Matematika

Limite in zveznost

---

(1) Za naslednje predpise določi maksimalna definicijska območja:

(a) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$,

(b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{5x - x^2}{4}\right)$,

(c) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$,

(d) $f(x) = \arcsin(x^2 - 1)$.

Rešitev: (a) Kvadratni koren je definiran samo za nenegativna števila, zato je

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 16 - x^2 \geq 0\}.$$

Rešitev te neenačbe je

$$\begin{aligned} 16 - x^2 &\geq 0, \\ x^2 - 16 &\leq 0, \\ (x-4)(x+4) &\leq 0. \end{aligned}$$

Rešitev te kvadratne neenačbe je interval $[-4, 4]$, od koder sledi

$$D_f = [-4, 4].$$

(b) Naravni logaritem je definiran za pozitivna števila, zato je

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{5x - x^2}{4} > 0\right\}.$$

Rešitev te neenačbe je

$$\begin{aligned} \frac{5x - x^2}{4} &> 0, \\ 5x - x^2 &> 0, \\ x(5 - x) &> 0. \end{aligned}$$

Od tod dobimo

$$D_f = (0, 5).$$

(c) Racionalna funkcija je definirana povsod, kjer je imenovalec neničeln. V našem primeru to pomeni, da je

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 \neq 0\right\}.$$

Enačba $x^2 - 4 = 0$ ima rešitvi

$$x_{1,2} = \pm 2,$$

zato je

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}.$$

(d) Funkcija arc sin je definirana na intervalu $[-1, 1]$. To pomeni, da je

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 1 \in [-1, 1]\}.$$

Definicijsko območje funkcije f je torej določeno z neenačbama

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &\geq -1, \\ x^2 - 1 &\leq 1. \end{aligned}$$

Prva neenačba je zmeraj izpolnjena, drugo pa poenostavimo v

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &\leq 1, \\ (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) &\leq 0. \end{aligned}$$

Od tod dobimo

$$D_f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$$

□

(2) Dani sta funkciji $f(x) = \frac{(1+x)^2-1}{x}$ in $g(x) = \frac{(1+x)^3-1}{x}$.

(a) Določi definicijski območji in območji zveznosti funkcij f in g.

(b) Ali je mogoče funkciji f in g zvezno razširiti na $\mathbb{R}$?

Rešitev: (a) Predpisa za funkciji f in g sta definirana na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ določata zvezni funkciji, saj sta definirana kot kvocienta dveh polinomov, pri čemer imenovalca nimata ničel na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Funkcijo f lahko zvezno razširimo na $\mathbb{R}$, če obstaja $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Računajmo

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^2 - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 + 2x + x^2) - 1}{x}, \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2x + x^2}{x} = \lim_{x\to 0} (2 + x), \\ &= 2. \end{aligned}$$

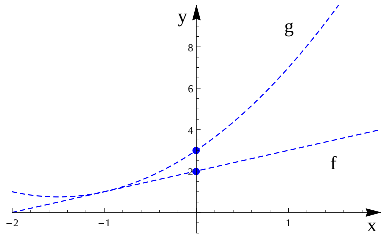
Če torej dodatno definiramo $f(0) = 2$, dobimo zvezno funkcijo na $\mathbb{R}$. Ta razširitev je v bistvu polinom $F(x) = x + 2$.

Izračunajmo še limito funkcije g:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} g(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^3 - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 + 3x + 3x^2 + x^3) - 1}{x}, \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{3x + 3x^2 + x^3}{x} = \lim_{x\to 0} \left(3 + 3x + x^2\right), \\ &= 3. \end{aligned}$$

Če definiramo $g(0) = 3$, se funkcija g razširi do polinoma $G(x) = x^2 + 3x + 3$.

Na sliki sta prikazana grafa razširitev funkcij f in g.



□

(3) Izračunaj limite funkcij:

(a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$,

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

Rešitev: Pri računanju limit funkcij veljajo podobna pravila kot pri računanju limit zaporedij, upoštevamo pa naslednji splošni navodili:

· Če je funkcija f zvezna v točki a, je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$,

· Če predpis za funkcijo f ni definiran v točki a, poskušamo najti tak predpis g, ki je definiran v a, in da za x blizu a $(x \neq a)$ velja $f(x) = g(x)$.

a) $$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x+2} = -2.$$

b) $$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) &= \lim_{x\to 1} \frac{1+x+x^2-3}{1-x^3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)} \\ &= -\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{1+x+x^2} = -1.\end{aligned}$$

c) $$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}.$$

d) $$\begin{aligned}\lim_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} &= \lim_{x\to 7} \frac{(2-\sqrt{x-3})(2+\sqrt{x-3})}{(x^2-49)(2+\sqrt{x-3})} = \lim_{x\to 7} \frac{4-(x-3)}{(x-7)(x+7)(2+\sqrt{x-3})} \\ &= -\lim_{x\to 7} \frac{1}{(x+7)(2+\sqrt{x-3})} = -\frac{1}{56}.\end{aligned}$$

□

(4) Izračunaj limite funkcij:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$,

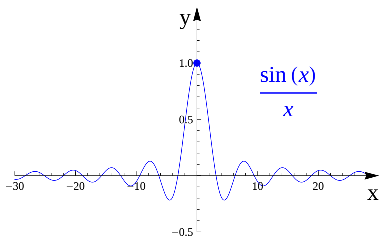
(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\sin(x-1)}$,

(c) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\operatorname{tg} \pi x}{x+2}$.

Rešitev: Pri računanju teh limit si bomo pomagali z limito

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Funkcija $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je definirana povsod razen v točki $x = 0$, kar pomeni, da je njen graf sestavljen iz dveh krivulj. Če dodatno definiramo $f(0) = 1$, se obe krivulji skleneta v eno samo krivuljo.



a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin 3x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin 5x}{5x} \cdot \dfrac{3x}{\sin 3x} \cdot \dfrac{5x}{3x} \right) = \dfrac{5}{3}$.

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\sin(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{\sin(x-1)} \overset{x-1=t}{=} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t(t+2)}{\sin t} = 2$.

c) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\operatorname{tg} \pi x}{x+2} \overset{x+2=t}{=} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} \pi(t-2)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} \pi t}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin \pi t}{\pi t} \cdot \dfrac{\pi}{\cos \pi t} = \pi$.

□

(5) Izračunaj limite funkcij:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x+3}{x+1} \right)^{x+2}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin 3x}{2x} \right)^{3}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/\sin^2 x}$.

Rešitev: Pri računanju limit oblike

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$$

uporabljamo naslednji formuli:

· Če je $\lim_{x\to a} f(x) = A$ in $\lim_{x\to a} g(x) = B$, kjer sta A in B pozitivni števili, je

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = A^B.$$

· Če je $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ in $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, je

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a}(f(x)-1)g(x)}.$$

(a) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{x+2} = \left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)\right)^{\lim_{x\to 0}(x+2)} = 3^2 = 9.$

(b) Najprej izračunajmo limito osnove

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Od tod sledi

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{2x}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}.$$

(c) V tem primeru je limita osnove enaka ena, eksponent pa konvergira proti neskončnosti. Zato je

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = e^1 = e.$$

(d) Tudi sedaj je limita osnove enaka ena, eksponent pa konvergira proti neskončnosti. Sledi

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/\sin^2 x} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{1-\cos^2 x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{(1-\cos x)(1+\cos x)}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{-1}{1+\cos x}} = e^{-1/2}.$$

□

(6) Izračunaj limite funkcij:

(a) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x+2}{\sqrt{x^4+3x^2+1}}$,

(b) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$,

(c) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\log_2\left(\frac{6x+4}{6x-5}\right)$.

Rešitev: (a) Limito bomo izračunali tako, da bomo števec in imenovalec delili z x^2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+2x+2}{\sqrt{x^4+3x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}}} = 3.$$

(b) Z delno racionalizacijo bomo razliko korenov pretvorili v vsoto korenov.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right) = \lim_{x\to\infty} & \frac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}, \\ & \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-(x^2-x)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}, \\ & \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}, \\ & \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}, \\ & = 1.\end{aligned}$$

(c) Sedaj bomo uporabili pravilo, ki pravi, da limite komutirajo z zveznimi funkcijami. To pomeni, da lahko korene, logaritme, sinuse itd. damo pred limito.

$$\lim_{x\to\infty} \log_2\left(\frac{6x+4}{6x-5}\right) = \log_2\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x+4}{6x-5}\right)\right) = \log_2\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6+\frac{4}{x}}{6-\frac{5}{x}}\right)\right) = \log_2 1 = 0.$$

$\square$

(7) Izračunaj linearne asimptote danih funkcij:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2+x+2}{x-1}$,

(b) $f(x) = \dfrac{x^3-x+1}{x^2+2}$,

(c) $f(x) = \sqrt{x^2+x}$.

Rešitev: Premica $y = kx+n$ je linearna asimptota funkcije f pri $x \to \infty$, če je

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - (kx+n)) = 0.$$

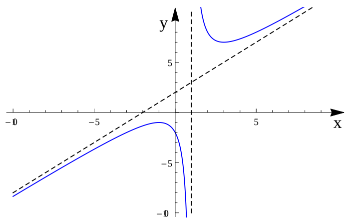
Analogno definiramo tudi asimptote pri $x \to -\infty$.
Če ima funkcija f linearno asimptoto, lahko koeficienta k in n izračunamo z limitama:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \\ n &= \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx). \end{aligned}$$

V primeru, ko je f racionalna funkcija, pa linearna asimptota ustreza kvocientu števca in imenovalca.
(a) Če zdelimo števec in imenovalec racionalne funkcije $f(x) = \frac{x^2+x+2}{x-1}$, dobimo

$$(x^2+x+2) : (x-1) = x+2 \quad \text{ostanek} = 4.$$

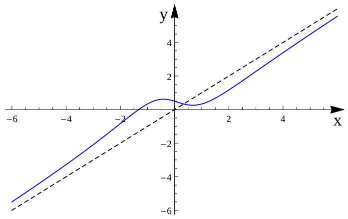
Asimptota funkcije f je torej premica $y = x+2$.



(b) Če zdelimo števec in imenovalec racionalne funkcije $f(x) = \frac{x^3-x+1}{x^2+2}$, dobimo

$$(x^3 - x + 1) : (x^2 + 2) = x \quad \text{ostanek} = -3x + 1.$$

Asimptota funkcije f je premica $y = x$.



(c) Najprej izračunajmo asimptoto, ko gre $x \to \infty$:

$$k_+ = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1,$$

$$n_+ = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sqrt{x^2+x}+x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{1}{2}.$$

Od tod sledi, da ima funkcija f pri $x \to \infty$ linearno asimptoto

$$y_+ = x + \frac{1}{2}.$$

Ko gre $x \to -\infty$, pa dobimo:

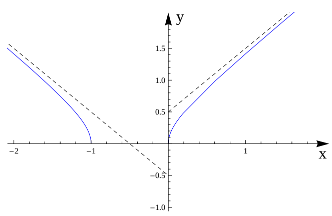
$$k_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x}} = -1,$$

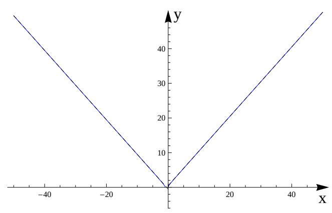
$$n_- = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+x} + x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+x}-x)}{(\sqrt{x^2+x}-x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x} = -\frac{1}{2},$$

kar pomeni, da je asimptota pri $x \to -\infty$ premica

$$y_- = -x - \frac{1}{2}.$$

Vidimo, da ima funkcija f dve različni linearni asimptoti.





□

(8) Podana je funkcija

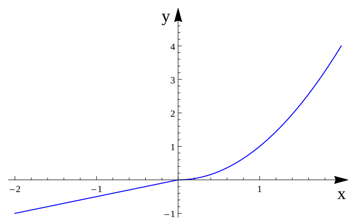
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \ x \geq 0, \\ \frac{1}{2}x + a & ; \ x < 0. \end{cases}$$

Določi število a tako, da bo funkcija f zvezna v točki $x = 0$ in nato skiciraj njen graf.

Rešitev: Funkcija f je definirana z dvema predpisoma, in sicer s predpisom $f_1(x) = \frac{1}{2}x + a$ za $x < 0$ in s predpisom $f(x) = x^2$ za $x \geq 0$. V točki $x = 0$ bo zvezna natanko takrat, ko bosta oba predpisa imela isto limito v tej točki. Limiti obeh predpisov sta:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} f_1(x) &= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2}x + a \right) = a, \\ \lim_{x \to 0} f_2(x) &= \lim_{x \to 0} x^2 = 0. \end{aligned}$$

Če hočemo, da bo f zvezna funkcija, mora biti $a = 0$. Graf funkcije f je zlepek premice in kvadratne parabole.



□

(9) Definirajmo funkciji

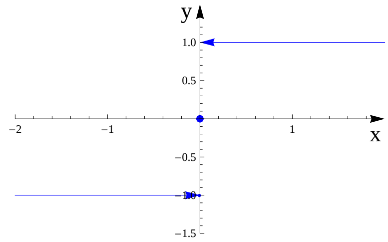
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & ; \ x \neq 0, \\ 0 & ; \ x = 0. \end{cases}$$

in $g(x) = x^3 - x$. Skiciraj grafe funkcij f, g, $f \circ g$ in $g \circ f$ ter obravnavaj njihovo zveznost.

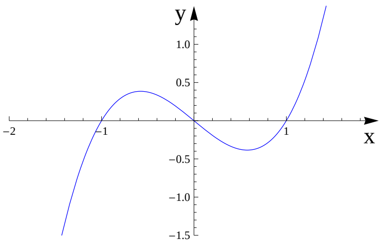
Rešitev: Funkcijo f lahko zapišemo tudi v obliki

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; \ x > 0, \\ 0 & ; \ x = 0, \\ -1 & ; \ x < 0. \end{cases}$$

Funkcija f je lokalno konstantna in zvezna povsod razen v točki $x = 0$.



Poglejmo še graf zvezne funkcije $g(x) = x^3 - x = x(x - 1)(x + 1)$.



Za kompozitum $g \circ f$ velja

$$g(f(x)) = \begin{cases} g(1) & ; \; x > 0, \\ g(0) & ; \; x = 0, \\ g(-1) & ; \; x < 0, \end{cases}$$

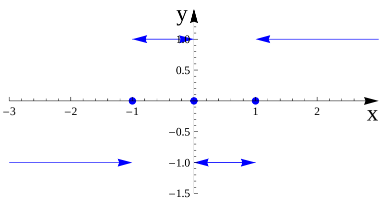
od koder sledi, da je $g(f(x)) = 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, kar pomeni, da je $g \circ f$ zvezna funkcija. Za funkcijo $f \circ g$ pa imamo

$$f(g(x)) = \begin{cases} 1 & ; \; g(x) > 0, \\ 0 & ; \; g(x) = 0, \\ -1 & ; \; g(x) < 0, \end{cases}$$

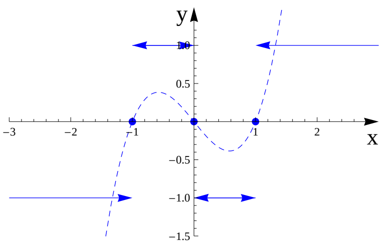
oziroma

$$f(g(x)) = \begin{cases} 1 & ; \; -1 < x < 0 \text{ ali } x > 1, \\ 0 & ; \; x \in \{-1, 0, 1\}, \\ -1 & ; \; x < -1 \text{ ali } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Funkcija $f \circ g$ je zvezna na $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.



Opomba: Za poljubno funkcijo h nam funkcija $f \circ h$ pove, kje je h pozitivna oziroma negativna, ničle funkcije $f \circ h$ pa ustrezajo ničlam funkcije h.



□

(10) S pomočjo metode bisekcije poišči ničli danih polinomov na eno decimalko natančno:

(a) $p(x) = x^3 + 3x - 1$,

(b) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 10x - 5$.

Rešitev: Poznamo metode, s pomočjo katerih lahko rešujemo polinomske, trigonometrične, eksponentne in druge enačbe. V kolikor te metode delujejo, lahko najdemo natančne rešitve enačb. Če točne rešitve ne znamo najti, pa lahko približno rešitev poiščemo z metodo bisekcije.

Pri metodi bisekcije uporabljamo naslednji algoritem:

· izberemo željeno natančnost,

· enačbo zapišemo v obliki $f(x) = 0$,

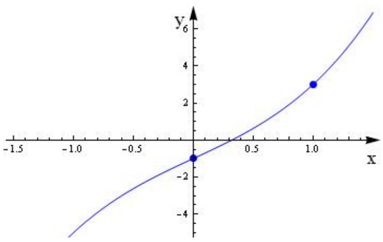
· izberemo začetni interval, ki vsebuje ničlo,

· na vsakem koraku razdelimo interval na dva dela in izberemo tistega, ki vsebuje ničlo,

· postopek ponavljamo, dokler ne dosežemo željene natančnosti.

Delovanje metode temelji na dejstvu, da je graf zvezne funkcije neprekinjen. Če ima torej funkcija v enem krajišču intervala negativno vrednost, v drugem pa pozitivno vrednost, mora imeti nekje na intervalu ničlo.

(a) Najprej poiščimo ničlo polinoma $p(x) = x^3 + 3x - 1$. Če pogledamo graf polinoma p, vidimo, da je $p(0) = -1$ in $p(1) = 3$, od koder sledi, da je nekje na intervalu $[0, 1]$ ničla polinoma p.



Začeli bomo torej z intervalom $[0, 1]$. Sedaj bomo postopoma ta interval razpolavljali (v okviru naše natančnosti), dokler ne bomo dobili dovolj majhnega intervala, ki vsebuje ničlo.

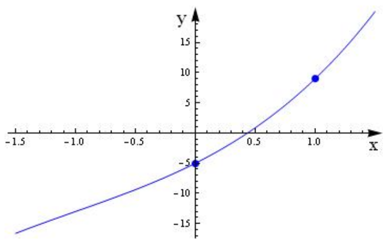
· $p(0.5) = 0.625,$ zato bo ničla na intervalu $[0, 0.5]$,

· $p(0.3) = -0.073,$ zato bo ničla na intervalu $[0.3, 0.5]$,

· $p(0.4) = 0.264,$ zato bo ničla na intervalu $[0.3, 0.4]$.

Velja še $p(0.35) = 0.09$, zato je približek za ničlo polinoma p število $x = 0.3$. Če bi hoteli dobiti bolj natančen približek, bi morali izvesti še nekaj korakov bisekcije. Boljši približek je $x = 0.3222$.

(b) Sedaj iščemo ničlo polinoma $p(x) = x^3 + 3x^2 + 10x - 5$.



Začeli bomo z intervalom $[0, 1]$. Velja $p(0) = -5$ in $p(1) = 9$. Nadalje je

- $p(0.5) = 0.875$, zato bo ničla na intervalu $[0, 0.5]$,
- $p(0.3) = -1.703$, zato bo ničla na intervalu $[0.3, 0.5]$,
- $p(0.4) = -0.456$, zato bo ničla na intervalu $[0.4, 0.5]$.

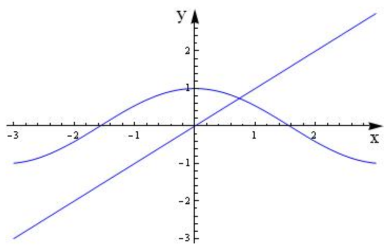
Ker je $p(0.45) = 0.199$, lahko vzamemo približek za ničlo $x = 0.4$. Boljši približek za ničlo je $x = 0.4350$. □

(11) S pomočjo metode bisekcije reši dani enačbi na eno decimalko natančno:

(a) $\cos x = x$,

(b) $e^x = x^2$.

Rešitev: (a) Poskusimo sedaj rešiti enačbo $\cos x = x$. Z grafa je razvidno, da bo rešitev nekje na intervalu $[0, 1]$.

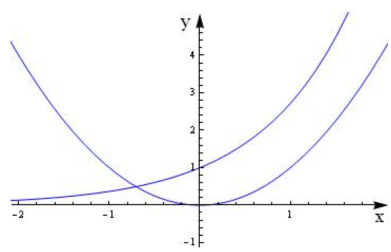


Da bi lahko uporabili metodo bisekcije, enačbo najprej prepišimo v obliko $x - \cos x = 0$ in definirajmo funkcijo $f(x) = x - \cos x$. Velja $f(0) = -1$ in $f(1) = 0.46$, zato bomo začeli z intervalom $[0, 1]$.

- $f(0.5) = -0.37$, zato bo ničla na intervalu $[0.5, 1]$,
- $f(0.7) = -0.064$, zato bo ničla na intervalu $[0.7, 1]$,
- $f(0.8) = 0.103$, zato bo ničla na intervalu $[0.7, 0.8]$.

Ker je $f(0.75) = 0.018$, bomo za približek za ničlo vzeli $x = 0.7$. Bolj natančen približek za ničlo je $x = 0.7391$.

(b) Sedaj rešujemo enačbo $e^x = x^2$. Z grafa je razvidno, da bo rešitev na intervalu $[-1, 0]$.



Definirajmo funkcijo $f(x) = e^x - x^2$. Potem je $f(0) = 1$ in $f(-1) = -0.632$, zato bomo začeli z intervalom $[-1, 0]$.

- $f(-0.5) = 0.356$, zato bo ničla na intervalu $[-1, -0.5]$,
- $f(-0.7) = 0.006$, zato bo ničla na intervalu $[-1, -0.7]$,
- $f(-0.8) = -0.190$, zato bo ničla na intervalu $[-0.8, -0.7]$.

Ker je $f(-0.75) = -0.09$, je približek za ničlo $x = -0.7$. Boljši približek je $x = -0.7035$.

□