Matematika

Iskanje ekstremov funkcije ene spremenljivke

---

(1) Določi globalni maksimum in globalni minimum danih funkcij na danih intervalih:

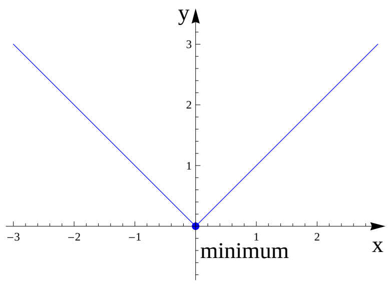
(a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ na intervalu $[-1, 3]$,

(b) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Rešitev: Vsaka zvezna funkcija f, ki je definirana na omejenem in zaprtem intervalu $[a, b]$, na tem intervalu doseže svojo minimalno in maksimalno vrednost. Če je funkcija f še odvedljiva, lahko ti dve vrednosti poiščemo s pomočjo odvoda. Kandidati za ekstremne vrednosti so naslednje točke z intervala $[a, b]$:

· stacionarne točke funkcije f v (a, b) (to so točke $x \in (a, b)$, za katere velja $f'(x) = 0$),
· robni točki intervala $[a, b]$,
· točke na intervalu $[a, b]$, v katerih funkcija f ni odvedljiva.

Pri večini funkcij, ki jih obravnavamo, prideta v poštev samo prvi dve možnosti. Primer funkcije, ki ni odvedljiva povsod, pa je funkcija $f(x) = |x|$, ki ni odvedljiva v točki $x = 0$.



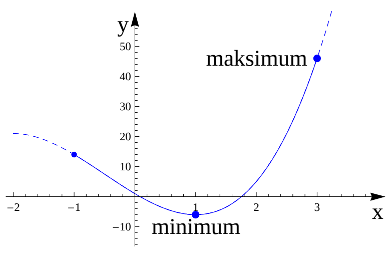
(a) Najprej izračunajmo odvod funkcije $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$. Velja

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x + 2)(x - 1).$$

Stacionarni točki sta torej $x = -2$ in $x = 1$. Znotraj intervala $[-1, 3]$ pa leži samo stacionarna točka $x = 1$. Polinomi so odvedljive funkcije, zato so kandidati za ekstreme funkcije f točke $\{-1, 1, 3\}$. Sedaj moramo izračunati vrednosti funkcije f v teh točkah, da najdemo ekstremni vrednosti. Iz vrednosti $f(-1) = 14$, $f(1) = -6$ in $f(3) = 46$ sklepamo, da je

$$\max(f) = 46 \text{ pri } x = 3,$$
$$\min(f) = -6 \text{ pri } x = 1.$$

Poglejmo še graf funkcije f.



(b) Odvod funkcije $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ je enak

$f'(x) = 4\sin^3 x\cos x - 4\cos^3 x\sin x = 4\sin x\cos x(\sin^2 x - \cos^2 x) = -2\sin 2x\cos 2x = -\sin 4x.$

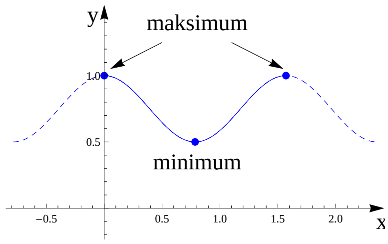
Stacionarne točke so rešitve enačbe $\sin 4x = 0$, oziroma točke

$$x = \frac{k\pi}{4}$$

za $k \in \mathbb{Z}$. V notranjosti intervala $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ leži samo stacionarna točka $x = \frac{\pi}{4}$. Funkcija f je odvedljiva, zato so kandidati za ekstreme funkcije f točke $\left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$. Vrednosti funkcije f v teh točkah so $f(0) = 1$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ in $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Sledi

$$\max(f) = 1 \text{ pri } x = 0 \text{ in } x = \frac{\pi}{2},$$
$$\min(f) = \frac{1}{2} \text{ pri } x = \frac{\pi}{4}.$$

Graf funkcije f je v tem primeru



□

(2) Določi globalni maksimum in globalni minimum danih funkcij na danih intervalih:

(a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ na intervalu $(0, \infty)$,

(b) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ na $\mathbb{R}$.

Rešitev: V tem primeru imamo funkciji, ki sta definirani na odprtih intervalih. V takšnih primerih funkcija ne doseže nujno maksimuma ali pa minimuma, saj lahko ima na primer v krajišču intervala pol, ali pa raste čez vse meje, ko gre x proti neskončnosti. Ko iščemo ekstreme takšnih funkcij, namesto vrednosti funkcije v krajiščih poiščemo njene limitne vrednosti v okolici krajišč intervala.

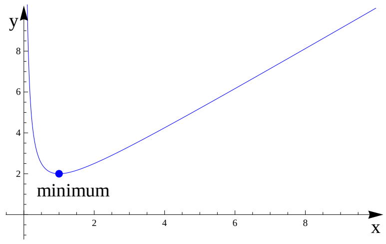
(a) Odvod funkcije f je enak

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2},$$

od koder sledi, da ima f stacionarni točki $x = \pm 1$. Za nas je zanimiva samo točka $x = 1$. Limitni vrednosti funkcije f sta

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \infty,$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Ker je $f(1) = 2$, je minimalna vrednost funkcije f na intervalu $(0, \infty)$ enaka 2, dosežena pa je pri $x = 1$. Maksimalna vrednost funkcije f na danem intervalu ne obstaja, saj je f navzgor neomejena.



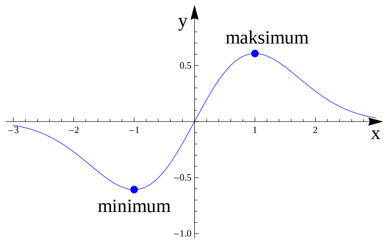
(b) Odvod funkcije f je v tem primeru

$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = (1 - x^2) e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Torej sta stacionarni točki $x = \pm 1$. Limitni vrednosti funkcije f pa sta

$$\lim_{x \to \pm\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} = 0.$$

Ker je $f(1) = e^{-1/2}$ in $f(-1) = -e^{-1/2}$, je maksimalna vrednost funkcije f na $\mathbb{R}$ enaka $e^{-1/2}$ pri $x = 1$, minimalna vrednost pa je $-e^{-1/2}$ pri $x = -1$.



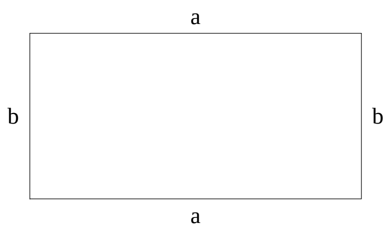
$\square$

(3) Med pravokotniki z obsegom o poišči tistega, ki ima največjo ploščino.

Rešitev: Označimo dolžini stranic pravokotnika z a in b. Potem velja

$$o = 2(a + b).$$

Če ima pravokotnik obseg o, sta torej njegovi stranici dolgi a in $b = \frac{o}{2} - a$.



Ploščino pravokotnika lahko izrazimo kot funkcijo dolžine stranice a, in sicer

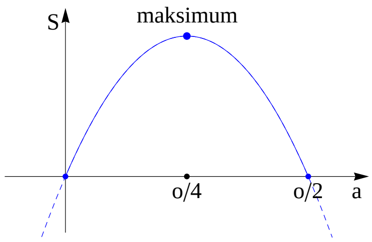
$$S(a) = ab = a\left(\frac{o}{2} - a\right).$$

Možne dolžine stranice a ležijo na intervalu $a \in \left[0, \frac{o}{2}\right]$ (robni točki ustrezata degeneriranima pravokotnikoma). Naša naloga je sedaj, da poiščemo maksimum funkcije S na intervalu $\left[0, \frac{o}{2}\right]$.

Odvod funkcije S je enak

$$S'(a) = \frac{o}{2} - 2a,$$

kar pomeni, da je $a = \frac{o}{4}$ stacionarna točka funkcije S. Funkcija S je kvadratna funkcija z negativnim vodilnim koeficientom, zato vemo, da bo v tej točki dosegla funkcija S svoj maksimum.



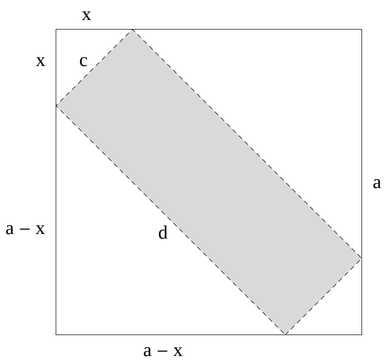
Med pravokotniki z danim obsegom o ima največjo ploščino kvadrat z dolžino stranice

$$a = b = \frac{o}{4},$$

njegova ploščina pa je enaka $S = \frac{o^2}{16}$. □

(4) V kvadrat s stranico a včrtamo pravokotnik, katerega stranice so vzporedne diagonalama kvadrata. Med vsemi takšnimi pravokotniki poišči tistega, ki ima največjo ploščino, in jo tudi izračunaj.

Rešitev: Najprej označimo dolžine odsekov na stranicah kvadrata, ki jih določajo stranice pravokotnika z x in $x - a$.



Z uporabo Pitagorovega izreka potem dobimo

$$c = \sqrt{2}x,$$
$$d = \sqrt{2}(a - x).$$

Ploščina včrtanega pravokotnika je odvisna od parametra x, in sicer

$$S(x) = cd = \sqrt{2}x\sqrt{2}(a - x) = 2(ax - x^2).$$

Možne dolžine parametra x ležijo na intervalu $x \in [0, a]$. Robni točki sicer ustrezata degeneriranima pravokotnikoma.

Iščemo torej maksimum funkcije S na intervalu $[0, a]$. Odvod funkcije S je enak

$$S'(x) = 2\left(a - 2x\right),$$

od koder dobimo, da je $x = \frac{a}{2}$ stacionarna točka funkcije S. Levo od stacionarne točke je odvod pozitiven, desno pa negativen, zato v tej točki funkcija S doseže svoj maksimum.

Med včrtanimi pravokotniki ima največjo ploščino kvadrat z dolžino stranice

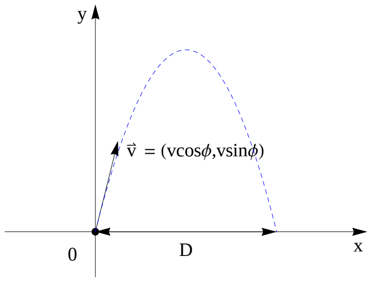
$$c = d = \frac{a}{2},$$

njegova ploščina pa je enaka $S = \frac{a^2}{2}$. $\square$

(5) S tal vržemo kamen s hitrostjo v in pod kotom ϕ glede na vodoravnico.

(a) Izračunaj domet kamna v odvisnosti od kota ϕ.
(b) Pri katerem kotu bo domet največji?

Rešitev: (a) Predmeti, ki letijo po zraku pod vplivom sile teže, se gibljejo pa parabolah.



Če vržemo kamen s tal pod kotom ϕ glede na vodoravnico in s hitrostjo v, se giblje po paraboli

$$y = -\frac{g}{2v^2\cos^2\phi}x^2 + \operatorname{tg}\phi\, x.$$

Zanima nas, kje kamen pade na tla. Tam bo $y = 0$, oziroma

$$-\frac{g}{2v^2\cos^2\phi}x^2 + \operatorname{tg}\phi\, x = 0,$$
$$x\left(\operatorname{tg}\phi - \frac{g}{2v^2\cos^2\phi}x\right) = 0.$$

Ta kvadratna enačba ima dve rešitvi: $x_1 = 0$ in eno strogo pozitivno, ki je enaka dometu

$$D = \frac{\operatorname{tg}\phi}{\frac{g}{2v^2\cos^2\phi}} = \frac{v^2}{g}2\cos\phi\sin\phi = \frac{v^2}{g}\sin 2\phi.$$

(b) Vidimo, da je domet odvisen od kota ϕ. Če hočemo izračunati, pri katerem kotu bo domet maksimalen, moramo poiskati maksimum funkcije D za $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$. Odvod funkcije D je enak

$$D'(\phi) = 2\frac{v^2}{g}\cos 2\phi,$$

kar pomeni, da je stacionarna točka $\phi = 45°$. Preverimo lahko, da je maksimalen domet dosežen pri tem kotu in da znaša

$$D_{\max} = \frac{v^2}{g}.$$

$\square$