Matematika

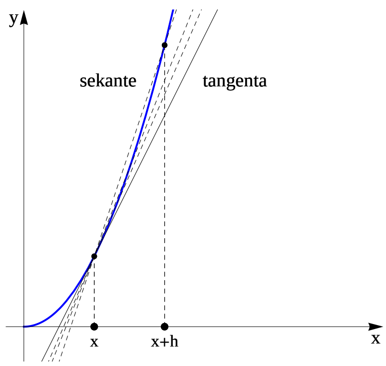
Računanje odvoda in geometrijski pomen odvoda

(1) Dana je funkcija $f(x) = x^2$. Izračunaj limito $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Rešitev: Računajmo

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}, \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h), \\
&= 2x.
\end{aligned}$$

Izraz $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ predstavlja naklon sekante na graf funkcije f, ki gre skozi točki na grafu, ki ustrezata abscisama x in $x+h$. Če h manjšamo, bosta točki na grafu čedalje bliže, zato se sekante približujejo tangenti na graf funkcije f v točki z absciso x. Naklon tangente v tej točki je enak limiti naklonov sekant.



□

(2) Izračunaj odvode funkcij:

(a) $h(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$,
(b) $h(x) = 3\cos x + 2\sin x$,
(c) $h(x) = 2e^x - \ln x$,
(d) $h(x) = 2\operatorname{arc\,tg} x + \arcsin x$.

Rešitev: Odvodov praviloma ne računamo po definiciji, pač pa si pomagamo s tabelo odvodov in pa s pravili za odvod vsote, produkta, kvocienta in kompozituma funkcij. Pri tej nalogi bomo uporabili pravili za odvod vsote in odvod večkratnika:

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x), \\
(c \cdot f)'(x) &= cf'(x).
\end{aligned}$$

(a) $$\begin{aligned} h(x) &= 3x^3 + 2x^2 + x + 1, \\ h'(x) &= 9x^2 + 4x + 1. \end{aligned}$$

(b) $h(x) = 3\cos x + 2\sin x,$
$$h'(x) = -3\sin x + 2\cos x.$$

(c) $h(x) = 2e^x - \ln x,$
$$h'(x) = 2e^x - \frac{1}{x}.$$

(d) $h(x) = 2\operatorname{arc\,tg} x + \arcsin x,$
$$h'(x) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$\square$

(3) Izračunaj odvode funkcij:

(a) $h(x) = x\ln x,$
(b) $h(x) = (x^2-2)\sqrt{x},$
(c) $h(x) = 2^x\cos x,$
(d) $h(x) = \sin x\cos x.$

Rešitev: Pri tej nalogi bomo uporabili pravilo za odvod produkta funkcij
$$(f\cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

(a) $h(x) = x\ln x,$
$$h'(x) = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

(b) $h(x) = (x^2-2)\sqrt{x},$
$$h'(x) = 2x\cdot\sqrt{x} + (x^2-2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}.$$

(c) $h(x) = 2^x\cos x,$
$$h'(x) = \ln 2\cdot 2^x\cos x + 2^x\cdot(-\sin x) = \ln 2\cdot 2^x\cos x - 2^x\sin x.$$

(d) $h(x) = \sin x\cos x,$
$$h'(x) = \cos x\cdot\cos x + \sin x\cdot(-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x.$$

$\square$

(4) Izračunaj odvode funkcij:

(a) $h(x) = \dfrac{x-1}{x+1},$
(b) $h(x) = \dfrac{x}{1-x^2},$
(c) $h(x) = \dfrac{\sin x - 2}{\cos x + 2},$
(d) $h(x) = \operatorname{tg} x.$

Rešitev: Pri tej nalogi si bomo pomagali s pravilom za odvod kvocienta funkcij

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2},$$

ki velja za poljubno odvedljivo funkcijo f in za poljubno neničelno odvedljivo funkcijo g.

(a)
$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x-1}{x+1}, \\ h'(x) &= \frac{1\cdot(x+1)-(x-1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x}{1-x^2}, \\ h'(x) &= \frac{1\cdot(1-x^2)-x\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}. \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{\sin x - 2}{\cos x + 2}, \\ h'(x) &= \frac{\cos x\cdot(\cos x+2)-(\sin x-2)\cdot(-\sin x)}{(\cos x+2)^2} = \frac{\cos^2 x + 2\cos x + \sin^2 x - 2\sin x}{(\cos x+2)^2}, \\ &= \frac{1+2\cos x - 2\sin x}{(\cos x+2)^2}. \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} h(x) &= \operatorname{tg} x, \\ h'(x) &= \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

$\square$

(5) Izračunaj odvode funkcij:

(a) $h(x) = (x+3)^3$,
(b) $h(x) = (2+3\ln x)^5$,
(c) $h(x) = \ln(2x+3)$,
(d) $h(x) = e^{-x^2}$,
(e) $h(x) = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$.

Rešitev: Pri tej nalogi se bomo naučili, kako se odvaja sestavljene funkcije. Pri tem uporabljamo verižno pravilo

$$(f(y(x)))' = f'(y(x))\cdot y'(x).$$

Krajše lahko to zapišemo v obliki $(f\circ y)' = f'(y)\cdot y'$. Funkciji f in y poskušamo izbrati tako, da znamo vsako posebej odvajati s pomočjo tabele ali pa ostalih pravil.

(a) Vzemimo $y = x+3$. Potem lahko zapišemo $h(x) = y^3$, $y' = 1$ in

$h'(x) = (y^3)' = 3y^2 \cdot y' = 3(x+3)^2$.

(b) Definirajmo $y = 2 + 3\ln x$. Potem sledi $h(x) = y^5$, $y' = \frac{3}{x}$ in

$$h'(x) = (y^5)' = 5y^4 \cdot y' = 5(2+3\ln x)^4 \cdot \frac{3}{x} = \frac{15(2+3\ln x)^4}{x}.$$

(c) Vzemimo $y = 2x+3$. Potem je $h(x) = \ln y$, $y' = 2$ in

$$h'(x) = (\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{2}{2x+3}.$$

(d) Tokrat naj bo $y = -x^2$. Sledi $h(x) = e^y$, $y' = -2x$ in

$h'(x) = (e^y)' = e^y \cdot y' = -2x\, e^{-x^2}$.

(e) Sedaj vzemimo $y = \frac{1}{x}$. Sledi $h(x) = \operatorname{arc\,tg} y$, $y' = -\frac{1}{x^2}$ in

$$h'(x) = (\operatorname{arc\,tg} y)' = \frac{1}{1+y^2} \cdot y' = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

□

(6) Izračunaj odvode funkcij:

(a) $h(x) = e^{5x} \sin 4x$,
(b) $h(x) = x^2 e^{-x}$,
(c) $h(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$,
(d) $h(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$.

Rešitev: Za izračun teh odvodov bomo uporabili kombinacijo doslej omenjenih pravil.

(a) $h(x) = e^{5x} \sin 4x$,
$$h'(x) = 5e^{5x} \cdot \sin 4x + e^{5x} \cdot (4\cos 4x) = 5e^{5x} \sin 4x + 4e^{5x} \cos 4x.$$

(b) $h(x) = x^2 e^{-x}$,
$$h'(x) = (x^2)' \cdot e^{-x} + x^2 \cdot (e^{-x})' = 2xe^{-x} + x^2(-e^{-x}) = (2x - x^2)e^{-x}.$$

(c) $h(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$,
$$h'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x}} \cdot \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2},$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x(x+1)^3}}.$$

(d) $h(x) = x \sin \frac{1}{x}$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= (x)' \cdot \sin(1/x) + x \cdot (\sin(1/x))', \\ &= \sin(1/x) + x \cdot \left(\cos(1/x) \cdot \frac{-1}{x^2}\right), \\ &= \sin(1/x) - \frac{\cos(1/x)}{x}. \end{aligned}$$

□

(7) Dana je krivulja $y = x^2$.

(a) Poišči tangento in normalo na dano krivuljo v točki z absciso $x = 1$.

(b) Poišči točko na krivulji, v kateri je normala na krivuljo vzporedna premici $y = x + 2$.

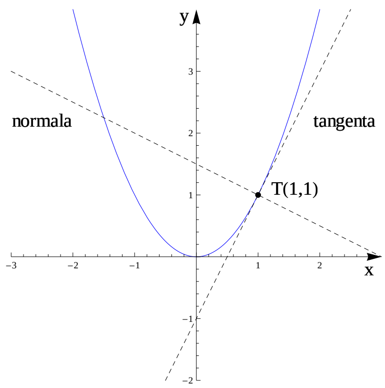
Rešitev: (a) Spomnimo se, da lahko premico, ki ima smerni koeficient k in gre skozi točko $T(x_0, y_0)$, podamo z enačbo

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

V primeru, ko iščemo tangento na krivuljo $y = f(x)$, se lahko spomnemo na geometrijski pomen odvoda, da izpeljemo, da je

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

enačba tangente na dano krivuljo v točki $(x_0, f(x_0))$.



V našem primeru je $y'(x) = 2x$, točka na krivulji pa $T(1, 1)$. Smerni koeficient tangente v tej točki je $k_t = y'(1) = 2$, enačba tangente skozi to točko pa

$$y = 2x - 1.$$

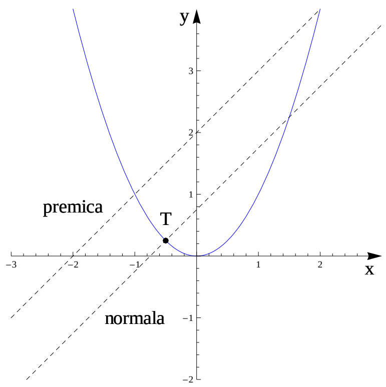
Normala na krivuljo je pravokotna na tangento, kar pomeni, da je $k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{2}$. Od tod dobimo enačbo normale

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}.$$

(b) Premici v ravnini sta vzporedni, če imata isti smerni koeficient. Iščemo torej tak x_0, da bo $-\frac{1}{y'(x_0)} = 1$, oziroma

$$-\frac{1}{2x_0} = 1.$$

Sledi $x_0 = -\frac{1}{2}$, iskana točka pa je $T\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.



□

(8) Poišči tangento na krivuljo $y = x^2 + 3x - 4$, ki je vzporedna premici $y = 3x - 1$.

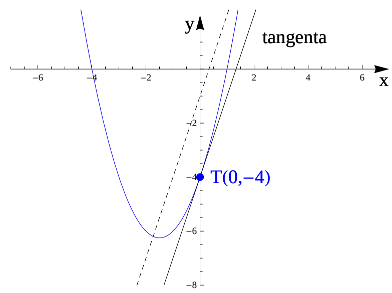
Rešitev: Odvod funkcije $f(x) = x^2 + 3x - 4$ je enak $f'(x) = 2x + 3$. Ker sta dve premici vzporedni natanko takrat, ko imata isti naklon, iščemo tak x, da bo veljalo $f'(x) = 3$. Tako dobimo enačbo

$$2x + 3 = 3,$$

ki ima rešitev $x = 0$. Iskana tangenta se torej dotika parabole v točki $(0, -4)$, njena enačba pa je

$$y = 3x - 4.$$

Poglejmo še skico.



□

(9) Dana je kvadratna funkcija $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

(a) Poišči tangento na graf funkcije v točki z absciso $x = 0$.

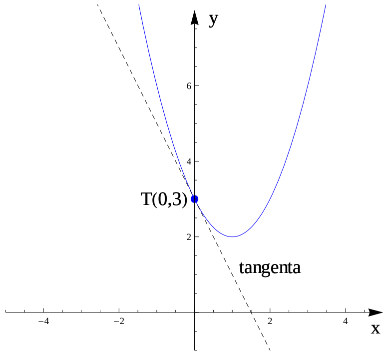
(b) Poišči tangenti na krivuljo, ki potekata skozi točko $T(2, 2)$.

Rešitev: (a) Enačba tangente na graf funkcije f v točki $(x_0, f(x_0))$ je

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Odvod funkcije f je $f'(x) = 2x - 2$, točka na grafu pa $T(0, 3)$. Od tod dobimo enačbo tangente

$$y = -2x + 3.$$



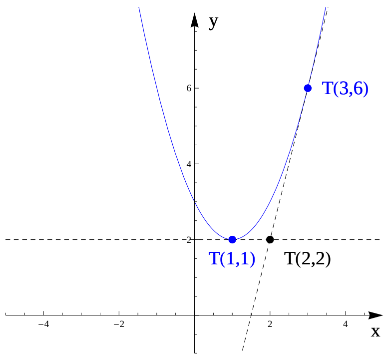
(b) Spet bomo uporabili formulo za enačbo tangente $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, le da bomo upoštevali, da je tokrat dana točka na tangenti, iščemo pa točke na grafu. Ker gre tangenta skozi točko $T(2, 2)$, bomo vzeli, da je $x = y = 2$. Od tod dobimo

$$
\begin{aligned}
2 &= f'(x_0)(2 - x_0) + f(x_0), \\
2 &= (2x_0 - 2)(2 - x_0) + x_0^2 - 2x_0 + 3, \\
2 &= -2x_0^2 + 6x_0 - 4 + x_0^2 - 2x_0 + 3, \\
0 &= x_0^2 - 4x_0 + 3.
\end{aligned}
$$

Ta enačba ima rešitvi $x_0 = 1$ in $x_0 = 3$. Ustrezni točki na grafu funkcije f sta $T(1, 2)$ in $T(3, 6)$, enačbi tangent pa

$$
\begin{aligned}
y &= 2, \\
y &= 4x - 6.
\end{aligned}
$$

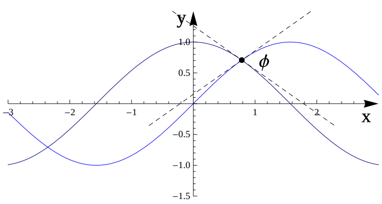
Poglejmo še skico.



$\square$

(10) Izračunaj, pod kakšnim kotom se sekata grafa funkcij $f(x) = \sin x$ in $g(x) = \cos x$.

Rešitev: Če se dve gladki krivulji sekata v neki točki, definiramo, da je kot med krivuljama v dani točki enak kotu med njunima tangentama v tej točki.



Grafa funkcij f in g se sekata v točkah, katerih x-koordinate zadoščajo enakosti

$$\sin x = \cos x.$$

To je res pri točkah oblike $x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Izkaže se, da se dani krivulji v vseh presečiščih sekata pod istim kotom, zato si bomo podrobneje pogledali samo presečišče $T\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Iz odvodov $f'(x) = \cos x$ in $g'(x) = -\sin x$ dobimo

$$k_1 = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$k_2 = g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

V splošnem lahko kot med premicama s smernima koeficientoma k_1 in k_2 izračunamo s pomočjo formule

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}.$$

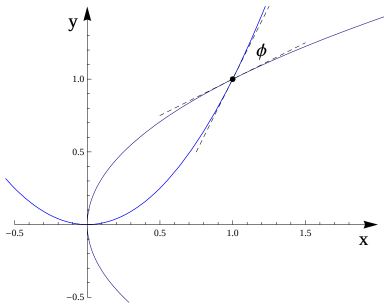
V našem primeru tako dobimo $\operatorname{tg}\phi = 2\sqrt{2}$ oziroma

$$\phi = \operatorname{arc\,tg}(2\sqrt{2}) \approx 70,5°.$$

□

(11) Izračunaj, pod kakšnim kotom se sekata krivulji $y = x^2$ in $y^2 = x$.

Rešitev: Imamo opravka z dvema parabolama, ena je vodoravna, druga pa je navpična.



Paraboli se sekata v točkah $T_1(0,0)$ in $T_2(1,1)$. V točki T_1 se sekata pod pravim kotom, zato moramo izračunati še kot med parabolama v točki T_2. Definirajmo $f(x) = x^2$ in $g(x) = \sqrt{x}$. Potem je $f'(x) = 2x$ in $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Naklona parabol v točki T_2 sta:

$$k_{x^2} = 2,$$
$$k_{\sqrt{x}} = \frac{1}{2},$$

od koder sledi

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 1} = \frac{3}{4}.$$

Kot med parabolama v točki T_2 je torej enak

$$\phi = \operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4} \approx 37°.$$

□

(12) Izračunaj ukrivljenosti:

(a) premice $y = x + 1$,

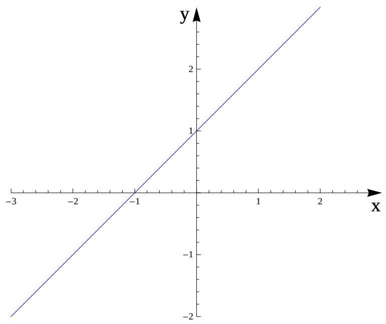
(b) parabole $y = x^2$ v točkah z abscisami $x = 0$, $x = 1$ in $x = 2$,

(c) krožnice $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ za $R > 0$.

Rešitev: Ukrivljenost krivulje je mera za hitrost spreminjanja smeri krivulje. Izračunamo jo po formuli

$$\kappa(x) = \left| \frac{y''(x)}{(\sqrt{1 + y'(x)^2})^3} \right|.$$

(a) Najprej bomo izračunali ukrivljenost premice $y = x + 1$.



Odvoda sta $y'(x) = 1$ in $y''(x) = 0$, od koder sledi

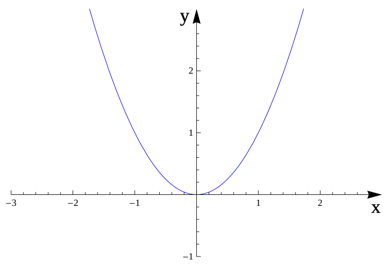
$$\kappa(x) = 0.$$

Rezultat je pričakovan, saj so premice ravne

(b) V primeru parabole je $y'(x) = 2x$ in $y''(x) = 2$. Ukrivljenost parabole je torej

$$\kappa(x) = \left| \frac{2}{(\sqrt{1 + 4x^2})^3} \right| = \frac{2}{(\sqrt{1 + 4x^2})^3}.$$

Velja še $\kappa(0) = 2$, $\kappa(1) = \frac{2}{5\sqrt{5}}$ in $\kappa(2) = \frac{2}{17\sqrt{17}}$. Vidimo, da je parabola najbolj ukrivljena v temenu.



(c) Za konec izračunajmo še ukrivljenost krožnice s polmerom R, ki jo lahko podamo v obliki $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Odvoda sta:

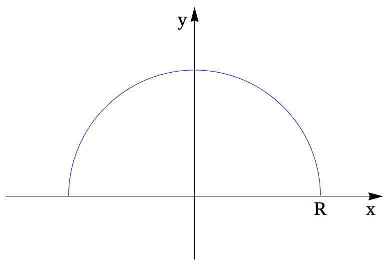
$$y'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}},$$

$$y''(x) = \frac{-1 \cdot \sqrt{R^2 - x^2} + x \cdot \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}}{R^2 - x^2} = \frac{-R^2}{(\sqrt{R^2 - x^2})^3}.$$

Ukrivljenost krožnice s polmerom R je tako enaka

$$\kappa(x) = \left| \frac{\frac{-R^2}{(\sqrt{R^2-x^2})^3}}{\left(\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\right)^3} \right| = \left| \frac{\frac{-R^2}{(\sqrt{R^2-x^2})^3}}{\left(\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2}}\right)^3} \right| = \frac{1}{R}.$$

Krožnice imajo konstantno ukrivljenost, ki je obratno sorazmerna polmeru.



□

(13) Z uporabo diferenciala približno izračunaj naslednje vrednosti:

(a) 1.03^5,

(b) $e^{0.2}$,

(c) $\ln 0.9$,

(d) $\sqrt{0.97}$.

Rešitev: Naj bo f funkcija, katere vrednost znamo natančno izračunati v točki $x = a$. S pomočjo diferenciala lahko potem približno izračunamo vrednosti funkcije f za x blizu a z uporabo formule

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a).$$

Geometrično gre pri tem za aproksimacijo grafa s tangento na graf v točki $x = a$.

(a) Izberimo funkcijo $f(x) = x^5$. Njen odvod je $f'(x) = 5x^4$. Natančno znamo izračunati vrednost funkcije f v točki $a = 1$, zanima pa nas vrednost funkcije f v točki $x = 1.03$. Z uporabo diferenciala dobimo

$$1.03^5 \approx f(1) + f'(1)(1.03 - 1) = 1 + 5 \cdot 0.03 = 1.15.$$

Natančna vrednost je $1.03^5 = 1.1593$.

(b) Sedaj izberimo $f(x) = e^x$ in $a = 0$. Zanima nas vrednost funkcije f v točki $x = 0.2$. Iz $f'(x) = e^x$ sledi

$$e^{0.2} \approx f(0) + f'(0)(0.2 - 0) = 1 + 1 \cdot 0.2 = 1.2.$$

Natančna vrednost je $e^{0.2} = 1.2214$.

(c) Definirajmo $f(x) = \ln x$ in naj bo $a = 1$. Iščemo vrednost funkcije f v točki $x = 0.9$. Ker je $f'(x) = \frac{1}{x}$, dobimo aproksimacijo

$$\ln 0.9 \approx f(1) + f'(1)(0.9 - 1) = 0 + 1 \cdot (-0.1) = -0.1.$$

Natančna vrednost je $\ln 0.9 = -0.1054$.

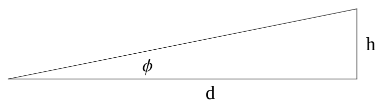
(d) Sedaj naj bo $f(x) = \sqrt{x}$ in $a = 1$. Radi bi izračunali vrednost funkcije f v točki $x = 0.97$. Odvod funkcije f je $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, zato je

$$\sqrt{0.97} \approx f(1) + f'(1)(0.97 - 1) = 1 + \frac{1}{2} \cdot (-0.03) = 0.985.$$

Natančna vrednost tega korena je $\sqrt{0.97} = 0.9849$. □

(14) Kolesar se vzpenja po klancu z 10% naklonom. Z uporabo diferenciala približno oceni, kakšen je naklon klanca izražen v stopinjah.

Rešitev: Naklon klanca je enak tangensu kota med vodoravnico in klancem.



Če imamo dan naklon klanca k, lahko naklonski kot izračunamo po formuli

$$\phi = \operatorname{arc\,tg} k.$$

Pri majhnih naklonih lahko arc tg aproksimiramo z uporabo diferenciala, da dobimo

$$\phi = \operatorname{arc\,tg} 0 + \frac{1}{1 + 0^2} \cdot k = k.$$

Pri tem smo upoštevali, da je $(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$. Naklonski kot je torej približno enak naklonu, pri čemer moramo naklonski kot izraziti v radianih. Ker imamo zvezo

$$1\,\mathrm{rad} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57.3^\circ,$$

je torej naklonski kot 10% klanca približno

$$\phi \approx 5.73^\circ.$$

Natančna vrednost pa je $\phi = 5.7106^\circ$. □