Matematika

Risanje grafov funkcij

---

(1) S pomočjo L'Hospitalovega pravila izračunaj limite funkcij:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\ln(x+1)}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \frac{x^2}{2} + x}{e^x - \cos x}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - x}{\ln(1+2x) - 2x}$,

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0+} x^2 \ln x$,

(f) $\lim\limits_{x\to 0+} x \ln^2 x$.

Rešitev: S pomočjo odvoda lahko na preprost način izračunamo tudi kakšne limite, ki se sicer izkažejo za trd oreh. To nam pogosto pride prav pri študiju asimptotskega obnašanja funkcije.

L'Hospitalovo pravilo: Limita kvocienta $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, kjer gresta števec in imenovalec oba hkrati proti 0 ali pa oba hkrati proti $\pm\infty$ pri $x \to a$, je enaka limiti $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, če le-ta obstaja. Pri tem morata biti funkciji f in g odvedljivi v okolici točke $a \in \mathbb{R}$. Podobno velja, če namesto limite $x \to a$ gledamo limito $x \to \pm\infty$, ali pa enostransko limito.

(a) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\frac{1}{x+1}} = 1.$$

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \frac{x^2}{2} + x}{e^x - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1} - x + 1}{e^x + \sin x} = 2.$$

(c) $$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - x}{\ln(1+2x) - 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\sin x - 1}{\frac{2}{1+2x} - 2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x - \sin x - x\cos x}{\frac{-4}{(1+2x)^2}} = 0.$$

(d) $$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

(e) $$\lim_{x\to 0+} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0+} x^2 = 0.$$

(f) $$\lim_{x\to 0+} x \ln^2 x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{2\ln x}{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} 2x = 0.$$

□

(2) Za dani funkciji izračunaj intervale naraščanja in padanja ter poišči lokalne ekstreme:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$,

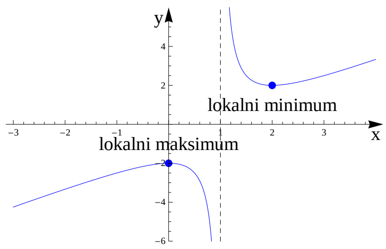
(b) $f(x) = x - \operatorname{arc\,tg} x$.

Rešitev: Intervale naraščanja in padanja funkcije iščemo s pomočjo odvoda. Kjer je odvod pozitiven, funkcija narašča, kjer je negativen, pa pada. V točkah, kjer odvod zamenja predznak, ima funkcija lokalni ekstrem.

(a) Funkcija $f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$ je racionalna funkcija s polom pri $x = 1$. Njen odvod je enak

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x-1) - (x^2 - 2x + 2) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2},$$

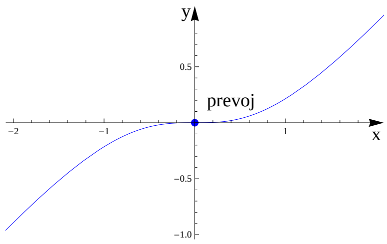
od koder sledi, da f narašča na $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ in pada na $(0, 1) \cup (1, 2)$. V točki $x = 0$ ima funkcija f lokalni maksimum, v točki $x = 2$ pa lokalni minimum.



(b) Funkcija $f(x) = x - \operatorname{arc\,tg} x$ je definirana za vsa realna števila. Njen odvod je

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

Od tod sledi, da je f naraščajoča funkcija, v točki $x = 0$ pa ima prevoj.



□

(3) Za dani funkciji izračunaj intervale naraščanja in padanja ter intervale konveksnosti in konkavnosti:

(a) $f(x) = x \ln x$,

(b) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Rešitev: Intervale konveksnosti in konkavnosti iščemo s pomočjo drugega odvoda. Funkcija je konveksna, kjer je drugi odvod pozitiven in konkavna, kjer je negativen. Točke, kjer drugi odvod zamenja predznak, imenujemo prevoji.

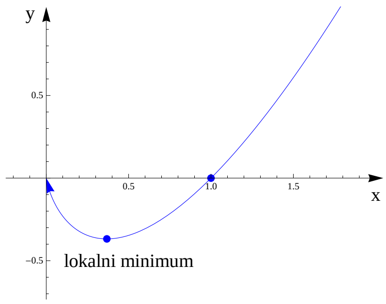
(a) Funkcija $f(x) = x \ln x$ je definirana na $D_f = (0, \infty)$. Njen odvod je enak

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1,$$

od koder sledi, da f narašča na (e^{-1}, ∞) in pada na $(0, e^{-1})$. V točki $x = e^{-1}$ ima funkcija f lokalni minimum. Drugi odvod funkcije f je

$$f''(x) = \frac{1}{x}.$$

Ker je $f''(x) > 0$ za vsak $x \in D_f$, je funkcija f konveksna.



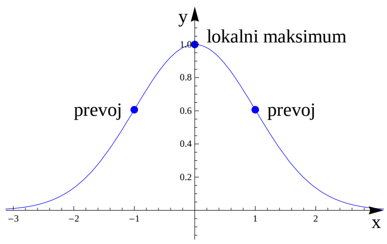
(b) Gaussova funkcija $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ je definirana za vsa realna števila. Njen odvod je

$$f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Od tod sledi, da f narašča na $(-\infty, 0)$ in pada na $(0, \infty)$. V točki $x = 0$ ima funkcija f lokalni maksimum. Drugi odvod funkcije f je

$$f''(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = (1 - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Funkcija f je konveksna na $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, konkavna pa na $(-1, 1)$. V točkah $x = \pm 1$ ima funkcija f prevoja.



□

(4) Skiciraj grafe funkcij:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4x + 4}$,

(b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$,

(c) $f(x) = x \ln^2 x$,

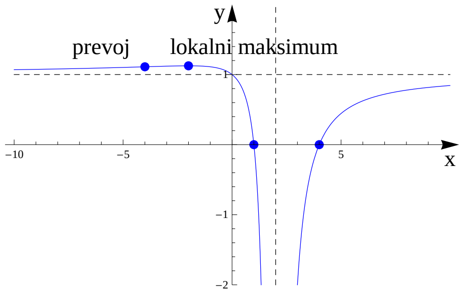
(d) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Rešitev: Pri skiciranju grafov funkcij so nam v pomoč naslednji podatki, ki jih lahko predhodno izračunamo:

· definicijsko območje, ničle, poli, limite na robu definicijskega območja, asimptote,
· stacionarne točke, lokalni ekstremi, intervali naraščanja in padanja,
· prevoji, intervali konveksnosti in konkavnosti.

(a) $\underline{f(x) = \frac{x^2-5x+4}{x^2-4x+4}}$.

- Najprej zapišimo
$$\frac{x^2-5x+4}{x^2-4x+4} = \frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)^2}$$
Racionalna funkcija f je torej definirana na $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Ničli ima v točki $x_1 = 1$ in $x_2 = 4$, pol pa v točki $x = 2$. Z deljenjem števca in imenovalca dobimo
$$\frac{x^2-5x+4}{x^2-4x+4} = 1 - \frac{x}{x^2-4x+4}.$$
Od tod dobimo, da je premica $y = 1$ vodoravna asimptota funkcije f.
- Odvod funkcije f je enak
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-5)(x-2)^2 - (x^2-5x+4)2(x-2)}{(x-2)^4}, \\ &= \frac{(2x-5)(x-2) - 2(x^2-5x+4)}{(x-2)^3}, \\ &= \frac{2x^2-9x+10-2x^2+10x-8}{(x-2)^3}, \\ &= \frac{x+2}{(x-2)^3}. \end{aligned}$$
Funkcija f torej narašča na $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ in pada na $(-2, 2)$. V točki $x = -2$ ima funkcija f lokalni maksimum.
- Drugi odvod funkcije f je enak
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1 \cdot (x-2)^3 - (x+2)3(x-2)^2}{(x-2)^6}, \\ &= \frac{x-2-3(x+2)}{(x-2)^4}, \\ &= \frac{-2x-8}{(x-2)^4}, \\ &= \frac{-2(x+4)}{(x-2)^4}. \end{aligned}$$
Funkcija f je konveksna na $(-\infty, -4)$, konkavna pa na $(-4, 2) \cup (2, \infty)$. V točki $x = -4$ ima prevoj. Poglejmo si sedaj še graf funkcije f.



(b) $\underline{f(x) = \sqrt{x^2+1}}$.

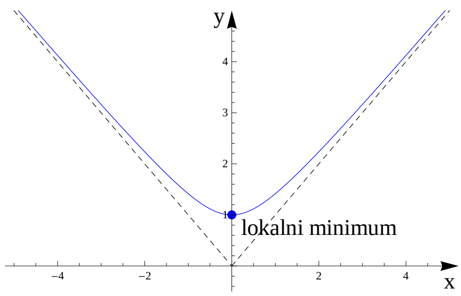
- Funkcija f je soda in definirana na $D_f = \mathbb{R}$. Ničel in polov nima. Pri $x \to \infty$ ima linearno asimptoto, katere koeficienta sta:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1,$$
$$n = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0.$$

  To pomeni, da je linearna asimptota pri $x \to \infty$ premica $y = x$. Ker je funkcija f soda, je linearna asimptota pri $x \to -\infty$ premica $y = -x$.

- Odvod funkcije f je enak
$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$
  To pomeni, da f pada na $(-\infty, 0)$ in narašča na $(0, \infty)$. V točki $x = 0$ ima funkcija f lokalni minimum.

- Drugi odvod funkcije f je enak
$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$
  Od tod sledi, da je funkcija f konveksna.



(c) $\underline{f(x) = x\ln^2 x}$.

- Funkcija f je definirana na $D_f = (0, \infty)$ in ima ničlo v točki $x = 1$. Limiti na robovih definicijskega območja pa sta

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{2\ln x}{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} 2x = 0,$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x\ln^2 x = \infty.$$

- Odvod funkcije f je enak

$$f'(x) = \ln^2 x + x \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \ln x(\ln x + 2).$$

Torej je funkcija f naraščajoča na $(0, e^{-2}) \cup (1, \infty)$ in padajoča na $(e^{-2}, 1)$. V točki $x = e^{-2}$ ima funkcija f lokalni maksimum, v točki $x = 1$ pa lokalni minimum. Velja

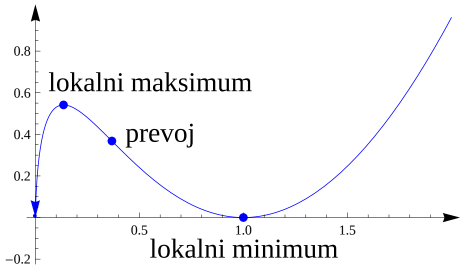
$$\lim_{x \to 0+} f'(x) = \lim_{x \to 0+} \ln x(\ln x + 2) = \infty,$$

od koder sklepamo, da ima graf funkcije f v točki $x = 0$ navpično tangento.

- Drugi odvod funkcije f je enak

$$f''(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x}(\ln x + 1).$$

Od tod sledi, da je funkcija f konveksna na (e^{-1}, ∞) in konkavna na $(0, e^{-1})$, v točki $x = e^{-1}$ pa ima prevoj.



(d) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

- Funkcija f je definirana na celi realni osi, ničel in polov pa nima. Iz

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$

sledi, da je abscisna os vodoravna asimptota funkcije f.

- Odvod funkcije f je enak

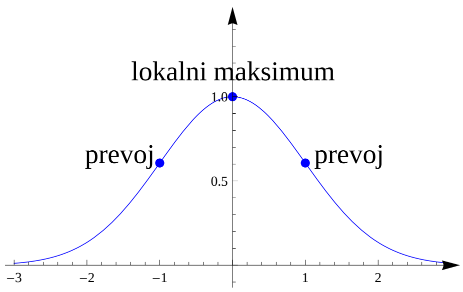
$$f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$

V točki $x = 0$ ima funkcija f lokalni maksimum. Na intervalu $(-\infty, 0)$ funkcija f narašča, na intervalu $(0, \infty)$ pa pada.

- Drugi odvod funkcije f je enak

$$f''(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = (x^2 - 1)e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

To pomeni, da je funkcija f konveksna na $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, konkavna pa na $(-1, 1)$. V točkah $x = -1$ in $x = 1$ ima prevoja.



Grafu funkcije f rečemo Gaussova krivulja.

$\square$