Matematika

Funkcije večih spremenljivk

(1) Skiciraj nivojnice in grafa danih funkcij dveh spremenljivk:

(a) $f(x, y) = x + y$,

(b) $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Rešitev: (a) Nivojnice funkcije f so množice oblike

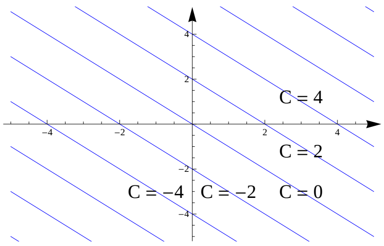
$$f(x, y) = C,$$

pri različnih izbirah konstante C. Nivojnice funkcije dveh spremenljivk večinoma sestojijo iz krivulj, lahko pa vsebujejo tudi kakšno izolirano točko.

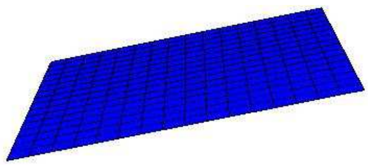
V našem primeru so nivojnice krivulje, ki zadoščajo enačbi

$$\begin{aligned} x + y &= C, \\ y &= -x + C, \end{aligned}$$

kjer je C poljubno realno število. Za vsak tak C je ustrezna nivojnica premica s smernim koeficientom $k = -1$ in z začetno vrednostjo $n = C$.



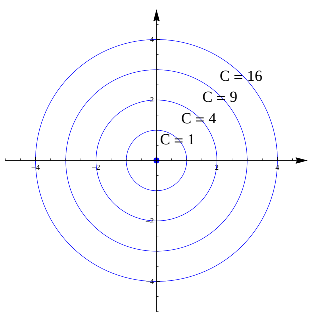
Graf funkcije f skiciramo tako, da vsako izmed teh premic dvignemo na ustrezno višino. Tako dobimo ravnino.



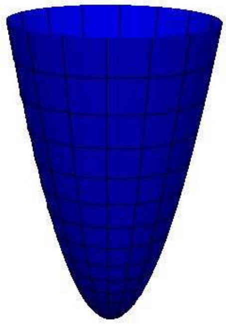
(b) Nivojnice funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2$ zadoščajo enačbi

$$x^2 + y^2 = C.$$

Če je konstanta C pozitivna, je ustrezna nivojnica krožnica s središčem v točki $(0, 0)$ in s polmerom $R = \sqrt{C}$. V primeru $C = 0$ dobimo izolirano točko $T(0, 0)$. V tej točki doseže funkcija f globalni minimum.



Graf funkcije f ima obliko paraboloida.



$\square$

(2) Izračunaj parcialne odvode naslednjih funkcij:

(a) $f(x,y) = x^2 + y$,
(b) $f(x,y) = x^3y - xy^2$,
(c) $f(x,y) = e^x y + e^y x$,
(d) $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$.

Rešitev: Parcialne odvode računamo podobno kot navadne odvode, le da moramo paziti, po kateri spremenljivki odvajamo. Kadar odvajamo po spremenljivki x, si mislimo, da je y konstanta in obratno.

(a) Parcialna odvoda funkcije $f(x,y) = x^2 + y$ sta

$$\begin{aligned} f_x &= 2x, \\ f_y &= 1. \end{aligned}$$

(b) Parcialna odvoda funkcije $f(x,y) = x^3y - xy^2$ sta

$$\begin{aligned} f_x &= 3x^2y - y^2, \\ f_y &= x^3 - 2xy. \end{aligned}$$

(c) Parcialna odvoda funkcije $f(x,y) = e^x y + e^y x$ sta

$$\begin{aligned} f_x &= e^x y + e^y, \\ f_y &= e^x + e^y x. \end{aligned}$$

(d) Parcialna odvoda funkcije $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$ sta

$$\begin{aligned} f_x &= \cos(x)\cos(y), \\ f_y &= -\sin(x)\sin(y). \end{aligned}$$

$\square$

(3) Poišči vse lokalne ekstreme danih funkcij in jih klasificiraj:

(a) $f(x,y) = 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 14x - 34y + 42$,

(b) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$,

(c) $f(x,y) = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{y} + y$.

Dokaz. Ekstreme funkcij dveh spremenljivk iščemo v dveh korakih. Najprej poiščemo stacionarne točke funkcije f. V stacionarnih točkah je tangentna ravnina na graf funkcije vodoravna, dobimo pa jih kot rešitve sistema enačb

$$f_x(x,y) = 0,$$
$$f_y(x,y) = 0.$$

Tip stacionarne točke lahko nato določimo s pomočjo drugih odvodov funkcije f. Naj bo (a,b) stacionarna točka funkcije f. Če je $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2 > 0$, ima f v (a,b) lokalni ekstrem, in sicer:

· če je $f_{xx}(a,b) > 0$, zavzame f v (a,b) lokalni minimum,
· če je $f_{xx}(a,b) < 0$, zavzame f v (a,b) lokalni maksimum.

Če je $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2 < 0$, f v (a,b) nima ekstrema, pač pa ima sedlo.

(a) $\underline{f(x,y) = 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 14x - 34y + 42}$:
Parcialna odvoda sta enaka $f_x = 10x + 6y - 14$ in $f_y = 10y + 6x - 34$. Od tod dobimo sistem enačb

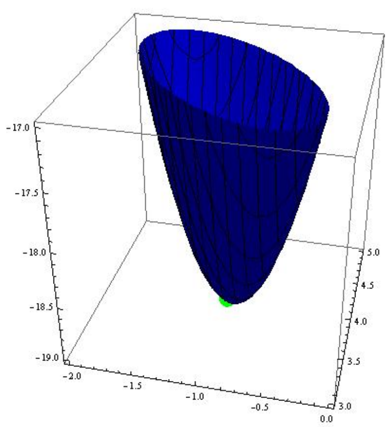
$$5x + 3y = 7,$$
$$3x + 5y = 17,$$

ki ima rešitev $x = -1$, $y = 4$. Funkcija f ima torej stacionarno točko $T(-1,4)$. Izračunajmo še druge odvode: $f_{xx} = 10$, $f_{xy} = 6$, $f_{yy} = 10$. Sledi

$$f_{xx}(-1,4)f_{yy}(-1,4) - f_{xy}(-1,4)^2 = 10 \cdot 10 - 6^2 > 0$$

kar pomeni, da ima f v točki $T(-1,4)$ lokalni minimum.

Graf funkcije f je paraboloid s temenom v točki $(-1,4,-19)$.



(b) $\underline{f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y}$:

Velja $f_x = 3x^2 + 3y^2 - 15$ in $f_y = 6xy - 12$. Od tod dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 5, \\ xy &= 2. \end{aligned}$$

Če iz druge enačbe izrazimo $y = \frac{2}{x}$ in vstavimo v prvo enačbo, dobimo

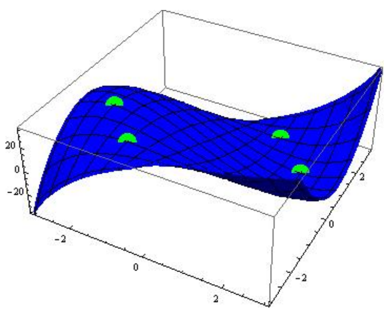
$$\begin{aligned} x^4 - 5x^2 + 4 &= 0, \\ (x^2-1)(x^2-4) &= 0. \end{aligned}$$

Funkcija f ima torej štiri stacionarne točke $T_1(1,2)$, $T_2(2,1)$, $T_3(-1,-2)$ in $T_4(-2,-1)$. Izračunajmo sedaj druge odvode: $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = 6y$ in $f_{yy} = 6x$. Sledi

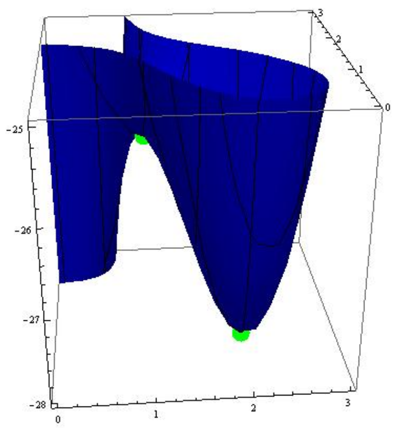
$$\begin{aligned} f_{xx}(1,2)f_{yy}(1,2) - f_{xy}(1,2)^2 &= 6 \cdot 6 - 12^2 < 0, \\ f_{xx}(2,1)f_{yy}(2,1) - f_{xy}(2,1)^2 &= 12 \cdot 12 - 6^2 > 0, \\ f_{xx}(-1,-2)f_{yy}(-1,-2) - f_{xy}(-1,-2)^2 &= (-6) \cdot (-6) - (-12)^2 < 0, \\ f_{xx}(-2,-1)f_{yy}(-2,-1) - f_{xy}(-2,-1)^2 &= (-12) \cdot (-12) - (-6)^2 > 0. \end{aligned}$$

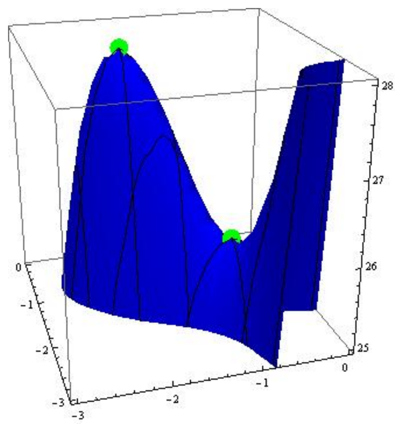
Od tod sklepamo, da ima f v točki $T_2(2,1)$ lokalni minimum, v točki $T_4(-2,-1)$ lokalni maksimum, v točkah $T_1(1,2)$ in $T_3(-1,-2)$ pa sedli.

Poglejmo si graf funkcije v okolici stacionarnih točk.



Če narišemo vse koordinatne osi v istem merilu, dobimo naslednji sliki





V točki T_2 je torej dno doline, v katero vodi prehod skozi sedlo v točki T_1. Podobno je v točki T_4 vrh hriba, s katerega se lahko spustimo do sedla v točki T_3. $\square$

(c) $\underline{f(x,y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y}$:

Sedaj je $f_x = -\frac{8}{x^2} + \frac{1}{y}$ in $f_y = -\frac{x}{y^2} + 1$. Dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} x^2 &= 8y, \\ y^2 &= x. \end{aligned}$$

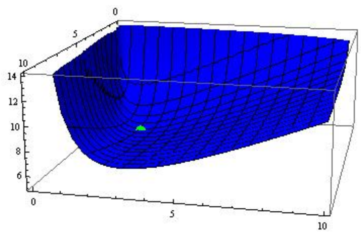
Sledi

$$\begin{aligned} y^4 &= 8y, \\ y(y^3 - 8) &= 0. \end{aligned}$$

Funkcija f ni definirana v točkah, kjer je $y = 0$, zato ima eno samo stacionarno točko $T(4,2)$. Drugi odvodi funkcije f so: $f_{xx} = \frac{16}{x^3}$, $f_{xy} = -\frac{1}{y^2}$ in $f_{yy} = \frac{2x}{y^3}$. Torej je

$$f_{xx}(4,2)f_{yy}(4,2) - f_{xy}(4,2)^2 = \frac{1}{4} \cdot 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 > 0,$$

od koder sledi, da ima f v točki T lokalni minimum. Poglejmo še graf funkcije f.



(4) Poišči globalne ekstreme danih funkcij:

(a) funkcije $f(x,y) = x^2 - 3xy + 4y^2 - 2y$ na trikotniku z oglišči $A(0,0)$, $B(2,0)$ in $C(0,2)$,

(b) funkcije $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ na kvadratu $A(-1,-1)$, $B(1,-1)$, $C(1,1)$ in $D(-1,1)$,

(c) funkcije $f(x,y) = x^3 + 2x^2 + xy + y - 1$ na liku, ki je omejen z abscisno osjo in s parabolo $y = 1 - x^2$.

Rešitev: Kandidati za globalne ekstreme odvedljive funkcije na ravninskem liku so:

· stacionarne točke v notranjosti lika,

· oglišča lika,

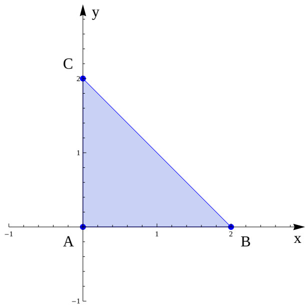
· stacionarne točke na robnih krivuljah.

Če želimo najti ekstreme, moramo torej najprej poiskati vse te točke, nato pa izračunati vrednosti funkcije v teh točkah. Največja in najmanjša izmed dobljenih vrednosti sta globalna ekstrema funkcije.

(a) Najprej poiščimo stacionarne točke funkcije $f(x,y) = x^2 - 3xy + 4y^2 - 2y$. Parcialna odvoda funkcije f sta $f_x = 2x - 3y$ in $f_y = -3x + 8y - 2$. Od tod dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 0, \\ -3x + 8y &= 2, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $x = 6/7$, $y = 4/7$. Stacionarna točka $T_1(6/7, 4/7)$ leži znotraj trikotnika ABC, zato jo moramo upoštevati.



Rob trikotnika sestoji iz treh daljic. Če zožimo funkcijo f na vsako izmed daljic, dobimo funkcijo ene spremenljivke.

Daljica AB: Na daljici AB je $y = 0$, spremenljivka x pa teče na intervalu $x \in [0, 2]$. Zožitev funkcije f na to daljico je funkcija $f(x, 0) = x^2$. Ker je $f'(x, 0) = 2x$, dobimo stacionarno točko $(0, 0)$, ki pa je hkrati oglišče trikotnika.

Daljica BC: Na daljici BC je $y = 2 - x$, spremenljivka x pa teče na intervalu $x \in [0, 2]$. Zožitev funkcije f na to daljico je funkcija

$$f(x, 2 - x) = x^2 - 3x(2 - x) + 4(2 - x)^2 - 2(2 - x) = 8x^2 - 20x + 12.$$

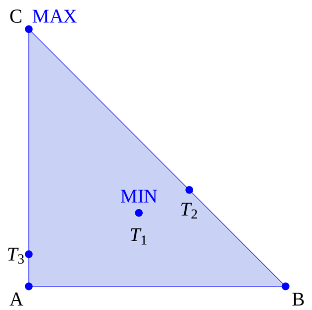
Njen odvod je $f'(x, 2 - x) = 16x - 20$, zato dobimo stacionarno točko $T_2(5/4, 3/4)$.

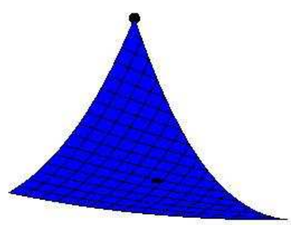
Daljica AC: Na daljici AC je $x = 0$, spremenljivka y pa teče na intervalu $y \in [0, 2]$. Zožitev funkcije f na to daljico je funkcija $f(0, y) = 4y^2 - 2y$. Iz $f'(0, y) = 8y - 2$ dobimo stacionarno točko $T_3(0, 1/4)$.

Kandidati za ekstreme so torej točke T_1, T_2, T_3 in oglišča A, B in C. Vrednosti funkcije f v teh točkah so:

$$\begin{aligned} f(T_1) &= -4/7, \\ f(T_2) &= -1/2, \\ f(T_3) &= -1/4, \\ f(A) &= 0, \\ f(B) &= 4, \\ f(C) &= 12. \end{aligned}$$

Maksimalna vrednost funkcije f na trikotniku ABC je 12 v točki C, minimalna vrednost pa je $-4/7$ v točki T_1. Grafe funkcij večih spremenljivk je težko risati, lahko pa si pomagamo z računalnikom. V našem primeru je graf funkcije f neka ploskev, ki ima za tloris trikotnik ABC.





(b) Parcialna odvoda funkcije $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ sta $f_x = -2x$ in $f_y = -2y$. To pomeni, da ima funkcija f stacionarno točko $T_1(0,0)$. Rob kvadrata tvorijo štiri daljice.

Daljica AB: Na daljici AB je $y = -1$, spremenljivka x pa teče na intervalu $x \in [-1,1]$. Zožitev funkcije f na to daljico je funkcija $f(x,-1) = 3 - x^2$. Ker je $f'(x,-1) = -2x$, dobimo stacionarno točko $T_2(0,-1)$.

Daljica BC: Na daljici BC je $x = 1$, spremenljivka y pa teče na intervalu $y \in [-1,1]$. Zožitev funkcije f na to daljico je funkcija $f(1,y) = 3 - y^2$. Iz odvoda $f'(1,y) = -2y$ dobimo stacionarno točko $T_3(1,0)$.

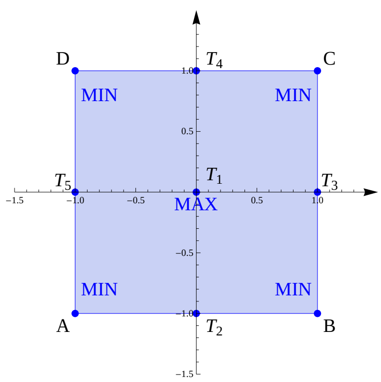
Daljica CD: Na daljici CD je $y = 1$, spremenljivka x pa teče na intervalu $x \in [-1,1]$. Zožitev funkcije f na to daljico je funkcija $f(x,1) = 3 - x^2$. Ker je $f'(x,1) = -2x$, dobimo stacionarno točko $T_4(0,1)$.

Daljica AD: Na daljici AD je $x = -1$, spremenljivka y pa teče na intervalu $y \in [-1,1]$. Zožitev funkcije f na to daljico je funkcija $f(-1,y) = 3 - y^2$. Ker je $f'(-1,y) = -2y$, je $T_5(-1,0)$ stacionarna točka.

Kandidati za ekstreme so oglišča kvadrata in stacionarne točke. Vrednosti funkcije f v teh točkah so:

$$
\begin{aligned}
f(T_1) &= 4,\\
f(T_2) &= 3,\\
f(T_3) &= 3,\\
f(T_4) &= 3,\\
f(T_5) &= 3,\\
f(A) &= 2,\\
f(B) &= 2,\\
f(C) &= 2,\\
f(D) &= 2.
\end{aligned}
$$

Maksimalna vrednost funkcije f na trikotniku $ABCD$ je 4 v točki T_1, minimalna vrednost pa je 2 v ogliščih kvadrata.



(c) Parcialna odvoda f sta $f_x = 3x^2 + 4x + y$ in $f_y = x + 1$. Od tod dobimo sistem enačb

$$
\begin{aligned}
3x^2 + 4x + y &= 0,\\
x + 1 &= 0,
\end{aligned}
$$

ki ima rešitev $x = -1$, $y = 1$. Stacionarna točka $(-1, 1)$ leži izven lika, zato je ni treba upoštevati. Rob lika sestoji iz daljice med točkama $A(-1, 0)$ in $B(1, 0)$ ter iz parabole $y = 1 - x^2$.

Daljica AB: Na daljici AB je $y = 0$, spremenljivka x pa teče na intervalu $x \in [-1, 1]$. Zožitev f na to daljico je funkcija $f(x, 0) = x^3 + 2x^2 - 1$. Iz $f'(x, 0) = 3x^2 + 4x = x(3x + 4)$ dobimo stacionarni točki $(0, 0)$ in $(-4/3, 0)$. Od teh samo točka $T_1(0, 0)$ leži v liku.

Parabola: Zožitev funkcije f na parabolo je funkcija

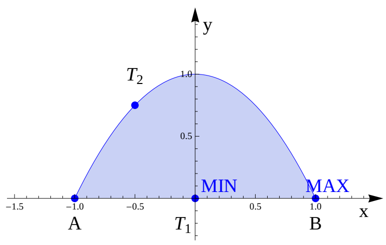
$$f(x, 1 - x^2) = x^3 + 2x^2 + x(1 - x^2) + 1 - x^2 - 1 = x^2 + x.$$

Ničla njenega odvoda $f'(x, 1 - x^2) = 2x + 1$ je točka $x = -1/2$, kar nam da stacionarno točko $T_2(-1/2, 3/4)$.

Kandidati za ekstreme so torej točki A in B ter točki T_1 in T_2. Vrednosti funkcije f v teh točkah so:

$$\begin{aligned} f(A) &= 0, \\ f(B) &= 2, \\ f(T_1) &= -1, \\ f(T_2) &= 3/4. \end{aligned}$$

Maksimalna vrednost funkcije f na danem liku je 2 v točki B, minimalna vrednost pa je -1 v točki T_1.



□