2) - (2n+1)(3n+1)}{(3n+1)(3n-2)} \\ &= \frac{-7}{(3n+1)(3n-2)} \leq 0 \text{ za } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Sledi, da je zaporedje padajoče. [1 točka]

Izračun limite: [2 točki]

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-2} = \frac{2}{3}.$$

Okolica: [10 točk]

$$\begin{aligned} |a_n - a| &< \varepsilon \\ \left|\frac{2n+1}{3n-2} - \frac{2}{3}\right| &< \frac{1}{100} \\ \left|\frac{6n+3-6n+4}{3(3n-2)}\right| &< \frac{1}{100} \\ \frac{7}{3(3n-2)} &< \frac{1}{100} \\ 700 &< 9n-6 \\ 706 &< 9n \\ 78,4 &< n \end{aligned}$$

Odgovor: [2 točki]

V ε okolici ležijo vsi členi od vključno 79. naprej.

2. (25 točk) Zapišite enačbi tangente in normale na graf funkcije

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - 9}$$

v točki z absciso $x = 4$.

Rešitev:

Izračun, zapis točke $T(4, 2)$. [1 točka]

Odvod: [10 točk]

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-1)(x^2-9) - (x^2-x+2)\cdot 2x}{(x^2-9)^2} \\ &= \frac{x^2 - 22x + 9}{(x-3)^2(x+3)^2} \end{aligned}$$

Tangenta: [5 točk]

$$k_T = f'(4) = -\frac{9}{7},$$

nastavek in izračun

$$\begin{aligned} y &= kx + n \\ 2 &= -\frac{9}{7}\cdot 4 + n \\ n &= \frac{50}{7} \end{aligned}$$

Enačba tangente je enaka $y = -\frac{9}{7}x + \frac{50}{7}$. [2 točki]

Normala: [5 točk]

$$k_N = -\frac{1}{k_T} = \frac{7}{9},$$

nastavek in izračun

$$\begin{aligned} y &= kx + n \\ 2 &= \frac{7}{9}\cdot 4 + n \\ n &= -\frac{10}{9} \end{aligned}$$

Enačba normale je enaka $y = \frac{7}{9}x - \frac{10}{9}$. [2 točki]

3. (25 točk) Izračunajte limite naslednjih funkcij:

(a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2},$$

(b)
$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2-2x}-x),$$

(c)
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\ln x}{x-3},$$

(d)
$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+7x+10}{x^2+5x+6},$$

(e)
$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{2}{x}}.$$

Rešitev: [vsaka limita 5 točk]

(a)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2-2x}-x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2-2x}-x)(\sqrt{x^2-2x}+x)}{\sqrt{x^2-2x}+x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x-x^2}{\sqrt{x^2-2x}+x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1} = -1\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x\ln x}{x-3} &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{x-3}{x}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1-\frac{3}{x}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{3}{x^2}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x} = 0\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}\frac{x^2+7x+10}{x^2+5x+6} &= \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x+5)}{(x+2)(x+3)}\\ &= \lim_{x\to -2}\frac{x+5}{x+3} = 3\end{aligned}$$

(e)

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}(1+x-1)\cdot\frac{2}{x}} = e^2$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x) = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{2}{x} = \infty$$

4. (25 točk) Čimbolj natančno narišite graf funkcije

$$f(x) = -3x^2 + 2x^2\ln x.$$

Določite definicijsko območje, ničle, pole, limite na robu definicijskega območja, intervale naraščanja in padanja, lokalne ekstreme in intervale konveksnosti in konkavnosti.

Rešitev: definicijsko območje $D_f = (0,\infty)$, ničli $x = 0$ in $x = e^{3/2}$, od katerih $x = 0$ ni znotraj definicijskega območja, polov nima. [3 točke], [limiti 3 točke]

$$\lim_{x\to 0}(-3x^2+2x^2\ln x) = \lim_{x\to 0}\frac{-3+2\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0}\frac{-2x^3}{2x} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty}(-3x^2+2x^2\ln x) = \lim_{x\to\infty}(x^2(-3+2\ln x)) = \infty$$

Odvod [4 točke]

$$f'(x) = -6x + 4x\ln x + 2x^2\cdot\frac{1}{x} = 4x\ln x - 4x = 4x(\ln x - 1)$$

ničli $x = 0$ in $x = e$, od katerih $x = 0$ ni v definicijskem območju

Funkcija pada na $(0, e)$ in narašča na (e, ∞). V točki $(e, -e^2)$ ima lokalni minimum. [3 točke]

Drugi odvod: [4 točke]

$$f''(x) = 4(\ln x - 1) + 4x \cdot \frac{1}{x} = 4 \ln x$$

Ničlo ima pri $x = 1$. Funkcija je konveksna na $(1, \infty)$ in konkavna na $(0, 1)$. [3 točke]

Graf funkcije: [5 točk]