

Matematika

Diferencialne enačbe drugega reda

(1) Reši homogene diferencialne enačbe drugega reda s konstantnimi koeficienti:

- (a) $y'' - 6y' + 8y = 0$,
- (b) $y'' - 2y' + y = 0$,
- (c) $y'' + y = 0$,
- (d) $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Rešitev: Homogene diferencialne enačbe drugega reda s konstantnimi koeficienti so enačbe oblike

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Z nastavkom $y = e^{\lambda x}$ pridemo do karakteristične enačbe

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Rešitvi $\lambda_{1,2}$ karakteristične enačbe imenujemo karakteristični števili. Splošna rešitev enačbe je odvisna od karakterističnih števil. Zapišemo jo lahko v obliki

- $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, če sta $\lambda_1 \neq \lambda_2$ realni števili.
- $y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}$, če je $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$.
- $y(x) = C_1 e^{\lambda x} \cos \omega x + C_2 e^{\lambda x} \sin \omega x$, če je $\lambda_1 = \lambda + i\omega$ in $\lambda_2 = \lambda - i\omega$.

(a) $y'' - 6y' + 8y = 0$:

Karakteristična enačba $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ ima rešitvi $\lambda_1 = 2$ in $\lambda_2 = 4$. Torej je splošna rešitev diferencialne enačbe

$$y(x) = \underline{\underline{C_1 e^{2x}}} + \underline{\underline{C_2 e^{4x}}}.$$

(b) $y'' - 2y' + y = 0$:

Karakteristična enačba $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ ima rešitev $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Splošna rešitev je

$$y(x) = \underline{\underline{(C_1 + C_2 x)e^x}}.$$

(c) $y'' + y = 0$:

Karakteristična enačba $\lambda^2 + 1 = 0$ ima imaginarni rešitvi $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Splošna rešitev se zato glasi

$$y(x) = \underline{\underline{C_1 \cos x + C_2 \sin x}}.$$

(d) $y'' + 2y' + 2y = 0$:

Karakteristična enačba $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ ima kompleksni rešitvi $\lambda_1 = -1 + i$ in $\lambda_2 = -1 - i$. Splošna rešitev pa je

$$y(x) = \underline{C_1 e^{-x} \cos x} + \underline{C_2 e^{-x} \sin x}.$$

□

(2) Z metodo nedoločenih koeficientov reši nehomogene diferencialne enačbe:

- (a) $y'' - 4y' + 3y = 3x - 4$,
- (b) $y'' - 7y' + 10y = 4e^x$,
- (c) $y'' + 4y' - 5y = 26 \sin x$.

Rešitev: Nehomogeno diferencialno enačbo drugega reda s konstantnimi koeficienti lahko zapišemo v obliki

$$y'' + ay' + by = r(x).$$

Splošna rešitev enačbe je oblike

$$y = y_h + y_p,$$

kjer je y_h rešitev homogene enačbe, partikularno rešitev y_p pa lahko poskusimo najti z metodo nedoločenih koeficientov, če je nehomogeni člen naslednje oblike:

Nehomogeni člen	Nastavek
$p(x)$	$P(x)$
$C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$	$A \cos \omega x + B \sin \omega x$
$C e^{\lambda x}$	$A e^{\lambda x}$

Pri tem je P polinom iste stopnje kot polinom p , katerega koeficiente moramo še določiti. Če je nehomogeni člen vsota večih členov, izračunamo partikularno rešitev za vsak člen posebej in nato te rešitve seštejemo.

(a) $y'' - 4y' + 3y = 3x - 4$:

Homogeni del:

Karakteristična enačba $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ ima rešitvi $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = 3$. Dobimo

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

Nehomogeni del:

Nehomogeni del je linearne funkcije, zato vzemimo za nastavek poljubno linearne funkcijo $y_p(x) = Ax + B$. Od tod sledi

$$\begin{aligned} y'_p(x) &= A, \\ y''_p(x) &= 0. \end{aligned}$$

Če to vstavimo v diferencialno enačbo, dobimo

$$-4A + 3(Ax + B) = 3x - 4,$$

kar prepišemo v sistem enačb

$$\begin{aligned} 3A &= 3, \\ 3B - 4A &= -4. \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je $A = 1$ in $B = 0$. Sledi $y_p(x) = x$ in

$$y(x) = \underline{\underline{C_1 e^x}} + \underline{\underline{C_2 e^{3x}}} + x.$$

(b) $\textcolor{blue}{y'' - 7y' + 10y = 4e^x}$:

Homogeni del:

Karakteristična enačba $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$ ima rešitvi $\lambda_1 = 2$ in $\lambda_2 = 5$, kar nam da

$$y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}.$$

Nehomogeni del:

Nehomogeni del je eksponentna funkcija. Če vzamemo nastavek $y_p(x) = Ae^x$, dobimo $y'_p(x) = Ae^x$ in $y''_p(x) = Ae^x$. Ko to vstavimo v diferencialno enačbo, dobimo

$$Ae^x - 7Ae^x + 10Ae^x = 4e^x,$$

od koder dobimo enačbo $4A = 4$, ki ima rešitev $A = 1$. Sledi $y_p(x) = e^x$ in

$$y(x) = \underline{\underline{C_1 e^{2x}}} + \underline{\underline{C_2 e^{5x}}} + e^x.$$

(c) $\textcolor{blue}{y'' + 4y' - 5y = 26 \sin x}$:

Homogeni del:

Karakteristična enačba $\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$ ima rešitvi $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = -5$, zato je

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-5x}.$$

Nehomogeni del:

Na desni strani imamo sinusno funkcijo, zato bomo vzeli nastavek $y_p(x) = A \sin x + B \cos x$.

$$\begin{aligned} y'_p(x) &= A \cos x - B \sin x, \\ y''_p(x) &= -A \sin x - B \cos x. \end{aligned}$$

Ko to vstavimo v diferencialno enačbo, dobimo enačbo

$$\begin{aligned} -A \sin x - B \cos x + 4A \cos x - 4B \sin x - 5A \sin x - 5B \cos x &= 26 \sin x, \\ (-6A - 4B) \sin x + (4A - 6B) \cos x &= 26 \sin x. \end{aligned}$$

S primerjavo koeficientov pri funkcijah sin in cos pridemo do sistema enačb

$$\begin{aligned} -6A - 4B &= 26, \\ 4A - 6B &= 0, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = -3$, $B = -2$. Torej je $y_p(x) = -3 \sin x - 2 \cos x$, splošna rešitev pa je

$$y(x) = \underline{\underline{C_1 e^x + C_2 e^{-5x} - 3 \sin x - 2 \cos x}}.$$

□

(3) Reši diferencialne enačbe pri danih začetnih pogojih:

- (a) $y'' - y = 2 \cos x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$,
- (b) $y'' - 4y' + 4y = 12x - 12$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$.

Rešitev:

- (a) $\color{blue}{y'' - y = 2 \cos x}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$:

Homogeni del:

Karakteristična enačba $\lambda^2 - 1 = 0$ ima rešitvi $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = -1$. Sledi

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Nehomogeni del:

Nehomogeni člen je kosinusna funkcija, zato je primeren nastavek $y_p(x) = A \cos x + B \sin x$. Odvoda partikularne rešitve sta enaka

$$\begin{aligned} y'_p(x) &= -A \sin x + B \cos x, \\ y''_p(x) &= -A \cos x - B \sin x. \end{aligned}$$

Sedaj dobimo enačbo

$$-A \cos x - B \sin x - (A \cos x + B \sin x) = 2 \cos x,$$

od koder sledi

$$\begin{aligned} -2A &= 2, \\ -2B &= 0. \end{aligned}$$

Partikularna rešitev je tako enaka $y_p(x) = -\cos x$, splošna rešitev enačbe pa je

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \cos x.$$

Konstanti C_1 in C_2 bomo določili z upoštevanjem začetnih pogojev. Iz enakosti

$$y'(x) = C_1 e^x - C_2 e^{-x} + \sin x$$

sledi

$$\begin{aligned} -1 &= y(0) = C_1 + C_2 - 1, \\ 0 &= y'(0) = C_1 - C_2. \end{aligned}$$

Sledi $C_1 = C_2 = 0$, kar pomeni, da je rešitev enačbe pri danih začetnih pogojih funkcija

$$y(x) = \underline{\underline{\cos x}}.$$

(b) $y'' - 4y' + 4y = 12x - 12$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$:

Homogeni del:

Karakteristična enačba $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ ima dvojno ničlo $\lambda_{1,2} = 2$, kar pomeni, da je splošna rešitev homogene enačbe oblike

$$y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

Nehomogeni del:

Nehomogeni člen je linearna funkcija, zato bomo vzeli nastavek $y_p(x) = Ax + B$. Odvoda partikularne rešitve sta $y'_p(x) = A$ in $y''_p(x) = 0$, kar nam da

$$-4A + 4(Ax + B) = 12x - 12.$$

Dobimo sistem

$$\begin{aligned} 4A &= 12, \\ -4A + 4B &= -12, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = 3$ in $B = 0$. Partikularna rešitev je $y_p(x) = 3x$, splošna rešitev enačbe pa je

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + 3x.$$

Z odvajanjem

$$y'(x) = 2C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x} + 2C_2 x e^{2x} + 3$$

in upoštevanjem začetnih pogojev dobimo

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = C_1, \\ 5 &= y'(0) = 2C_1 + C_2 + 3. \end{aligned}$$

Sledi $C_1 = 1$ in $C_2 = 0$, zato je rešitev enačbe funkcija

$$y(x) = \underline{\underline{e^{2x} + 3x}}.$$

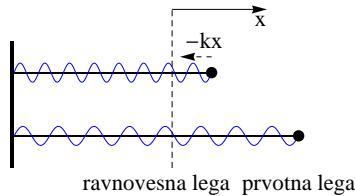
□

- (4) Na vzmet s koeficientom $k = 100 \frac{N}{m}$ je pripeta utež z maso $m = 1kg$. Vzmet najprej raztegnemo za $0.1m$ in jo nato pustimo, da niha.
- Zapiši Newtonovo diferencialno enačbo in jo reši.
 - Izračunaj amplitudo nihanja in nihajni čas.

Rešitev: (a) Naš sistem je sestavljen iz uteži in vzmeli. Če utež izmaknemo iz ravnovesne lege, jo vzmet vleče nazaj v ravnovesje. Privzeli bomo, da se lahko sistem giblje v smeri vzmeli in uporabili oznake

- $x = x(t)$... odmak uteži iz ravnovesne lege,
- $\ddot{x} = \ddot{x}(t)$... pospešek uteži.

Na utež deluje sila vzmeli $F_{vz} = -kx$, ki jo dobimo iz Hookovega zakona.



Newtonov zakon lahko sedaj zapišemo v obliki

$$ma = F_{vz}.$$

Če upoštevamo, da je pospešek enak $a = \ddot{x}$, dobimo enačbo

$$m\ddot{x} = -kx$$

ozziroma

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

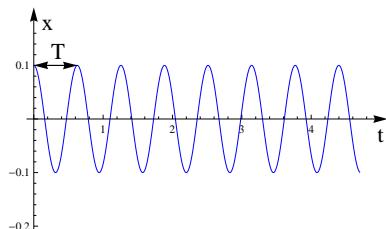
kjer smo označili $\omega^2 = \frac{k}{m}$. To je homogena diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti, ki ima splošno rešitev

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Njen odvod je enak $\dot{x}(t) = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t$. Naši začetni pogoji so $x(0) = 0.1$ in $\dot{x}(0) = 0$. Če jih upoštevamo, dobimo, da je $C_1 = 0.1$ in $C_2 = 0$. Torej je rešitev

$$x(t) = 0.1 \cos \omega t.$$

Vidimo, da vzmet harmonično niha.



(b) Amplituda nihanja je enaka

$$A = 0.1 \text{ m.}$$

Parametru $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ rečemo krožna frekvenca. V našem primeru je

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{1}} \text{ Hz} = 10 \text{ Hz.}$$

Nihajni čas je enak

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 0.63 \text{ s.}$$

□