Dodatne vaje iz Matematike

---

(1) Izračunaj limito zaporedja s splošnim členom:

(a) $a_n = \dfrac{5n^3 + 2n - 1}{(n+1)^3}$,

(b) $a_n = \sqrt{n^4 - 3n^2 + 1} - \sqrt{n^4 + 6n - 1}$,

(c) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}}$,

(d) $a_n = \left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^{n+2}$,

(e) $a_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^{2n}$.

Rešitev:

(a) $L = 5$,

(b) $L = -\dfrac{3}{2}$,

(c) $L = 1$,

(d) $L = e^{-1}$,

(e) $L = e^4$.

(2) Izračunaj limite funkcij:

(a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$,

(b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{1 - \sqrt{5 - x}}{3 - \sqrt{5 + x}}$,

(c) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x\right)$,

(d) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin x}{x - \pi}$,

(e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x^2}$,

(f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$,

(g) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x+5}{x+3}\right)^{2x-1}$,

(h) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\sin x}}$,

(i) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{3}{\cos x - 1}}$.

Rešitev:

(a) $L = \dfrac{1}{3}$,

(b) $L = -3$,

(c) $L = -\dfrac{5}{2}$,

(d) $L = -1$,

(e) $L = 2$,

(f) $L = \dfrac{1}{4}$,

(g) $L = e^4$,

(h) $L = e$,

(i) $L = e^3$.

(3) S pomočjo metode bisekcije poišči na dve decimalki natančno:

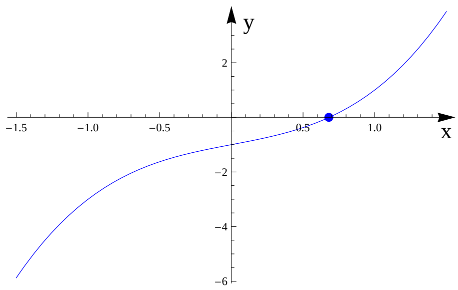
(a) rešitev enačbe $x^3 + x - 1 = 0$,

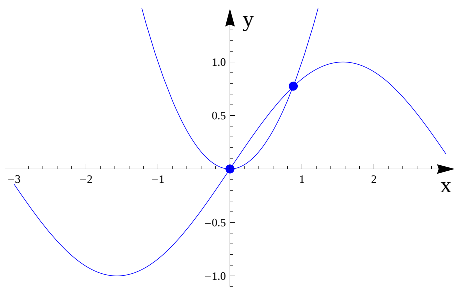
(b) rešitev enačbe $\sin x = x^2$.

Rešitev:

(a) $x = 0.68$,

(b) $x_1 = 0$, $x_2 = 0.88$.





(4) Izračunaj odvode funkcij:

(a) $h(x) = e^x \cos x$,

(b) $h(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+4x+2}$,

(c) $h(x) = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x$,

(d) $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$,

(e) $h(x) = x^x$,

(f) $h(x) = \ln(\ln x)$,

(g) $h(x) = (x^2 + x + 1)e^{2x}$.

Rešitev:

(a) $h'(x) = e^x(\cos x - \sin x)$,

(b) $h'(x) = -\dfrac{2x(1+x)}{(x^2+4x+2)^2}$,

(c) $h'(x) = 0$,

(d) $h'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$,

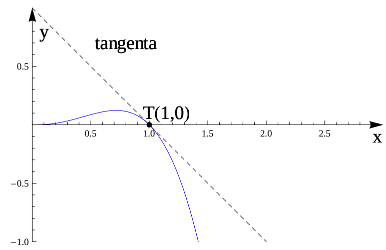
(e) $h'(x) = x^x(1+\ln x)$,

(f) $h'(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$,

(g) $h'(x) = (2x^2+4x+3)e^{2x}$.

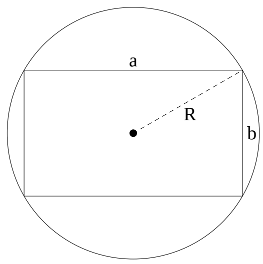
(5) Zapiši enačbo tangente na krivuljo $y = x^3 \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ v točki z absciso $x = 1$.

Rešitev: $y = -x + 1$.



(6) V krog s polmerom R včrtamo pravokotnik s stranicama a in b. Kakšni morata biti dolžini stranic a in b, da bo ploščina tega pravokotnika največja?

Rešitev: $a = b = \sqrt{2}\,R$.



(7) S pomočjo L'Hospitalovega pravila izračunaj limite funkcij:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^x$,

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$,

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{x - \sin x}$.

Rešitev:

(a) $L = \dfrac{1}{2}$,

(b) $L = \dfrac{1}{2}$,

(c) $L = 1$,

(d) $L = \dfrac{1}{2}$,

(e) $L = 6$.

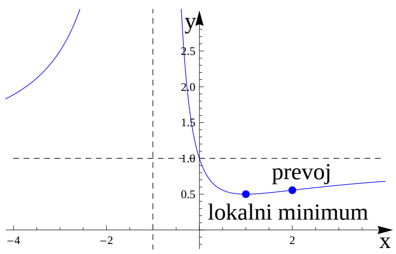
(8) Skiciraj grafe danih funkcij (najprej določi definicijsko območje, ničle in pole, limite na robu definicijskega območja, ekstreme, območja naraščanja/padanja in območja konveksnosti/konkavnosti):

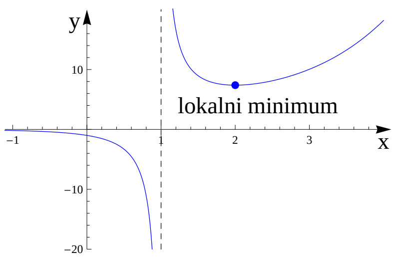
(a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2x+1}$,

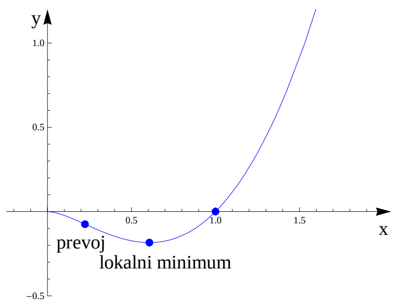
(b) $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$,

(c) $f(x) = x^2 \ln x$.

Rešitev:







(9) Izračunaj Taylorjev polinom reda 2 funkcije $f(x) = \frac{x}{1+x}$ okoli točke $a = 2$.

Rešitev: $T_2(x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{9}(x-2) - \frac{1}{27}(x-2)^2$.

(10) Poišči vse lokalne ekstreme danih funkcij in jih klasificiraj:

(a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 3x + 3y$,

(b) $f(x,y) = 4x^3 + 6x^2y + 3xy^2 - 27x - 12y$.

Rešitev:

(a) V $T(-1,-1)$ je lokalni minimum.

(b) V $T_1(2,-1)$ je lok. minimum, v $T_2(-2,1)$ je lok. maksimum, v $T_3(1,1)$ in $T_4(-1,-1)$ pa sedli.

(11) Poišči globalne ekstreme danih funkcij:

(a) $f(x,y) = 3x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 4y + 1$ na trikotniku z oglišči $A(0,0)$, $B(-2,0)$ in $C(0,-3)$,

(b) $f(x,y) = 3x^2 + 2xy - 5y^2 + 4x$ na pravokotniku $A(-2,-1)$, $B(0,-1)$, $C(0,0)$ in $D(-2,0)$,

(c) $f(x,y) = x + y + 2$ na liku, ki je omejen z abscisno osjo in parabolo $y = 1 - x^2$.

Rešitev:

(a) $\max = 22$ v točki $C\,(0,-3)$, $\min = \dfrac{2}{3}$ v točki $T\left(-\dfrac{1}{3},0\right)$.

(b) $\max = \dfrac{24}{5}$ v točki $T\left(-2,-\dfrac{2}{5}\right)$, $\min = -\dfrac{16}{3}$ v točki $T\left(-\dfrac{1}{3},-1\right)$.

(c) $\max = \dfrac{13}{4}$ v točki $T\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right)$, $\min = 1$ v točki $T\,(-1,0)$.

(12) Izračunaj nedoločene integrale:

(a) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos x\, dx$,

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(\operatorname{arc\,tg} x)(1+x^2)}$,

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+64}\, dx$,

(d) $\displaystyle\int 2x \operatorname{arc\,tg} x\, dx$,

(e) $\displaystyle\int (x^2+1)\cos x\, dx$,

(f) $\displaystyle\int \frac{x^2+x}{(x-1)(x^2+1)}\, dx$,

(g) $\displaystyle\int \frac{4+2x}{(x+1)(x+3)}\, dx$,

(h) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}\, dx$.

Rešitev:

(a) $I = \dfrac{1}{4}\sin^4 x + C$,

(b) $I = \ln|\operatorname{arc\,tg} x| + C$,

(c) $I = \dfrac{1}{8}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{8} + C$,

(d) $I = -x + (x^2+1)\operatorname{arc\,tg} x + C$,

(e) $I = 2x\cos x + (x^2-1)\sin x + C$,

(f) $I = \ln|x-1| + \operatorname{arc\,tg} x + C$,

(g) $I = \ln|x+1| + \ln|x+3| + C$,

(h) $I = -\dfrac{1}{e^x+1} + C$.

(13) Izračunaj ploščine naslednjih likov:

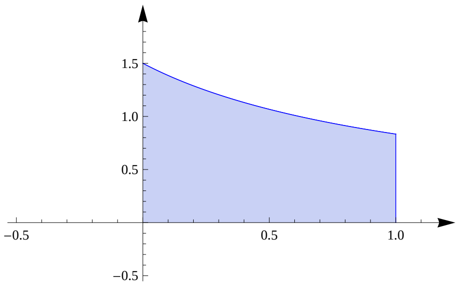
(a) lika med grafom funkcije $f(x) = \dfrac{3+2x}{(1+x)(2+x)}$ in abscisno osjo na $[0,1]$,

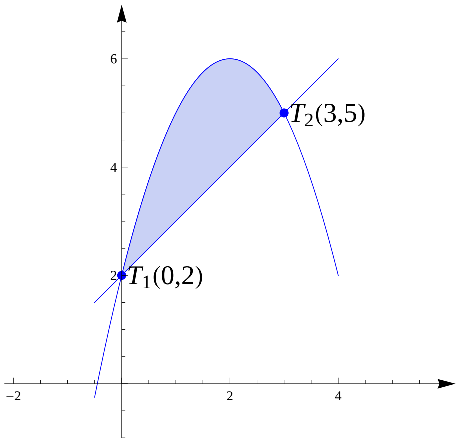
(b) lika med grafoma funkcij $f(x) = x+2$ in $g(x) = -x^2+4x+2$.

Rešitev:

(a) $S = \ln 3$,

(b) $S = \dfrac{9}{2}$.





(14) Izračunaj volumen:

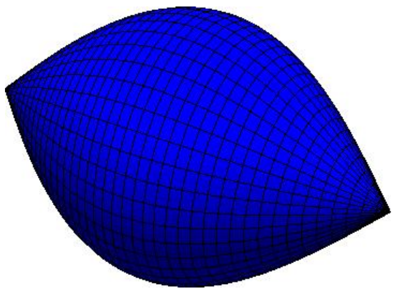
(a) vrtenine, ki jo dobimo, če zavrtimo okoli abscisne osi na $[0, \pi]$ graf funkcije $g(x) = \sin x$,

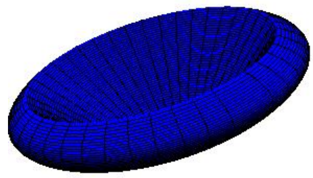
(b) vrtenine, ki jo dobimo, če zavrtimo okoli osi $y = 1$ lik med grafoma funkcij $f(x) = x + 2$ in $g(x) = -x^2 + 4x + 2$.

Rešitev:

(a) $V = \dfrac{\pi^2}{2}$,

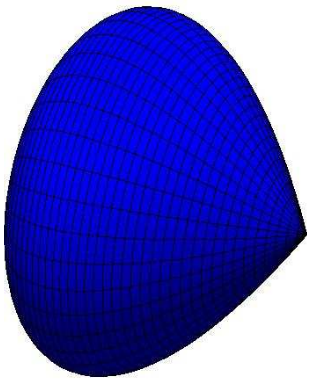
(b) $V = \dfrac{153\pi}{5}$.





(15) Izračunaj površino plašča vrtenine, ki jo dobimo, če zavrtimo graf funkcije $f(x) = \frac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x}$ na intervalu $[0, 3]$ okoli abscisne osi.

Rešitev: $P = 3\pi$.



(16) S trapezno metodo pri $n = 4$ približno izračunaj dolžino grafa funkcije $f(x) = 2^x$ na $[0, 1]$.

Rešitev: $l \approx 1.43$.

(17) Reši diferencialne enačbe pri danih začetnih pogojih:

(a) $x^2y' + 3xy = 0$, $y(1) = 1$,
(b) $y' + \dfrac{y}{x^2} = 0$, $y(1) = 2e$,
(c) $x^3y' = y^2$, $y(1) = 1$,
(d) $y' + 2y\sin 2x = 2e^{\cos 2x}$, $y(0) = 0$,
(e) $xy' - y = x^3 - \dfrac{1}{x}$, $y(1) = 0$.

Rešitev:

(a) $y(x) = \dfrac{1}{x^3}$,
(b) $y(x) = 2e^{\frac{1}{x}}$,
(c) $y(x) = \dfrac{2x^2}{1+x^2}$,
(d) $y(x) = 2xe^{\cos 2x}$,
(e) $y(x) = \dfrac{x^3}{2} - x + \dfrac{1}{2x}$.

(18) Oglaševalna agencija poskuša preko oglasov predstaviti svoj novi artikel populaciji, ki zajema 1000000 ljudi. Privzemimo, da je število ljudi, ki na novo spoznajo artikel, sorazmerno s številom ljudi, ki ga še ne poznajo in da na začetku oglaševanja artikla ne pozna nihče.

(a) Zapiši diferencialno enačbo, ki modelira število ljudi, ki poznajo artikel.
(b) Po koncu prvega leta oglaševanja je za artikel čulo 500000 ljudi. Koliko ljudi bo artikel poznalo po dveh letih?

Rešitev:

(a) $\dot{P} = k(1000000 - P)$,
(b) $P(t) = 1000000(1 - 2^{-t})$, $k = \ln 2$, $P(2) = 750000$.

(19) Radioaktivni material razpada s hitrostjo, ki je sorazmerna trenutni količini materiala. Na začetku imamo 100g materiala, po štirih dneh pa 90g.

(a) Zapiši diferencialno enačbo, ki modelira količino materiala.
(b) Kdaj bo razpadlo pol materiala.

Rešitev:

(a) $\dot{N} = -\lambda N$,
(b) $N(t) = 100e^{-\lambda t}$, $\lambda = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{10}{9}$, $T = 26{,}3$dni.

(20) Reši diferencialne enačbe drugega reda:

(a) $y'' - 4y' + 4y = 12x - 12$,
(b) $y'' - 5y' + 4y = -10\cos 2x$,
(c) $y'' - y' = 1 + e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
(d) $y'' - y = 2\cos x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.

Rešitev:

(a) $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + 3x$,

(b) $y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x} + \sin 2x$,

(c) $y(x) = 1 - x + x e^{x}$,

(d) $y(x) = -\cos x$.