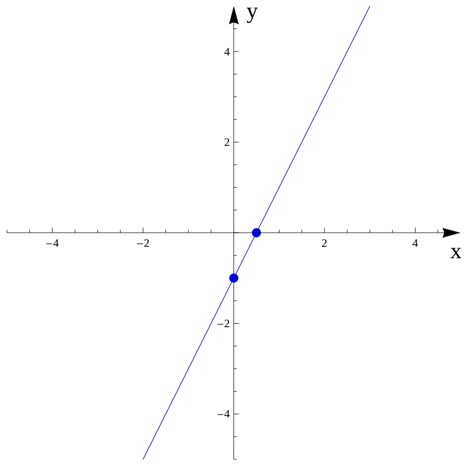
# Matematika

## Funkcije in enačbe

(1) Nariši grafe naslednjih funkcij:

(a) $f(x) = 2x - 1$,
(b) $f(x) = x^2 - 2x - 3$,
(c) $f(x) = x^3 - x$.

*Rešitev:* (a) Linearna funkcija $f(x) = 2x - 1$ ima začetno vrednost $f(0) = -1$ in ničlo $x = 1/2$. Definirana je povsod in zavzame vse vrednosti.




Je naraščajoča in neomejena. Lokalnih ekstremov in prevojev nima.

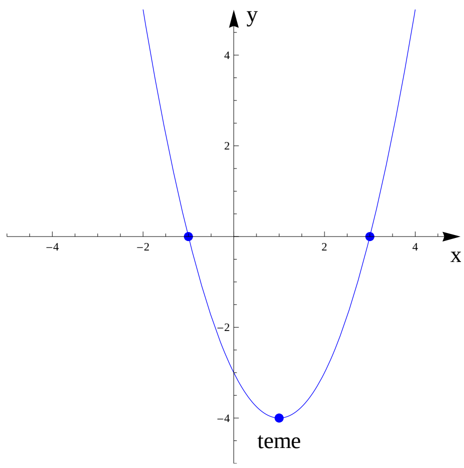
(b) Kvadratna funkcija $f(x) = x^2 - 2x - 3$ je definirana za vsako realno število. Iz razcepa

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$$

lahko preberemo, da ima ničli $x_1 = 3$ in $x_2 = -1$. Kvadratna funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ ima teme v točki

$$T = \left( -\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right).$$

Naša funkcija ima tako teme v točki $T(1, -4)$.

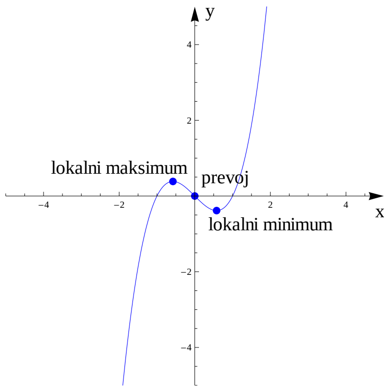


Zaloga vrednosti funkcije $f$ je interval $Z_f = [-4, \infty)$, kar pomeni, da je $f$ neomejena funkcija. Levo od temena pada, desno od temena pa narašča. V temenu ima lokalni minimum. Je konveksna funkcija.

(c) Polinom $f(x) = x^3 - x$ je definiran za vsako realno število, zato je $D_f = \mathbb{R}$. Ker je lihe stopnje, je surjektiven, kar pomeni, da je $Z_f = \mathbb{R}$. Iz razcepa

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$$

lahko preberemo, da ima $f$ tri realne ničle, in sicer $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ in $x_3 = 1$. Pri $x \to \infty$ bo vrednost funkcije $f$ rasla čez vse meje, pri $x \to -\infty$ pa bo šla proti minus neskončno.




Najprej funkcija nekaj časa narašča, nato pada, nazadnje pa spet narašča. Ima en lokalni minimum in en lokalni maksimum. Levo od izhodišča je funkcija konkavna, desno od izhodišča pa konveksna. V točki $x = 0$ ima prevoj. Ker je vsota samih lihih potenc, je $f$ liha funkcija. $\square$

(2) Nariši grafa naslednjih funkcij:

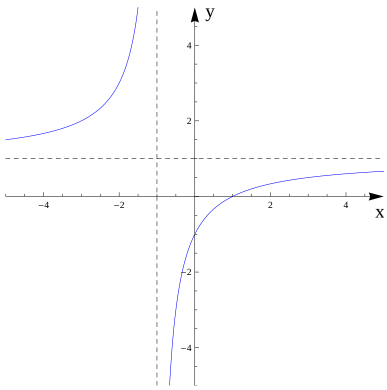
(a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$,

(b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$.

*Rešitev:* (a) Racionalna funkcija $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ima pol pri $x = -1$ in ničlo $x = 1$. Od tod takoj sledi, da je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Iz enakosti

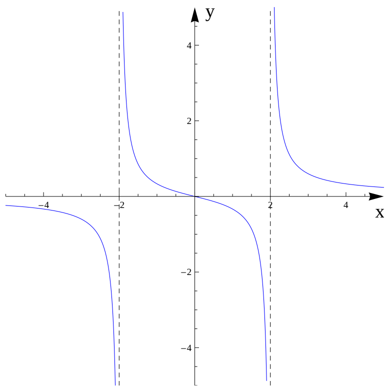
$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$$

sledi, da je premica $y = 1$ vodoravna asimptota funkcije $f$ pri $x \to \pm\infty$ ter da je zaloga vrednosti funkcije $f$ enaka $Z_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.



Funkcija $f$ ves čas narašča. Levo od pola je konveksna, desno od pola pa konkavna. Funkcija $f$ je bijekcija iz množice $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ na množico $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(b) Racionalna funkcija $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ ima dva pola $x = \pm 2$ in ničlo $x = 0$. Torej je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. Premica $y = 0$ je vodoravna asimptota funkcije $f$ pri $x \to \pm\infty$.



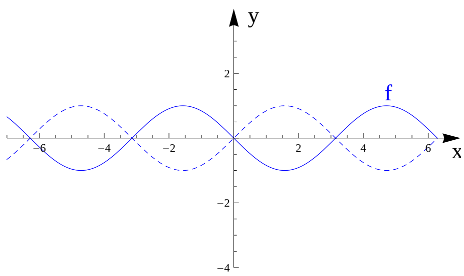

Zaloga vrednosti funkcije $f$ so vsa realna števila. $\square$

(3) Nariši grafa naslednjih funkcij:

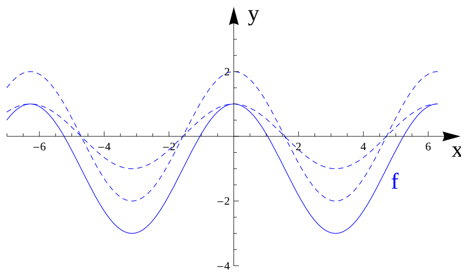
(a) $f(x) = \sin(x - \pi)$,

(b) $f(x) = 2\cos x - 1$.

*Rešitev:* (a) Funkcija $f$ je definirana na celi realni osi in je periodična s periodo $2\pi$. Zavzame vrednosti med $-1$ in $1$. Njen graf dobimo tako, da graf sinusne funkcije prestavimo za $\pi$ v desno.




(b) Funkcija $f$ je definirana na celi realni osi in je periodična s periodo $2\pi$. Zavzame vrednosti med $-3$ in $1$. Njen graf dobimo tako, da graf kosinusne funkcije dvakrat raztegnemo v smeri ordinatne osi nato pa prestavimo za $1$ navzdol.




$\square$

(4) Dana je funkcija $f(x) = e^{x-1} + 2$.

(a) Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti dane funkcije.
(b) Izračunaj definicijsko območje in predpis za inverzno funkcijo.
(c) Skiciraj grafa funkcije in inverzne funkcije.

*Rešitev:* a) Eksponentna funkcija je definirana povsod, v njeni zalogi vrednosti pa so pozitivna realna števila. V našem primeru imamo opravka z eksponentno funkcijo, ki je premaknjena za dve enoti navzgor in eno enoto v desno. Zato je

$$D_f = \mathbb{R},$$
$$Z_f = (2, \infty).$$

b) Predpis za inverzno funkcijo izračunamo tako, da v izrazu $y = f(x)$ zamenjamo vlogi $x$ in $y$ in nato poskusimo izraziti $y$.

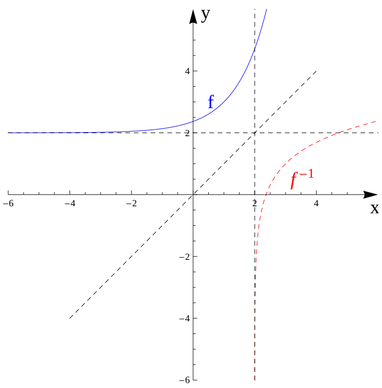
$$\begin{aligned} x &= e^{y-1} + 2, \\ x - 2 &= e^{y-1}, \\ \ln(x-2) &= y - 1, \\ y &= \ln(x-2) + 1. \end{aligned}$$

Tako dobimo predpis za inverzno funkcijo

$$f^{-1}(x) = \ln(x-2) + 1.$$

Inverzna funkcija je definirana na $D_{f^{-1}} = (2, \infty)$.

c) Poglejmo si še grafa funkcije in inverzne funkcije.




Graf inverzne funkcije dobimo tako, da prezrcalimo graf originalne funkcije preko simetrale lihih kvadrantov. $\square$

(5) Dana je funkcija $f(x) = \frac{2x-5}{x-3}$.

(a) Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti dane funkcije.
(b) Izračunaj definicijsko območje in predpis za inverzno funkcijo.
(c) Skiciraj grafa funkcije in inverzne funkcije.

*Rešitev:* a) Najprej predpis za funkcijo $f$ preoblikujmo v

$$f(x) = \frac{2x-5}{x-3} = \frac{2x-6+1}{x-3} = 2 + \frac{1}{x-3}.$$

Drugi sumand v zgornji vsoti je racionalna funkcija, ki zavzame vse vrednosti razen 0. Zato zavzame funkcija $f$ vse vrednosti razen 2, definirana pa je povsod razen v točki $x = 3$.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\},$$
$$Z_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

b) Inverzna funkcija funkcije $f$ ima definicijsko območje

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{2\},$$

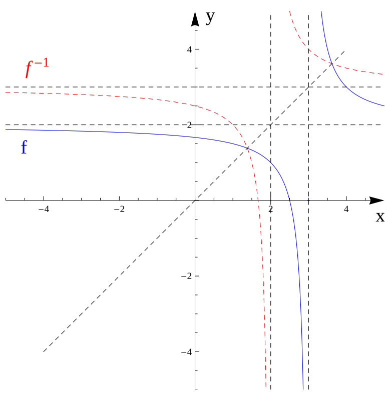
njen predpis pa dobimo iz naslednjih enakosti

$$\begin{aligned} x &= 2 + \frac{1}{y-3}, \\ x - 2 &= \frac{1}{y-3}, \\ \frac{1}{x-2} &= y - 3, \\ y &= 3 + \frac{1}{x-2}. \end{aligned}$$

Če damo desno stran na skupni imenovalec, dobimo predpis za inverzno funkcijo

$$f^{-1}(x) = \frac{3x-5}{x-2}.$$

c) Poglejmo še grafa.




□

(6) Grafično reši naslednje enačbe oziroma neenačbe:

(a) $x^2 - 5x + 6 = 0$,

(b) $x^2 - 5x + 6 > 0$,

(c) $x^2 - 5x + 6 < 0$.

*Rešitev:* Najprej skicirajmo graf kvadratne funkcije $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Iz razcepa

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

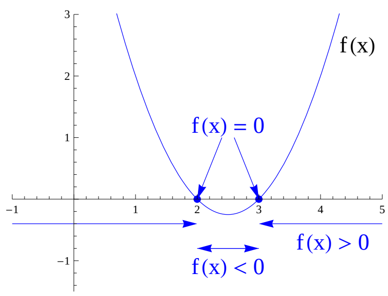
sledi, da sta ničli funkcije $f$ števili

$$x_1 = 2,$$
$$x_2 = 3.$$

Kvadratna funkcija $g(x) = ax^2 + bx + c$ ima teme v točki $T(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a})$. V našem primeru to pomeni, da je teme funkcije $f$ v točki

$$T\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right).$$

Graf funkcije $f$ ima obliko parabole.




Rešitve enačbe $f(x) = 0$ so točke, v katerih graf funkcije $f$ seka abscisno os. Rešitvam neenačb $f(x) > 0$ in $f(x) < 0$ pa ustrezajo množice točk, kjer leži graf funkcije $f$ nad oziroma pod abscisno osjo. V našem primeru to pomeni:

a) $R_= = \{2, 3\}$,

b) $R_> = (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$,

c) $R_< = (2, 3)$. □

(7) Reši enačbi:

(a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$,

(b) $x^3 - 6x^2 + 6x - 1 = 0$.

*Rešitev:* Polinomska enačba

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

ima po osnovnem izreku algebre $n$ kompleksnih ničel (ne nujno različnih). V splošnem ne poznamo nobenega algoritma za natančno iskanje ničel. Če pa je stopnja dovolj majhna, pa lahko kakšno ničlo najdemo z ugibanjem, nato pa s pomočjo Hornerjevega algoritma zmanjšamo red enačbe za ena. Če so koeficienti enačbe cela števila, potem so možne racionalne ničle enačbe oblike $\frac{p}{q}$, kjer število $p$ deli prosti koeficient $a_0$, $q$ pa deli vodilni koeficient $a_n$. Če nam uspe enačbo poenostaviti do kvadratne enačbe $ax^2 + bx + c = 0$, imamo formulo za njeni rešitvi

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

a) V tem primeru lahko enačbo poenostavimo v

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3 = 0,$$

od koder sledi, da so vse tri ničle enake

$$x_1 = x_2 = x_3 = -1.$$

b) S poskušanjem lahko ugotovimo, da ima enačba $x^3 - 6x^2 + 6x - 1 = 0$ rešitev

$$x_1 = 1.$$

Sedaj bomo s pomočjo Hornerjevega algoritma zreducirali dano enačbo do kvadratne enačbe.

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & -6 & 6 & -1 \\
 & & 1 & -5 & 1 \\
\hline
1 & 1 & -5 & 1 & 0
\end{array}$$

S Hornerjem algoritmom smo preverili, da je $x = 1$ res rešitev naše enačbe, hkrati pa lahko iz spodnje vrstice preberemo, da je

$$x^3 - 6x^2 + 6x - 1 = (x-1)(x^2 - 5x + 1).$$

Preostane nam še, da rešimo kvadratno enačbo $x^2 - 5x + 1 = 0$. Tako dobimo

$$x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25-4}}{2}$$

oziroma

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{5 + \sqrt{21}}{2}, \\
x_3 &= \frac{5 - \sqrt{21}}{2}.
\end{aligned}$$

□

(8) Reši neenačbe:

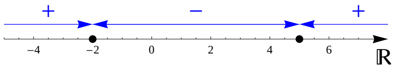
(a) $x^2 - 3x - 10 > 0$,

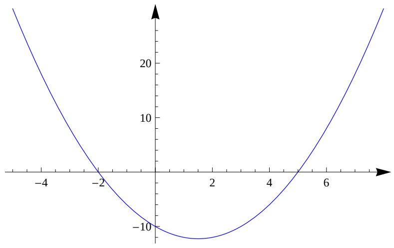
(b) $x^3 - x > 0$,

(c) $\dfrac{x-1}{x^2+2} > 0$.

*Rešitev:* Racionalne neenačbe rešujemo tako, da najprej števec in imenovalec razcepimo na produkt linearnih in nerazcepnih kvadratnih faktorjev. Z ničlami števca in imenovalca realna števila razdelimo na nekaj intervalov, nato pa na vsakem dobljenem intervalu posebej preverimo, ali je na njem izpolnjena neenačba. To naredimo tako, da izberemo poljubno število na danem intervalu in pogledamo predznak dobljenega izraza.

a) Neenačbo $x^2 - 3x - 10 > 0$ lahko prepišemo v $(x-5)(x+2) > 0$.



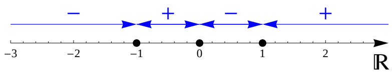


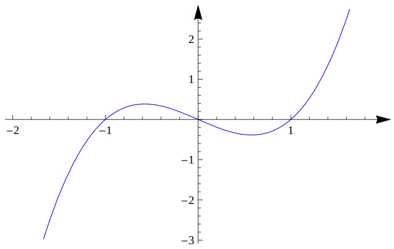

Od tod sklepamo, da je rešitev neenačbe množica $R = (-\infty, -2) \cup (5, \infty)$.

b) Najprej razcepimo polinom na levi

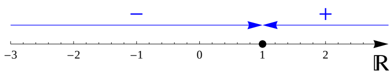
$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1).$$

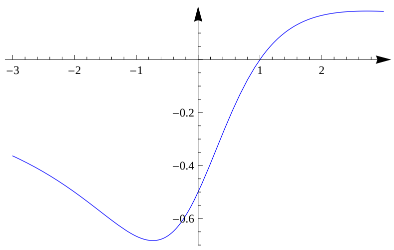
Od tod dobimo rešitev $R = (-\infty, -1) \cup (0, 1)$.






c) V tem primeru imamo racionalno neenačbo $\frac{x-1}{x^2+2} > 0$. Kvadratni faktor v imenovalcu je nerazcepen in povsod pozitiven. Od tod sledi, da je rešitev neenačbe množica $R = (1, \infty)$.






$\square$

(9) Reši enačbe:

(a) $5^x + 5^{x+1} = 30$,

(b) $9^x + 27 = 4 \cdot 3^{x+1}$,

(c) $\log_{10}(2x + 1) - \log_{10} 3 = 2 \log_{10} 2 - \log_{10}(x + 3)$.

*Rešitev:* a) Računajmo:

$$\begin{aligned} 5^x + 5^{x+1} &= 30, \\ 5^x(1 + 5) &= 30, \\ 5^x &= 5, \\ x &= 1. \end{aligned}$$

b) Najprej enačbo $9^x + 27 = 4 \cdot 3^{x+1}$ preoblikujmo v enačbo

$$(3^x)^2 - 12 \cdot 3^x + 27 = 0.$$

Z uvedbo nove spremenljivke $t = 3^x$ pridemo do kvadratne enačbe

$$\begin{aligned} t^2 - 12t + 27 &= 0, \\ (t-3)(t-9) &= 0, \end{aligned}$$

ki ima rešitvi $t_1 = 3$ in $t_2 = 9$. Od tod pa potem dobimo

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \\ x_2 &= 2. \end{aligned}$$

c) Najprej z uporabo osnovnih lastnosti logaritma enačbo preoblikujemo v

$$\begin{aligned} \log_{10}(2x+1) - \log_{10} 3 &= 2\log_{10} 2 - \log_{10}(x+3), \\ \log_{10} \frac{2x+1}{3} &= \log_{10} \frac{4}{x+3}. \end{aligned}$$

Ker je logaritemska funkcija injektivna, od tod sledi

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{3} &= \frac{4}{x+3}, \\ (2x+1)(x+3) &= 12, \\ 2x^2 + 7x - 9 &= 0. \end{aligned}$$

Rešitvi te enačbe sta

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49+72}}{4} = \frac{-7 \pm 11}{4}.$$

Rešitev $x = -\frac{18}{4}$ ni ustrezna, saj logaritma v enačbi pri tej vrednosti neznanke nista definirana. Zato je edina rešitev enačbe

$$x = 1.$$

□

(10) Reši enačbe:

(a) $\cos 3x + 1 = 0$,

(b) $2\sin^2 x - \sin x = 0$,

(c) $\sin x = \sin 2x$.

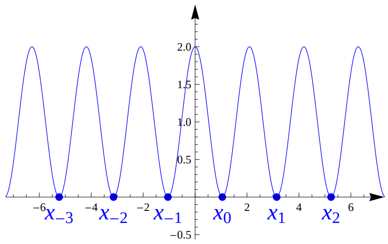
*Rešitev:* a) Enačbo najprej preoblikujmo v

$$\cos 3x = -1.$$

Funkcija cos zasede vrednost $-1$ v točkah oblike $x = \pi + 2k\pi$, za vsako celo število $k$. Od tod sklepamo, da mora biti $3x = \pi + 2k\pi$ oziroma, da so rešitve enačbe oblike

$$x_k = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3},$$

za poljuben $k \in \mathbb{Z}$.



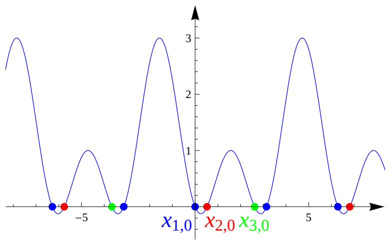

b) Računajmo

$$\begin{aligned} 2\sin^2 x - \sin x &= 0, \\ \sin x(2\sin x - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Rešitve enačbe torej bodisi zadoščajo $\sin x = 0$ ali pa $\sin x = \frac{1}{2}$. Iz lastnosti funkcije sin od tod sklepamo, da so rešitve enačbe

$$\begin{aligned} x_{1,k} &= k\pi, \\ x_{2,k} &= \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \\ x_{3,k} &= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \end{aligned}$$

za poljuben $k \in \mathbb{Z}$.



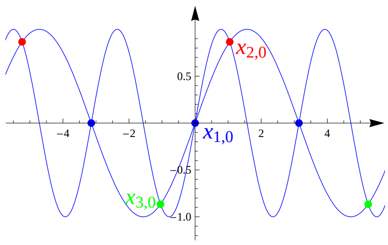

c) Sedaj bomo uporabili formulo $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ za sinus dvojnega kota. Tako dobimo

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin 2x, \\ \sin x - 2\sin x\cos x &= 0, \\ \sin x(1 - 2\cos x) &= 0. \end{aligned}$$

Rešitve enačbe sedaj ustrezajo ali $\sin x = 0$ ali pa $\cos x = \frac{1}{2}$. Zato so torej oblike

$$\begin{aligned} x_{1,k} &= k\pi, \\ x_{2,k} &= \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \\ x_{3,k} &= -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \end{aligned}$$

za poljuben $k \in \mathbb{Z}$.




□