Matematika

Taylorjev razvoj

(1) Izračunaj Taylorjeve polinome:

(a) reda 3 funkcije $f(x) = e^x$ okoli točke $a = 0$,
(b) reda 3 funkcije $f(x) = \ln x$ okoli točke $a = 1$,
(c) reda 3 funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ okoli točke $a = 1$,
(d) reda 2 funkcije $f(x) = x \ln^2 x$ okoli točke $a = 1$,
(e) reda 4 funkcije $p(x) = x^4 + x^2 + 1$ okoli točke $a = -1$.

Rešitev: Pogosto znamo natančno izračunati vrednosti funkcije f in njenih odvodov v neki točki $x = a$, v točkah blizu a pa ne. Za približen izračun vrednosti funkcije v okolici točke a si pomagamo s Taylorjevimi polinomi. Poljubno n-krat odvedljivo funkcijo f lahko v okolici točke $x = a$ aproksimiramo s Taylorjevim polinomom reda n

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Red Taylorjevega polinoma izberemo tako, da dobimo željeno natančnost aproksimacije. Pri višanju reda dobimo čedalje boljše aproksimacije $f(x) \approx T_n(x)$ za x blizu a. V posebnem primeru, ko je f polinom stopnje n, Taylorjev polinom T_n sovpada z f.

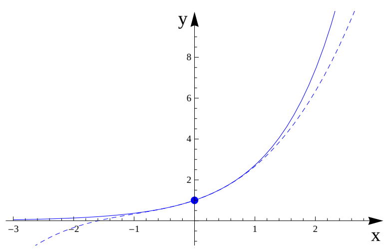
(a) Za funkcijo $f(x) = e^x$ velja:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x, \\ f''(x) &= e^x, \\ f'''(x) &= e^x. \end{aligned}$$

Od tod dobimo $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$, kar nam da

$$T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

Kot vidimo na sliki, Taylorjev polinom T_3 dobro aproksimira eksponentno funkcijo v okolici točke $x = 0$, pri večjih x pa se razlika čedalje bolj veča.



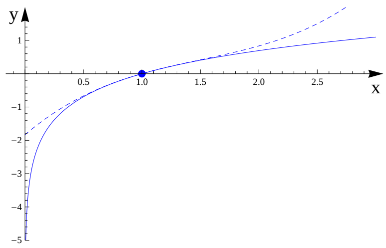
(b) Odvodi funkcije $f(x) = \ln x$ so:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x}, \\ f''(x) &= -\frac{1}{x^2}, \\ f'''(x) &= \frac{2}{x^3}. \end{aligned}$$

V točki $a = 1$ tako dobimo $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$, $f''(1) = -1$ in $f'''(1) = 2$. Od tod dobimo

$$T_3(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3.$$

Poglejmo si še skico grafa naravnega logaritma in Taylorjevega polinoma reda 3.



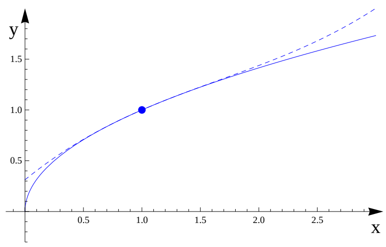
(c) Odvodi korenske funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ so:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-1/2}, \\ f''(x) &= -\frac{1}{4}x^{-3/2}, \\ f'''(x) &= \frac{3}{8}x^{-5/2}. \end{aligned}$$

V točki $a = 1$ je $f(1) = 1$, $f'(1) = \frac{1}{2}$, $f''(1) = -\frac{1}{4}$ in $f'''(1) = \frac{3}{8}$. od koder sledi

$$T_3(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3.$$

Poglejmo še grafa.



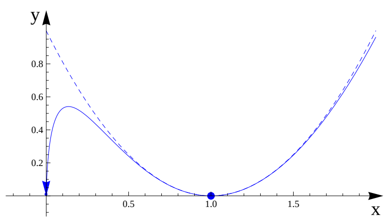
(d) Za funkcijo $f(x) = x\ln^2 x$ velja

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln^2 x + 2\ln x, \\ f''(x) &= \frac{2\ln x}{x} + \frac{2}{x}. \end{aligned}$$

Od tod dobimo $f(1) = f'(1) = 0$ in $f''(1) = 2$, kar nam da

$$T_2(x) = (x-1)^2.$$

Kot vidimo na sliki, Taylorjev polinom T_2 precej dobro aproksimira funkcijo f v okolici stacionarne točke $x = 1$.



(e) Izračunajmo sedaj Taylorjev polinom reda 4 polinoma p v okolici točke $a = -1$. Pri tem bomo dobili ravno razvoj polinoma p po potencah polinoma $x + 1$. Velja

$$\begin{aligned} p'(x) &= 4x^3 + 2x, \\ p''(x) &= 12x^2 + 2, \\ p'''(x) &= 24x, \\ p''''(x) &= 24. \end{aligned}$$

Od tod dobimo $p(-1) = 3$, $p'(-1) = -6$, $p''(-1) = 14$, $p'''(-1) = -24$ in $p''''(-1) = 24$, kar nam da

$$T_4(x) = 3 - 6(x + 1) + 7(x + 1)^2 - 4(x + 1)^3 + (x + 1)^4.$$

Ker je p polinom stopnje 4, je $p(x) = T_4(x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. □

(2) Dana je funkcija $f(x) = \cos x$.

(a) Izračunaj Taylorjev polinom reda 3 funkcije f okoli točke $a = 0$.

(b) Približno izračunaj $\cos(0.1)$.

Rešitev: (a) Najprej izračunajmo Taylorjev polinom funkcije $f(x) = \cos x$ reda 3 okoli točke $a = 0$. Odvodi funkcije f so $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$ in $f'''(x) = \sin x$. V točki $a = 0$ je $f(0) = 1$ $f'(0) = f'''(0) = 0$ in $f''(0) = -1$, zato je

$$T_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

(b) Z uporabo aproksimacije $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ dobimo oceno

$$\cos(0.1) \approx 1 - \frac{(0.1)^2}{2} = 1 - 0.005 = 0.995.$$

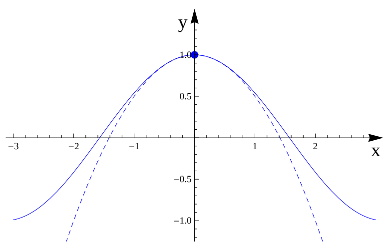
Sedaj bi radi ocenili napako zgornje aproksimacije. V splošnem imamo oceno

$$\text{napaka} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \max_{t \in [-x,x]} |f^{(n+1)}(t)|$$

za napako aproksimacije $f(x) \approx T_n(x)$ s Taylorjevim polinomom reda n okoli točke $a = 0$. V našem primeru je $n = 3$ in $x = 0.1$. Ker je $f^{(4)}(x) = \cos x$, je $|\cos x| \leq 1$ in

$$\text{napaka} \leq \frac{|0.1|^4}{4!} \cdot 1 = 0.0000041.$$

Natančna vrednost je $\cos(0.1) = 0.995004$. Poglejmo še grafa.



□

(3) Izračunaj Taylorjev polinom reda 2 funkcije $f(x) = xe^x - \ln(1+x)$ okoli točke $a = 0$ in približno izračunaj $f(0.1)$.

Rešitev: Odvoda funkcije f sta

$$f'(x) = e^x + xe^x - \frac{1}{x+1},$$
$$f''(x) = e^x + e^x + xe^x + \frac{1}{(x+1)^2} = 2e^x + xe^x + \frac{1}{(x+1)^2}.$$

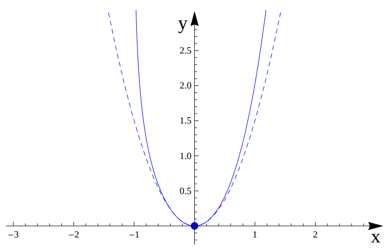
V točki $a = 0$ dobimo $f(0) = f'(0) = 0$ in $f''(0) = 3$, od koder sledi

$$T_2(x) = \frac{3}{2}x^2.$$

Z uporabo aproksimacije $f(x) \approx \frac{3}{2}x^2$ dobimo približek

$$f(0.1) \approx \frac{3}{2}(0.1)^2 = 0.015.$$

Natančna vrednost je v tem primeru $f(0.1) = 0.015207$.



□

(4) Izračunaj limiti s pomočjo Taylorjevega izreka:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x + x^3 + \frac{x^2}{2} - 1}{x^3}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x + \frac{x^2}{2}}{x^2}$.

Rešitev: Taylorjev izrek nam pove, da lahko pri računanju limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) + p(x)}{x^n},$$

kjer je p nek polinom, funkcijo f nadomestimo s Taylorjevim polinomom reda n okoli točke $a = 0$.

(a) V tem primeru iščemo Taylorjev polinom reda 3 funkcije $f(x) = \cos x$ okoli točke $a = 0$. Izračunali smo že, da je

$$T_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2},$$

od koder sledi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x + x^3 + \frac{x^2}{2} - 1}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + x^3 + \frac{x^2}{2} - 1}{x^3} = 1.$$

(b) Sedaj potrebujemo Taylorjev polinom reda 2 funkcije $f(x) = e^x$. Ta je enak

$$T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

zato je

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x + \frac{x^2}{2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} - 1 - x + \frac{x^2}{2}}{x^2} = 1.$$

□