Matematika

Uporaba integrala

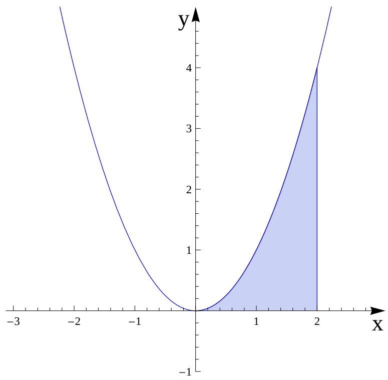
(1) Izračunaj ploščine likov pod grafi danih funkcij:

(a) $f(x) = x^2$ na $[0, 2]$,
(b) $f(x) = e^x$ na $[0, 1]$,
(c) $f(x) = x \sin x$ na $[0, \pi]$.

Rešitev: Naj bo f zvezna, pozitivna funkcija na intervalu $[a, b]$. Ploščina lika, ki leži pod grafom funkcije f na intervalu $[a, b]$, je enaka

$$S = \int_a^b f(x)\, dx.$$

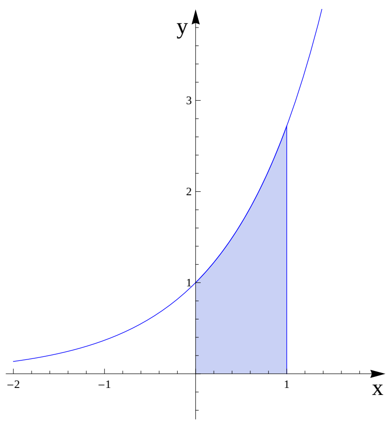
(a) Najprej bomo izračunali ploščino lika pod kvadratno parabolo.



Računajmo:

$$S = \int_0^2 x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \underline{\underline{\frac{8}{3}}}.$$

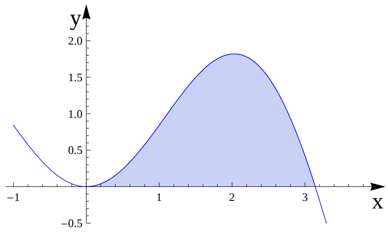
(b) Ploščina lika pod grafom eksponentne funkcije



je enaka

$$S = \int_0^1 e^x \, dx = e^x \Big|_0^1 = \underline{\underline{e - 1}}.$$

(c) Poglejmo si lik pod grafom funkcije $f(x) = x \sin x$ na intervalu $[0, \pi]$.



Za izračun njegove ploščine bomo funkcijo f integrirali po delih. Označimo $u = x$ in $\sin x \, dx = dv$. Potem je $du = dx$ in $v = -\cos x$, kar nam da

$$S = \int_0^\pi x \sin x \, dx = -x \cos x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x \, dx = \pi + \sin x \Big|_0^\pi = \underline{\underline{\pi}}.$$

$\square$

(2) Izračunaj ploščine likov, ki jih omejujejo grafi funkcij:

(a) $f(x) = \cos x + 1$ in $g(x) = -\cos x$ na $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

(b) $f(x) = \sin x$ in $g(x) = 0$ na $[0, 2\pi]$,

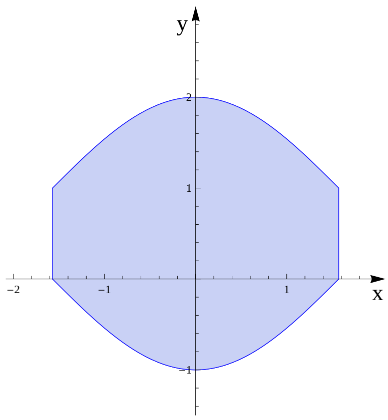
(c) $f(x) = x^2 + 2x$ in $g(x) = x + 2$.

Rešitev: Ploščina lika, ki leži med grafoma funkcij f in g na intervalu $[a, b]$, je enaka

$$S = \int_a^b (g(x) - f(x)) \, dx.$$

Pri tem vzamemo za g funkcijo, katere graf omejuje lik od zgoraj, za f pa funkcijo, katere graf omejuje lik od spodaj. V nasprotnem primeru bi dobili negativno vrednost ploščine.

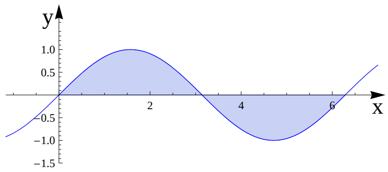
(a) Lik je omejen z dvema kosinusoidama.



Od zgoraj je omejen z grafom funkcije f, od spodaj pa z grafom funkcije g, zato je njegova ploščina enaka

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + 1 - (-\cos x))\, dx = (2\sin x + x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{4+\pi}}.$$

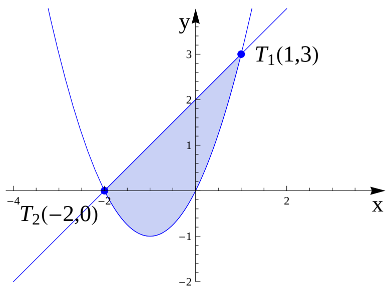
(b) Sedaj računamo ploščino lika med sinusoido in abscisno osjo na intervalu $[0, 2\pi]$.



Na intervalu $[0, \pi]$ leži sinusoida nad, na intervalu $[\pi, 2\pi]$ pa pod abscisno osjo. Ploščini obeh kosov sta enaki, zato je ploščina iskanega lika enaka

$$S = 2\int_0^{\pi} \sin x\, dx = -2\cos x\Big|_0^{\pi} = \underline{\underline{4}}.$$

(c) Iščemo ploščino lika med parabolo in premico.



Najprej izračunajmo presečišči grafov danih funkcij:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x &= x + 2, \\ x^2 + x - 2 &= 0, \\ (x-1)(x+2) &= 0. \end{aligned}$$

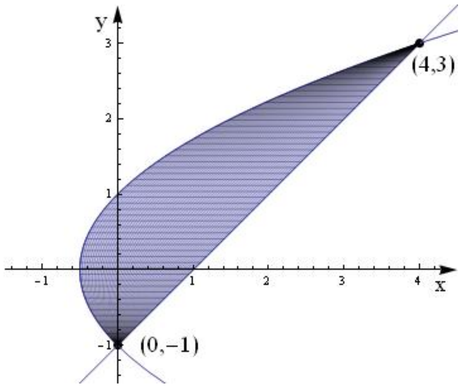
Presečišči sta torej v točkah $T_1(1,3)$ in $T_2(-2,0)$. Da bi dobili ploščino iskanega lika, moramo torej integrirati funcijo $g - f$ na intervalu $[-2, 1]$:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{1} \big((x+2) - (x^2 + 2x)\big)\, dx, \\ &= \int_{-2}^{1} \big(-x^2 - x + 2\big)\, dx, \\ &= \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_{-2}^{1}, \\ &= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right)\right), \\ &= \underline{\underline{\frac{9}{2}}}. \end{aligned}$$

$\square$

(3) Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta krivulji $y^2 = 2x + 1$ in $y = x - 1$.

Dokaz. Lik je omejen s premico in s parabolo. Da bi izračunali njegovo ploščino, bomo integrirali po spremenljivki y na intervalu $y \in [-1, 3]$. Leva in desna robna krivulja našega lika imata v tem primeru enačbi $x(y) = \frac{y^2-1}{2}$ oziroma $x(y) = y + 1$.



Sledi

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{3} \left((y+1) - \left(\frac{y^2-1}{2} \right) \right) dy, \\ &= \int_{-1}^{3} \left(y + \frac{3}{2} - \frac{y^2}{2} \right) dy, \\ &= \left(\frac{y^2}{2} + \frac{3}{2}x - \frac{y^3}{6} \right) \Big|_{-1}^{3}, \\ &= \underline{\underline{\frac{16}{3}}}. \end{aligned}$$

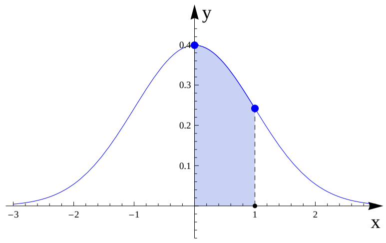
□

(4) S trapezno metodo pri $n = 4$ izračunaj ploščino lika pod grafom funkcije $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ na intervalu $[0, 1]$.

Rešitev: Izračunali bomo določeni integral Gaussove funkcije

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx.$$

Ta funkcija predstavlja gostoto standardne normalne porazdelitve in igra ključno vlogo v statistiki in verjetnosti. Vrednost tega konkretnega integrala je enaka verjetnosti, da standardno normalno porazdeljena spremenljivka zavzame vrednost na intervalu $[0, 1]$.



Ker ne znamo izračunati nedoločenega integrala Gaussove funkcije, bomo ploščino lika pod njenim grafom približno izračunali s trapezno metodo pri $n = 4$. Najprej napišimo tabelo vrednosti:

x_k	0.000	0.250	0.500	0.750	1.000
y_k	0.399	0.387	0.352	0.301	0.242

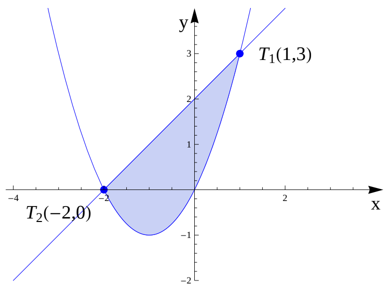
Od tod dobimo aproksimacijo

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \approx \frac{1}{8}\left(0.399 + 2 \cdot (0.387 + 0.352 + 0.301) + 0.242\right) = 0.340.$$

Dejanska vrednost integrala, zaokroženega na štiri decimalke, je 0.3413, kar pomeni, da smo dobili dokaj dobro aproksimacijo že z zelo malim številom računskih operacij. Za boljšo aproksimacijo bi morali vzeti večji n, ali pa uporabiti Simpsonovo metodo. □

(5) Izračunaj središče lika, ki je omejen s krivuljama $y = x^2 + 2x$ in $y = x + 2$.

Rešitev: Iščemo središče lika, ki je omejen s premico in parabolo.



Središče ravninskega lika L, ki je na intervalu $[a, b]$ omejen z grafoma funkcij f in g, lahko izračunamo s pomočjo formul

$$x_* = \frac{\int_a^b (g(x) - f(x))x\, dx}{S},$$
$$y_* = \frac{\int_a^b \frac{1}{2}\left(g(x)^2 - f(x)^2\right) dx}{S},$$

kjer je S ploščina lika L.

Presečišči obeh krivulj sta v točkah $T_1(1, 3)$ in $T_2(-2, 0)$, zato je ploščina lika L enaka:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{1} \big((x+2) - (x^2 + 2x)\big)\, dx, \\ &= \int_{-2}^{1} \left(-x^2 - x + 2\right) dx, \\ &= \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_{-2}^{1}, \\ &= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right)\right), \\ &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

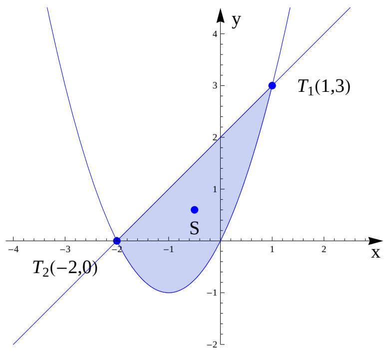
Sedaj bomo izračunali integrala v števcih zgornjih ulomkov.

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{1}((x+2)-(x^2+2x))x\,dx &= \int_{-2}^{1}(-x^3-x^2+2x)\,dx,\\
&= \left(-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Bigg|_{-2}^{1} = 4,\\
&= \left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+1\right)-\left(-4+\frac{8}{3}+4\right),\\
&= -\frac{9}{4},\\
\int_{-2}^{1}\frac{1}{2}((x+2)^2-(x^2+2x)^2)\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{1}\left(-x^4-4x^3-3x^2+4x+4\right)\,dx,\\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{x^5}{5}-x^4-x^3+2x^2+4x\right)\Bigg|_{-2}^{1},\\
&= \frac{1}{2}\left(\left(-\frac{1}{5}-1-1+2+4\right)-\left(\frac{32}{5}-16+8+8-8\right)\right),\\
&= \frac{27}{10}.
\end{aligned}$$

Koordinati središča lika sta torej:

$$\begin{aligned}
x_* &= \frac{-\frac{9}{4}}{\frac{9}{2}} = -\frac{1}{2},\\
y_* &= \frac{\frac{27}{10}}{\frac{9}{2}} = \frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

Poglejmo še skico.



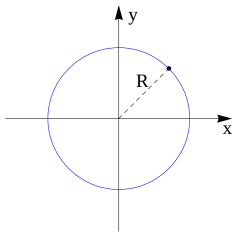
□

(6) Izračunaj obseg krožnice s polmerom R.

Rešitev: Dolžina grafa funkcije f na intervalu $[a,b]$ je enaka

$$l = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.$$

Cele krožnice sicer eksplicitno ne moremo podati z grafom funkcije, lahko pa definiramo polkrožnico kot graf funkcije $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$.



Odvod funkcije f je enak $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{R^2-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$, od tod pa dobimo

$$o = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx = 2\int_{-R}^{R} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx.$$

Sedaj uvedimo novo spremenljivko s predpisom $x = R\sin\phi$. Potem je $dx = R\cos\phi\,d\phi$, za meje pa velja

$$x = -R \Longrightarrow t = -\frac{\pi}{2},$$
$$x = R \Longrightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$

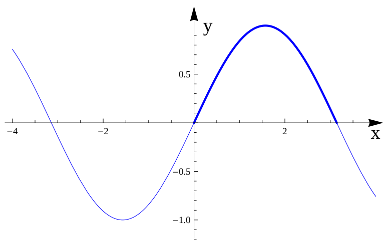
Sledi

$$o = 2\int_{-R}^{R} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^2\cos\phi}{\sqrt{R^2-R^2\sin^2\phi}}\,d\phi = 2R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\phi}{\sqrt{1-\sin^2\phi}}\,d\phi = 2\pi R.$$

□

(7) S Simpsonovo metodo pri $n = 4$ oceni dolžino loka sinusoide na intervalu $[0, \pi]$.

Rešitev: Računamo dolžino loka sinusoide na intervalu $[0, \pi]$.



Ker je $(\sin x)' = \cos x$, nas torej zanima določeni integral

$$l = \int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx.$$

Integrirali bomo funkcijo $y(x) = \sqrt{1+\cos^2 x}$ na intervalu $[0, \pi]$ z izbiro osmih delilnih točk.

x_k	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
y_k	1.414	1.361	1.225	1.071	1	1.071	1.225	1.361	1.414

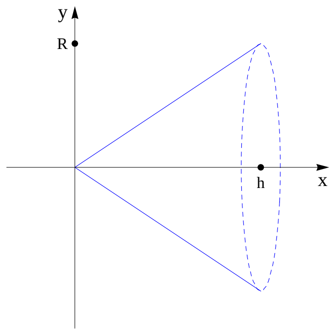
Sledi

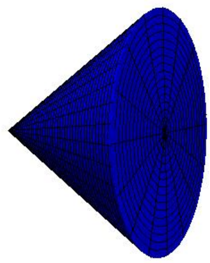
$$\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx \approx \frac{\pi}{24}\left(2\cdot 1.414 + 4\cdot(2\cdot 1.361 + 2\cdot 1.071) + 2\cdot(2\cdot 1.225+1)\right) = 3.820.$$

Dejanska dolžina tega loka sinusoide je približno 3.820198. □

(8) Izračunaj volumen telesa, ki ga dobiš, če krivuljo $y = \frac{R}{h}x$ na intervalu $[0, h]$ zavrtiš okoli abscisne osi.

Rešitev: Če krivuljo $y = \frac{R}{h}x$ zavrtimo okoli abscisne osi, dobimo stožec s polmerom R in z višino h.





Volumen vrtenine, ki jo dobimo pri vrtenju grafa funkcije f okoli osi x na intervalu $[a, b]$, je enak

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx.$$

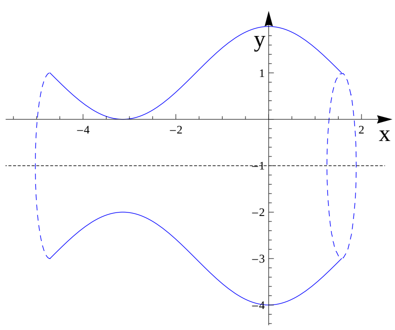
Torej je volumen stožca z višino h in polmerom osnovne ploskve R enak

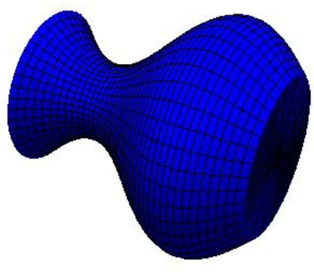
$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{R}{h}x\right)^2 dx = \frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h x^2\, dx = \frac{\pi R^2}{h^2}\cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^h = \underline{\underline{\frac{\pi R^2 h}{3}}}.$$

$\square$

(9) Izračunaj volumen vrtenine, ki jo dobimo, če graf funkcije $f(x) = \cos x + 1$ na intervalu $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ zavrtimo okoli osi $y = -1$.

Rešitev: Pri vrtenju grafa funkcije f okoli osi $y = -1$ dobimo telo v obliki vaze.





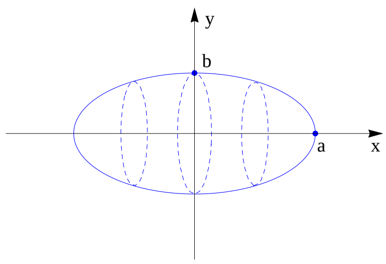
Volumen tega telesa je enak

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + 2)^2 \, dx, \\
&= \pi \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x + 4\cos x + 4) \, dx, \\
&= \pi \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos 2x + 1}{2} + 4\cos x + 4 \right) dx, \\
&= \pi \left(\frac{\sin 2x}{4} + 4\sin x + \frac{9x}{2} \right) \Bigg|_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}, \\
&= \pi \left(4 + \frac{9\pi}{4} - \left(4 - \frac{27}{4} \right) \right), \\
&= \underline{\underline{9\pi^2}}.
\end{aligned}
$$

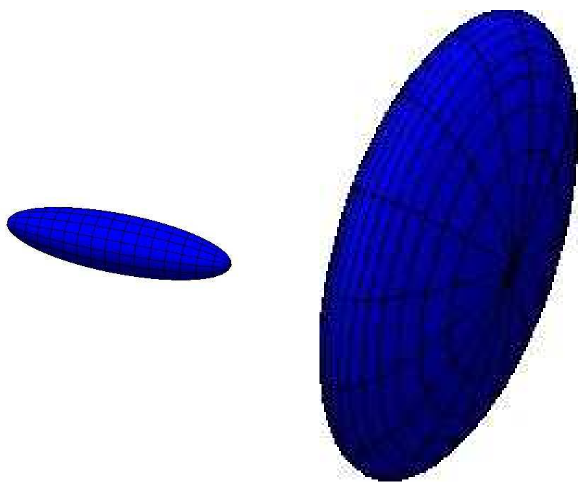
□

(10) Izračunaj volumen vrtenine, ki jo dobimo, če okoli abscisne osi zavrtimo elipso $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Rešitev: Poglejmo si elipso s polosema a in b.



Pri vrtenju elipse okoli abscisne osi dobimo telo ene izmed naslednjih oblik (odvisno od tega ali vrtimo okoli večje ali manjše polosi).



Volumen vrtenine, ki jo dobimo pri vrtenju grafa funkcije f okoli osi x na intervalu $[a, b]$, je enak

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

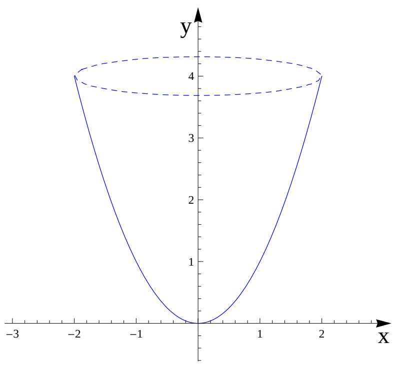
V našem primeru lahko vzamemo funkcijo $f(x)=\sqrt{b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}}$. Od tod dobimo

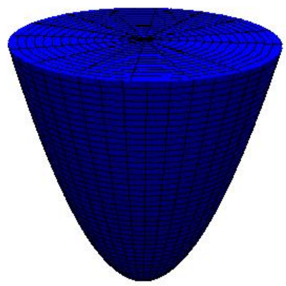
$$V=\pi\int_{-a}^{a} f(x)^2\,dx=\pi\int_{-a}^{a}\left(b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}\right)\,dx=\pi\left(b^2x-\frac{b^2x^3}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi b^2a.$$

V posebnem primeru, ko je $a=b=R$, dobimo kroglo s polmerom R. Njen volumen je $V=\frac{4}{3}\pi R^3$. $\square$

(11) Izračunaj volumen parabolične posode, ki jo dobiš z vrtenjem krivulje $y=x^2$ za $x\in[0,2]$ okoli osi $x=0$.

Rešitev: Poglejmo si najprej skico posode.





Volumen vrtenine, ki jo dobimo z vrtenjem grafa funkcije $x=x(y)$ okoli ordinatne osi je enak

$$V=\pi\int_a^b x(y)^2\,dy.$$

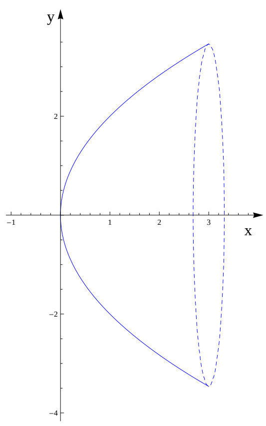
Pri nas je $x^2=y$, integrirali pa bomo po y na intervalu $[0,4]$. Tako dobimo

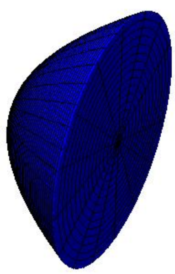
$$V=\pi\int_0^4 y\,dy=\frac{\pi y^2}{2}\Big|_0^4=\underline{\underline{8\pi}}.$$

$\square$

(12) Izračunaj površino plašča vrtenine, ki jo dobimo, če graf funkcije $f(x)=2\sqrt{x}$ na intervalu $[0,3]$ zavrtimo okoli abscisne osi.

Rešitev: Pri vrtenju grafa dane funkcije dobimo vrtenino v obliki paraboloida.





Površina plašča vrtenine, ki jo dobimo pri vrtenju grafa funkcije f okoli osi x na intervalu $[a, b]$, je enaka

$$V = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

V našem primeru je $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, od koder dobimo

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_0^3 2\sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x}}\, dx, \\ &= 4\pi \int_0^3 \sqrt{x+1}\, dx, \\ &= 4\pi \cdot \frac{2}{3}\, (x+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^3, \\ &= \frac{8\pi}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 1\right), \\ &= \underline{\underline{\frac{56\pi}{3}}}. \end{aligned}$$

$\square$