Matematika

Nedoločeni integral

---

(1) Izračunaj integrale s pomočjo tabele elementarnih integralov:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x-4}{x}\,dx$,

(b) $\displaystyle\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\,dx$,

(c) $\displaystyle\int (2\sin x + 3\cos x + e^x)\,dx$,

(d) $\displaystyle\int 5^x 3^{-x}\,dx$,

(e) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx$.

Rešitev:

(a) $$\int \frac{x^3+2x-4}{x}\,dx = \int \left(x^2+2-\frac{4}{x}\right)dx = \underline{\underline{\frac{x^3}{3}+2x-4\ln|x|+C}}.$$

(b) $$\int \left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)\,dx = \int \left(x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}+x-\sqrt{x}+1\right)\,dx = \underline{\underline{\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+x+C}}.$$

(c) $$\int (2\sin x+3\cos x+e^x)\,dx = \underline{\underline{-2\cos x+3\sin x+e^x+C}}.$$

(d) $$\int 5^x 3^{-x}\,dx = \int \left(\frac{5}{3}\right)^x dx = \underline{\underline{\frac{1}{\ln\frac{5}{3}}\left(\frac{5}{3}\right)^x+C}}.$$

(e) $$\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-2}{x^2+1}\,dx = \int \left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)dx = \underline{\underline{x-2\operatorname{arc\,tg} x+C}}.$$

□

(2) Izračunaj integrale s pomočjo substitucije:

(a) $\displaystyle\int (5-2x)^9\,dx$,

(b) $\displaystyle\int \sin(5x)\,dx$,

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+9}$,

(d) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx$,

(e) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx$.

Rešitev:

(a) $\displaystyle\int (5-2x)^9\,dx$:

Vzemimo novo spremenljivko $t = 5-2x$. Sledi $dt = -2dx$ in

$$\int (5-2x)^9\,dx = -\frac{1}{2}\int t^9\,dt = -\frac{1}{20}t^{10} + C = \underline{\underline{-\frac{1}{20}(5-2x)^{10} + C}}.$$

(b) $\displaystyle\int \sin(5x)\,dx$:

Sedaj naj bo $t = 5x$. Sledi $dt = 5dx$ in

$$\int \sin(5x)\,dx = \frac{1}{5}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{5}\cos t + C = \underline{\underline{-\frac{1}{5}\cos(5x) + C}}.$$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+9}$:

Vzemimo novo spremenljivko $t = \frac{x}{3}$. Potem je $dt = \frac{dx}{3}$ in

$$\int \frac{1}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \underline{\underline{\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3} + C}}.$$

<u>Opomba</u>: Na podoben način lahko izračunamo, da za vsak $a > 0$ velja

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C.$$

(d) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx$:

Poskusimo z novo spremenljivko $t = 2+\sin x$. Potem je $dt = \cos x\,dx$ in

$$\int \frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \underline{\underline{\ln|2+\sin x| + C}}.$$

<u>Opomba</u>: Včasih integriramo funkcije oblike $f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$, kjer je g neka funkcija. V takih primerih uvedemo novo spremenljivko $u = g(x)$ (sledi $du = g'(x)dx$), da dobimo

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|g(x)| + C.$$

(e) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx$:

Uvedimo novo spremenljivko $t = x^2+4$. Sledi $dt = 2x\,dx$ in

$$\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \underline{\underline{\ln|x^2+4| + C}}.$$

$\square$

(3) Izračunaj integrale s pomočjo integracije po delih:

(a) $\displaystyle\int x\cos x\,dx$,

(b) $\displaystyle\int x^2\ln x\,dx$,

(c) $\displaystyle\int x^2 e^{-x}\,dx$,

(d) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx$.

Rešitev: Pri integraciji po delih si pomagamo s formulo

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Ponavadi se pri izbiri u in dv ravnamo po načelu:

· $u\ldots$ funkcija, ki se pri odvajanju poenostavi,
· $dv\ldots$ izraz, ki ga znamo integrirati.

(a) $\displaystyle\int x\cos x\,dx$:

Vzemimo $u = x$ in $dv = \cos x\,dx$. Sledi $du = dx$, $v = \sin x$ in

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = \underline{\underline{x\sin x + \cos x + C}}.$$

(b) $\displaystyle\int x^2\ln x\,dx$:

Naj bo $u = \ln x$ in $dv = x^2\,dx$. Sledi $du = \frac{dx}{x}$ in $v = \frac{x^3}{3}$. Tako dobimo

$$\int x^2\ln x\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3x}\,dx = \underline{\underline{\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C}}.$$

(c) $\displaystyle\int x^2 e^{-x}\,dx$:

Pri tem integralu bomo funkcijo e^{-x} dvakrat integrirali, monoma pa dvakrat odvajali.

$$\int x^2e^{-x}\,dx = -x^2e^{-x} - \int 2x(-e^{-x})\,dx = -x^2e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} - \int(-e^{-x})\,dx\right),$$
$$= \underline{\underline{(-x^2 - 2x - 2)e^{-x} + C}}.$$

<u>Opomba</u>: Na podoben način lahko izračunamo integrale oblike

$$\int p(x)e^{kx}\,dx,$$

kjer je p poljuben polinom in k poljubno realno število.

(d) $\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx$:

Funkcijo $\operatorname{arc\,tg} x$ bomo odvajali, izraz dx pa integrirali. V dobljenem integralu bomo nato uvedli novo spremenljivko $t = x^2 + 1$. Sledi

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx &= x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x}{x^2+1} \, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t}, \\ &= \underline{\underline{x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \ln |x^2+1| + C}}.\end{aligned}$$

□

(4) Izračunaj integrale racionalnih funkcij:

(a) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+x} \, dx,$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2-2x-5}{(x^2-1)(x+2)} \, dx,$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+10}{(x+1)(x^2+9)} \, dx.$

Rešitev: Za integracijo racionalnih funkcij imamo na razpolago postopek, ki nas vedno (z več ali manj truda) pripelje do rezultata. Pogledali si bomo, kako se integrira racionalne funkcije, pri katerih ima imenovalec višjo stopnjo kot števec in pri katerih vsak faktor v imenovalcu nastopa samo enkrat. Praviloma integriramo racionalne funkcije s pomočjo razcepa na parcialne ulomke:

- Imenovalec razcepimo na produkt linearnih in nerazcepnih kvadratnih faktorjev.
- Funkcijo zapišemo kot vsoto parcialnih ulomkov s pomočjo nastavkov:
  - $\frac{1}{x-a} \rightsquigarrow \frac{A}{x-a}$,
  - $\frac{1}{x^2+bx+c} \rightsquigarrow \frac{B+Cx}{x^2+bx+c}$.
- Integriramo vsak parcialni ulomek posebej.

(a) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+x} \, dx$:

Najprej bomo razcepili racionalno funkcijo na parcialne ulomke

$$\frac{x-1}{x^2+x} = \frac{x-1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)} = \frac{x(A+B)+A}{x(x+1)}.$$

S primerjavo koeficientov polinomov v števcu pridemo do sistema dveh enačb za dve neznanki:

$$\begin{aligned} A + B &= 1, \\ A &= -1, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = -1$, $B = 2$. Tako dobimo

$$\int \frac{x-1}{x^2+x}\,dx = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1}\right)\,dx = \underline{\underline{-\ln|x| + 2\ln|x+1| + C}}.$$

(b) $\int \frac{x^2-2x-5}{(x^2-1)(x+2)}\,dx$:

Najprej bomo razcepili racionalno funkcijo na parcialne ulomke:

$$\begin{aligned}\frac{x^2-2x-5}{(x^2-1)(x+2)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x^2+3x+2) + B(x^2+x-2) + C(x^2-1)}{(x^2-1)(x+2)},\\ &= \frac{x^2(A+B+C) + x(3A+B) + 2A - 2B - C}{(x^2-1)(x+2)}.\end{aligned}$$

S primerjavo koeficientov polinomov v števcu pridemo do sistema treh enačb za tri neznanke:

$$\begin{aligned} A + B + C &= 1,\\ 3A + B &= -2,\\ 2A - 2B - C &= -5,\end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = -1$, $B = 1$ in $C = 1$. Tako dobimo

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-2x-5}{(x^2-1)(x+2)}\,dx &= \int \left(-\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}\right)\,dx,\\ &= \underline{\underline{-\ln|x-1| + \ln|x+1| + \ln|x+2| + C}}.\end{aligned}$$

(c) $\int \frac{x^2+x+10}{(x+1)(x^2+9)}\,dx$:

Sedaj bomo vzeli nastavek

$$\begin{aligned}\frac{x^2+x+10}{(x+1)(x^2+9)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B+Cx}{x^2+9} = \frac{A(x^2+9) + (B+Cx)(x+1)}{(x+1)(x^2+9)},\\ &= \frac{x^2(A+C) + x(B+C) + (9A+B)}{(x+1)(x^2+9)}.\end{aligned}$$

Tukaj dobimo sistem treh enačb za tri neznanke:

$$\begin{aligned} A + C &= 1,\\ B + C &= 1,\\ 9A + B &= 10,\end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = 1$, $B = 1$, $C = 0$. Sledi

$$\int \frac{x^2+x+10}{(x+1)(x^2+9)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+9}\right)\,dx = \underline{\underline{\ln|x+1| + \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3} + C}}.$$

$\square$

(5) Izračunaj integrale trigonometričnih funkcij:

(a) $\displaystyle\int \sin x \cos^3 x \, dx$,

(b) $\displaystyle\int \sin x \cos x \, dx$,

(c) $\displaystyle\int \sin^2 x \, dx$,

(d) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$.

Rešitev: Produkt potenc sinusne in kosinusne funkcije integriramo z uvedbo ustrezne nove spremenljivke po naslednjem pravilu:

· če sta obe potenci lihi, vzamemo funkcijo z višjo potenco za novo spremenljivko,

· če je ena funkcija na sodo druga pa na liho potenco, vzamemo funkcijo, ki je na sodo potenco za novo spremenljivko,

· če sta obe potenci sodi, najprej zmanjšamo red z uporabo adicijskih izrekov

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

in nato nadaljujejo po istem postopku, dokler kakšna potenca ni liha.

(a) $\displaystyle\int \sin x \cos^3 x \, dx$:

Vzemimo novo spremenljivko $t = \cos x$. Potem je $dt = -\sin x \, dx$ in

$$\int \sin x \cos^3 x \, dx = -\int t^3 \, dt = -\frac{t^4}{4} + C = \underline{\underline{-\frac{\cos^4 x}{4} + C}}.$$

(b) $\displaystyle\int \sin x \cos x \, dx$:

Sedaj vzemimo $t = \sin x$. Potem je $dt = \cos x \, dx$ in

$$\int \sin x \cos x \, dx = \int t \, dt = \frac{t^2}{2} + C = \underline{\underline{\frac{\sin^2 x}{2} + C}}.$$

(c) $\displaystyle\int \sin^2 x \, dx$:

V tem primeru sta obe potenci sodi, zato bomo uporabili adicijski izrek. Tako dobimo

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx.$$

Preostali integral lahko izračunamo z uvedbo nove spremenljivke $t = 2x$. Sledi

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \underline{\underline{\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C}}.$$

(d) $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$:

Najprej bomo uporabili adicijska izreka, da znižamo potenco integranda

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1 - \cos^2 2x}{4} = \frac{\sin^2 2x}{4}.$$

Sedaj lahko vzamemo novo spremenljivko $t = 2x$ in uporabimo rezultat od prejšnje naloge, da dobimo

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \int \frac{\sin^2 2x}{4} \, dx = \int \frac{\sin^2 t}{8} \, dt = \frac{1}{8} \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right) + C = \underline{\underline{\frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C}}.$$

□

(6) Izračunaj integrala eksponentnih funkcij:

(a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x + 1} \, dx,$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} \, dx.$

Rešitev: Eksponentne funkcije integriramo s pomočjo substitucije

$$e^x = t \Longrightarrow dx = \frac{dt}{t},$$

ki nam problem prevede na integriranje racionalnih funkcij.

(a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x + 1} \, dx$:

Z uvedbo substitucije $t = e^x$ dobimo

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} \, dx = \int \frac{t}{t + 1} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{dt}{t + 1} = \ln |t + 1| + C = \underline{\underline{\ln |e^x + 1| + C}}.$$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} \, dx$:

Sedaj imamo

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} \, dx = \int \frac{1}{t + t^{-1}} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \operatorname{arc\,tg} t + C = \underline{\underline{\operatorname{arc\,tg}(e^x) + C}}.$$

□