Matematika

Diferencialne enačbe prvega reda

---

(1) Reši diferencialne enačbe z ločljivimi spremenljivkami:

(a) $y' = 2xy$,
(b) $y' \operatorname{tg} x = y$,
(c) $y' = 2x(1 + y^2)$.

Rešitev: Diferencialna enačba ima *ločljive spremenljivke*, če jo lahko zapišemo v obliki

$$y' = f(x)g(y)$$

za neki zvezni funkciji f in g. Diferencialne enačbe z ločljivimi spremenljivkami rešujemo po naslednjem postopku:

(1) Zapišemo $y' = \frac{dy}{dx}$,
(2) enačbo preoblikujemo tako, da ločimo spremenljivki x in y vsako na svojo stran,
(3) integriramo vsako stran enačbe posebej,
(4) izrazimo $y = y(x)$.

(a) $y' = 2xy$:

Ta enačba ima ločljive spremenljivke. Izberemo lahko $f(x) = 2x$ in $g(y) = y$. Računajmo:

$$\begin{aligned} y' &= 2xy, \\ \frac{dy}{dx} &= 2xy, \\ \frac{dy}{y} &= 2x\,dx, \\ \ln y &= x^2 + c, \\ y &= e^{x^2+c}, \\ y &= e^c e^{x^2}. \end{aligned}$$

Vidimo, da je rešitev odvisna še od konstante c. Če je c konstanta, je tudi e^c konstanta, ki jo označimo z C. Od tod dobimo splošno rešitev enačbe

$$y(x) = \underline{\underline{Ce^{x^2}}}.$$

Za vsako izbiro konstante C dobimo natanko določeno rešitev enačbe. Pri računanju smo potiho predpostavili, da je $y \neq 0$. Hitro pa se lahko prepričamo, da je rešitev enačbe tudi funkcija $y(x) = 0$.

(b) $y' \operatorname{tg} x = y$:

Tudi ta enačba ima ločljive spremenljivke. Računajmo:

$$\begin{aligned} y' \operatorname{tg} x &= y, \\ \frac{dy}{y} &= \operatorname{ctg}\, dx, \\ \ln y &= \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \ln(\sin x) + c, \\ y &= e^{\ln(\sin x) + c}, \\ y &= e^c \sin x. \end{aligned}$$

Če spet pišemo $C = e^c$, dobimo splošno rešitev enačbe

$$y(x) = \underline{\underline{C \sin x}}.$$

(c) $y' = 2x(1 + y^2)$:

Sedaj imamo

$$\begin{aligned} y' &= 2x(1 + y^2), \\ \frac{dy}{1 + y^2} &= 2x\, dx, \\ \operatorname{arc\,tg} y &= x^2 + C. \end{aligned}$$

Od tod dobimo

$$y(x) = \underline{\underline{\operatorname{tg}(x^2 + C)}}.$$

□

(2) Reši diferencialne enačbe pri danih začetnih pogojih:

(a) $y' = 2xy^2$, $y(0) = 1$,

(b) $xyy' = 1 - x^2$, $y(1) = 3$,

(c) $2yy' = e^x$, $y(0) = 2$.

Rešitev: Splošna rešitev diferencialne enačbe prvega reda sestoji iz družine funkcij, ki so parametrizirane z neko konstanto. Točno določeno rešitev pa dobimo z upoštevanjem začetnega pogoja.

(a) $y' = 2xy^2$, $y(0) = 1$:

Najprej poiščimo splošno rešitev dane diferencialne enačbe:

$$\begin{aligned} y' &= 2xy^2, \\ \frac{dy}{y^2} &= 2x\, dx, \\ -\frac{1}{y} &= x^2 + C. \end{aligned}$$

Splošna rešitev enačbe je tako enaka

$$y(x) = -\frac{1}{x^2 + C}.$$

Z upoštevanjem začetnega pogoja dobimo

$$1 = y(0) = -\frac{1}{C},$$

kar pomeni, da je $C = -1$. Od tod sledi, da je rešitev enačbe funkcija

$$y(x) = \underline{\underline{\frac{1}{1 - x^2}}}.$$

(b) $xyy' = 1 - x^2,\ y(1) = 3$:

Računajmo:

$$\begin{aligned} xyy' &= 1 - x^2, \\ y\,dy &= \left(\frac{1}{x} - x\right) dx, \\ \frac{y^2}{2} &= \ln x - \frac{x^2}{2} + C. \end{aligned}$$

Od tod dobimo splošno rešitev enačbe

$$y(x) = \pm\sqrt{2\ln x - x^2 + 2C}.$$

Začetni pogoj nam pove, da je

$$3 = y(1) = \sqrt{-1 + 2C},$$

kar pomeni, da je $C = 5$. Rešitev enačbe je torej funkcija

$$y(x) = \underline{\underline{\sqrt{2\ln x - x^2 + 10}}}.$$

(c) $2yy' = e^x,\ y(0) = 2$:

Sedaj je:

$$\begin{aligned} 2yy' &= e^x, \\ 2y\,dy &= e^x\,dx, \\ y^2 &= e^x + C. \end{aligned}$$

Splošna rešitev enačbe je tako enaka

$$y(x) = \pm\sqrt{e^x + C}.$$

Iz začetnega pogoja dobimo

$$2 = y(0) = \sqrt{1 + C},$$

kar pomeni, da je $C = 3$. Rešitev enačbe je torej funkcija

$$y(x) = \underline{\underline{\sqrt{e^x + 3}}}.$$

□

(3) Reši homogene linearne diferencialne enačbe:

(a) $y' - 2y = 0,\ y(0) = 3$,
(b) $y' + xy = 0,\ y(0) = 1$,
(c) $y' = \dfrac{y}{x},\ y(1) = 2$.

Rešitev: Linearna diferencialna enačba prvega reda je diferencialna enačba oblike

$$y' + p(x)y = q(x)$$

za neki zvezni funkciji p in q. Če je $q = 0$, je enačba *homogena*, sicer pa je *nehomogena*.

(a) $y' - 2y = 0,\ y(0) = 3$:

Najprej poiščimo splošno rešitev dane diferencialne enačbe:

$$\begin{aligned} y' &= 2y, \\ \frac{dy}{y} &= 2\,dx, \\ \ln y &= 2x + c, \\ y &= e^{2x+c}, \\ y &= Ce^{2x}. \end{aligned}$$

Z upoštevanjem začetnega pogoja dobimo

$$3 = y(0) = Ce^{2\cdot 0} = C,$$

od koder sledi $C = 3$. Rešitev enačbe je torej funkcija

$$y(x) = \underline{\underline{3e^{2x}}}.$$

(b) $y' + xy = 0,\ y(0) = 1$:

Splošna rešitev diferencialne enačbe je:

$$\begin{aligned} y' + xy &= 0, \\ \frac{dy}{y} &= -x\,dx, \\ \ln y &= -\frac{x^2}{2} + c, \\ y &= e^{-\frac{x^2}{2}+c}, \\ y &= Ce^{-\frac{x^2}{2}}. \end{aligned}$$

Z upoštevanjem začetnega pogoja dobimo

$$1 = y(0) = Ce^0 = C,$$

od koder sledi $C = 1$. Rešitev enačbe je funkcija

$$y(x) = \underline{\underline{e^{-\frac{x^2}{2}}}}.$$

(c) $y' = \frac{y}{x}$, $y(1) = 2$:

Splošna rešitev diferencialne enačbe je tokrat:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y}{x}, \\ \frac{dy}{y} &= \frac{dx}{x}, \\ \ln y &= \ln x + c, \\ y &= Cx. \end{aligned}$$

Začetni pogoj nam da

$$2 = y(1) = C \cdot 1 = C,$$

od koder sledi $C = 2$ in

$$y(x) = \underline{\underline{2x}}.$$

□

(4) Reši nehomogene linearne diferencialne enačbe:

(a) $y' - 3y = 3$,
(b) $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$,
(c) $y' - y = e^{2x}$, $y(0) = 2$,
(d) $(x + 1)y' - 2y = (x + 1)^4$, $y(1) = 8$.

Rešitev: Nehomogene linearne diferencialne enačbe prvega reda rešujemo v dveh korakih:

(1) Poiščemo rešitev prirejene homogene enačbe $y_h(x) = Cy_0(x)$,
(2) splošno rešitev poiščemo z nastavkom $y(x) = C(x)y_0(x)$.

(a) $y' - 3y = 3$:

Homogeni del:
Prirejena homogena enačba linearne diferencialne enačbe je zmeraj enačba z ločljivimi spremenljivkami. V našem primeru je to enačba:

$$\begin{aligned} y' - 3y &= 0, \\ \frac{dy}{y} &= 3\,dx, \\ \ln y &= 3x + c, \\ y &= e^{3x+c}, \\ y &= Ce^{3x}. \end{aligned}$$

Pri linearni diferencialni enačbi je rešitev homogene enačbe zmeraj oblike

$$y_h(x) = Cy_0(x),$$

zato ponavadi imena konstant izberemo tako, da imamo na koncu konstanto C. V našem primeru je torej $y_0(x) = e^{3x}$.

Nehomogeni del:

Splošno rešitev linearne diferencialne enačbe lahko poiščemo z metodo variacije konstante. Naj bo $y_h(x) = Cy_0(x)$ rešitev homogene enačbe in vzemimo nastavek

$$y(x) = C(x)e^{3x},$$

ki ga vstavimo v enačbo, od koder z integriranjem dobimo $C(x)$. V našem primeru je $y'(x) = C'(x)e^{3x} + 3C(x)e^{3x}$. Če to vstavimo v enačbo, dobimo

$$\begin{aligned} C'(x)e^{3x} + 3C(x)e^{3x} - 3C(x)e^{3x} &= 3, \\ C'(x) &= \frac{3}{e^{3x}} = 3e^{-3x}, \\ C(x) &= \int 3e^{-3x}\, dx = -e^{-3x} + C. \end{aligned}$$

Od tod dobimo rezultat

$$y(x) = C(x)e^{x} = \left(-e^{-3x} + C\right) e^{3x} = \underline{\underline{-1 + Ce^{3x}}}.$$

(b) $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$:

Homogeni del:

Najprej poiščimo splošno rešitev homogene enačbe:

$$\begin{aligned} y' + y\cos x &= 0, \\ \frac{dy}{y} &= -\cos x\, dx, \\ \ln y &= -\sin x + c, \\ y &= Ce^{-\sin x}. \end{aligned}$$

Nehomogeni del:

Vzemimo nastavek $y(x) = C(x)e^{-\sin x}$. Sledi $y'(x) = C'(x)e^{-\sin x} - \cos x\, C(x)e^{-\sin x}$ in

$$\begin{aligned} C'(x)e^{-\sin x} - \cos x\, C(x)e^{-\sin x} + C(x)e^{-\sin x}\cos x &= e^{-\sin x}, \\ C'(x) &= \frac{e^{-\sin x}}{e^{-\sin x}} = 1, \\ C(x) &= \int 1\, dx = x + C. \end{aligned}$$

Od tod dobimo

$$y(x) = C(x)e^{-\sin x} = (x + C)\, e^{-\sin x} = \underline{\underline{xe^{-\sin x} + Ce^{-\sin x}}}.$$

(c) $y' - y = e^{2x}$, $y(0) = 2$:

Homogeni del:
Splošna rešitev homogene enačbe je:

$$\begin{aligned} y' - y &= 0, \\ \frac{dy}{y} &= dx, \\ \ln y &= x + c, \\ y &= Ce^x. \end{aligned}$$

Nehomogeni del:
Sedaj je $y(x) = C(x)e^x$ in $y'(x) = C'(x)e^x + C(x)e^x$. Od tod sledi

$$\begin{aligned} C'(x)e^x + C(x)e^x - C(x)e^x &= e^{2x}, \\ C'(x) &= \frac{e^{2x}}{e^x} = e^x, \\ C(x) &= \int e^x \, dx = e^x + C. \end{aligned}$$

Splošna rešitev enačbe je

$$y(x) = C(x)e^x = (e^x + C)\, e^x = e^{2x} + Ce^x.$$

Konstanto C določimo z upoštevanjem začetnega pogoja

$$2 = y(0) = e^0 + Ce^0 = 1 + C.$$

Od tod sledi $C = 1$ in

$$y(x) = \underline{\underline{e^{2x} + e^x}}.$$

(d) $(x + 1)y' - 2y = (x + 1)^4$, $y(1) = 8$:

Homogeni del:
Splošna rešitev homogene enačbe je tokrat:

$$\begin{aligned} (x + 1)y' - 2y &= 0, \\ \frac{dy}{y} &= \frac{2\, dx}{x + 1}, \\ \ln y &= 2 \ln(x + 1) + c, \\ y &= C(x + 1)^2. \end{aligned}$$

Nehomogeni del:

Vzeli bomo $y(x) = C(x)(x+1)^2$, od koder sledi $y'(x) = C'(x)(x+1)^2 + C(x)2(x+1)$ in

$$(x+1)\left(C'(x)(x+1)^2 + C(x)2(x+1)\right) - 2C(x)(x+1)^2 = (x+1)^4,$$
$$C'(x) = \frac{(x+1)^4}{(x+1)^3} = x+1,$$
$$C(x) = \int (x+1)\,dx = \frac{x^2}{2} + x + C.$$

Splošna rešitev enačbe je

$$y(x) = C(x)(x+1)^2 = \left(\frac{x^2}{2} + x + C\right)(x+1)^2,$$

konstanta C pa zadošča enakosti

$$8 = y(1) = \left(\frac{1}{2} + 1 + C\right)4.$$

Sledi $C = \frac{1}{2}$ in

$$y(x) = \underline{\underline{\frac{1}{2}(x+1)^4}}.$$

$\square$

(5) Število bakterij v posodi je modelirano z diferencialno enačbo

$$N' = kN,$$

kjer je $k = \ln\frac{3}{2}$. Na začetku je v posodi 1000 bakterij. Izračunaj, po kolikem času bo v posodi 4000 bakterij.

Rešitev: Privzeli bomo, da število bakterij v posodi narašča s hitrostjo, ki je sorazmerna s trenutnim številom bakterij v posodi. To pomeni, da velja

$$N'(t) = kN(t),$$

kjer je:

- $N(t)$ število bakterij v posodi ob času t,
- k koeficient sorazmernosti.

Diferencialna enačba $N'(t) = kN(t)$ ima ločljive spremenljivke, njena splošna rešitev pa je

$$N' = kN,$$
$$\frac{dN}{N} = k\,dt,$$
$$\ln N = kt + c,$$
$$N(t) = Ce^{kt}.$$

Določiti moramo še vrednost konstante C. Iz pogoja $N(0) = 1000$ dobimo

$$1000 = N(0) = Ce^0 = C,$$

kar nam da

$$N(t) = 1000e^{kt} = 1000(e^k)^t = 1000\left(\frac{3}{2}\right)^t.$$

Funkcija $N(t)$ nam pove, koliko bakterij je v posodi ob času t. Nas zanima, kdaj bo $N(T) = 4000$. Rešiti moramo eksponentno enačbo

$$\begin{aligned} N(T) &= 4000, \\ 1000(3/2)^T &= 4000, \\ T &= \log_{3/2} 4. \end{aligned}$$

Rezultat je približno 3 ure in 25 minut. □

(6) Količina radioaktivnega izotopa ogljika ^{14}C pri razpadu fosila je modelirana z diferencialno enačbo

$$N' = -\lambda N,$$

kjer je $\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$, $t_{1/2} = 5700$ let pa razpolovni čas ogljika. Določi starost fosila, če fosil vsebuje 10% prvotne količine radioaktivnega izotopa ogljika ^{14}C.

Rešitev: Radioaktivna snov razpada s hitrostjo, ki je sorazmerna s trenutno količino snovi. To pomeni, da velja

$$N'(t) = -\lambda N(t).$$

Pri tem uporabljamo oznake:

- $N(t)$ količina radioaktivne snovi ob času t,
- λ razpadna konstanta,
- N_0 začetna količina radioaktivne snovi.

Splošna rešitev te diferencialne enačbe je $N(t) = Ce^{-\lambda t}$, če upoštevamo začetni pogoj, pa dobimo, da velja

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

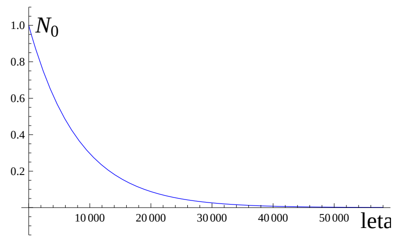
Razpolovni čas $t_{1/2}$ dane radioaktivne snovi je čas, v katerem razpade polovica začetne snovi. Velja

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}.$$

Starost fosila T mora sedaj zadoščati enačbi $N(T) = \frac{N_0}{10}$. Sledi

$$\begin{aligned} N_0 e^{-\lambda T} &= \frac{N_0}{10}, \\ \lambda T &= \ln 10, \\ T &= \frac{\ln 10}{\lambda} = \frac{\ln 10}{\ln 2} \cdot 5700. \end{aligned}$$

Od tod lahko ocenimo, da je starost fosila približno 19000 let.



Opomba: Obratno vrednost razpadne konstante λ označimo s τ in jo imenujemo razpadni čas. Razpadni čas je povprečna življenska doba enega delca radioaktivne snovi. $\square$

(7) Število prebivalstva na planetu Zemlja modeliramo z logistično diferencialno enačbo

$$P' = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right),$$

kjer je P število prebivalcev v milijardah, $r = 0.03$ in $K = 12$. Oceni število prebivalcev na našem planetu leta 2050, če je bilo na Zemlji leta 2011 sedem milijard prebivalcev.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo spoznali Verhulstov model rasti prebivalstva. Predpostavili bomo, da funkcija $P(t)$ števila prebivalcev ob času t zadošča diferencialni enačbi

$$P' = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right).$$

Konstanti r in K interpretiramo kot:

- $\cdot\, r$ koeficient sorazmernosti,
- $\cdot\, K$ maksimalno število prebivalcev na danem območju.

Tej enačbi pogosto rečemo logistična enačba, njenim rešitvam pa logistične krivulje.

Najprej poiščimo splošno rešitev logistične diferencialne enačbe

$$\begin{aligned}
P' &= rP\left(1 - \frac{P}{K}\right), \\
\frac{dP}{P\,(K-P)} &= \frac{r}{K}\,dt, \\
\frac{1}{K}\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{K-P}\right) dP &= \frac{r}{K}\,dt, \\
\ln\left(\frac{P}{K-P}\right) &= rt + c, \\
P &= (K-P)Ce^{rt}, \\
P(1 + Ce^{rt}) &= KCe^{rt}, \\
P &= \frac{KCe^{rt}}{1 + Ce^{rt}}.
\end{aligned}$$

Z upoštevanjem začetnega pogoja $P(2011) = 7$ dobimo iz enačbe $P = (K-P)Ce^{rt}$ vrednost

$$C = \frac{P(2011)}{K - P(2011)} e^{-2011r} = \frac{7}{5} e^{-2011r}.$$

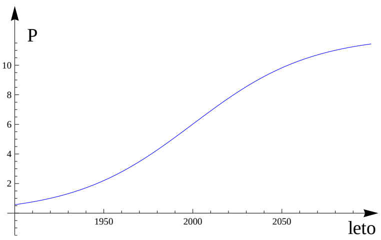
Število prebivalstva se torej spreminja po formuli

$$P(t) = \frac{12 \cdot \frac{7}{5} e^{r(t-2011)}}{1 + \frac{7}{5} e^{r(t-2011)}} = \frac{84 e^{0.03(t-2011)}}{5 + 7 e^{0.03(t-2011)}}.$$

Število prebivalstva se asimptotično približuje k številu

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = K,$$

na spodnji sliki pa je narisan graf funkcije P.



Po tej oceni bo leta 2050 na Zemlji 9.8 milijard ljudi. $\square$

(8) Padalec skoči iz letala in nato pada pod vplivom sile teže in sile zračnega upora. Izračunaj, kako se spreminja hitrost padalca med padanjem in nato še njegovo končno hitrost.

Rešitev: Gibanje padalca določa drugi Newtonov zakon, ki se v tem primeru glasi

$$mv' = mg - \frac{1}{2} \rho A C_d v^2.$$

Z v smo označili hitrost padalca v navpični smeri, člena na desni pa ustrezata sili teže $F_g = mg$ ter sili zračnega upora $F_{upora} = -\frac{1}{2} \rho A C_d v^2$. Koeficienti, ki nastopajo v enačbi, imajo naslednji pomen:

- m masa padalca,
- ρ gostota zraka,
- A ploščina prereza padalca,
- C_d koeficient zračnega upora,
- g težni pospešek.

Da si malce poenostavimo računanje, uvedimo oznaki $a^2 = \frac{\rho A C_d}{2m}$ in $b^2 = g$. Po deljenju z m se enačba prevede v diferencialno enačbo

$$v' = b^2 - a^2 v^2,$$

$$\frac{dv}{b^2 - a^2 v^2} = dt.$$

Integral racionalne funkcije na levi je enak

$$\int \frac{dv}{b^2 - a^2 v^2} = \frac{1}{2ab} \ln \frac{b + av}{b - av} + C.$$

Z integriranjem tako pridemo do enakosti

$$\frac{1}{2ab} \ln \frac{b + av}{b - av} = t + C.$$

Če upoštevamo, da je na začetku hitrost padalca $v(0) = 0$, dobimo $C = 0$, kar nam da

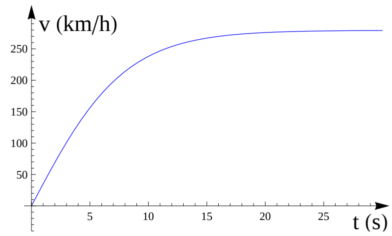
$$\ln \frac{b + av}{b - av} = 2abt.$$

Iz te enačbe lahko sedaj eksplicitno izrazimo $v(t)$. Rešitev je enaka

$$v(t) = \frac{b}{a} \cdot \frac{e^{2abt} - 1}{e^{2abt} + 1} = \sqrt{\frac{2mg}{\rho A C_d}} \cdot \frac{e^{2\sqrt{\frac{\rho A C_d g}{2m}}t} - 1}{e^{2\sqrt{\frac{\rho A C_d g}{2m}}t} + 1}.$$

V limiti dobimo končno hitrost padalca $v_k = \lim_{t \to \infty} v(t) = \sqrt{\frac{2mg}{\rho A C_d}}$.

Poglejmo si še primer s konkretnimi številkami. Vzemimo, da ima padalec $80kg$ in da je $\rho = 1.3kg/m^3$, $g = 9.8m/s^2$. Denimo še, da je padalec med padanjem v navpični legi. Potem je $C_d \approx 1$, čelni prerez pa je $A \approx 0.2m^2$. Pri teh podatkih bi bila končna hitrost padalca $v_k \approx 280km/h$, dosegel pa bi jo v približno $20s$, kot kaže spodnji graf.



$\square$