# Matematika

## Zaporedja in števila

---

(1) Določi število značilnih mest naslednjih realnih števil in jih zapiši v normalizirani obliki:

(a) 15.36,
(b) 0.036,
(c) 14.0016,
(d) 80003,
(e) 0.01200.

*Rešitev:* Števila, ki jih uporabljamo v vsakdanjem življenju, razdelimo na dva tipa.

*Približna števila* so tista števila, ki jih ponavadi dobimo z merjenjem in jih ne poznamo čisto natanko. Če na primer rečemo, da smo visoki $1.72m$, to ne pomeni nujno, da smo visoki natanko $1.72m$. Lahko smo visoki tudi kakšen milimeter več ali manj, vendar pa vsekakor več kot $1.71m$ in manj kot $1.73m$.

*Eksaktna števila* so števila, ki jih poznamo natanko. V praksi so takšna ponavadi po definiciji. En teden ima na primer po definiciji natanko sedem dni. Nič več in nič manj.

Mera za natančnost približnega decimalnega števila je število njegovih značilnih števk. Le-te določimo po naslednjem principu:

· značilne so vse neničelne števke,
· ničla je značilna v dveh primerih:
  · če je za decimalno piko in hkrati za kakšno neničelno števko,
  · če je med dvema neničelnima števkama.

Eksaktno število ima neskončno značilnih mest.

a) Število 15.36 ima 4 značilna mesta. V normalizirani obliki ga predstavimo tako, da decimalno piko postavimo za prvo neničelno števko in nato zapišemo vse značilne števke ter pomnožimo s potenco števila 10

$$15.36 = 1.536 \times 10.$$

b) Število 0.036 ima 2 značilni mesti. Ničla za decimalno piko ni značilna, ker ne stoji pred njo nobena neničelna števka. V normalizirani obliki je

$$0.036 = 3.6 \times 10^{-2}.$$

c) Število 14.0016 ima 6 značilnih mest. Ničli sta značilni, ker stojita med neničelnimi števkami. V normalizirani obliki lahko zapišemo

$$14.0016 = 1.40016 \times 10.$$

d) Število 80003 ima 5 značilnih mest. V normalizirani obliki bi ga zapisali kot

$$80003 = 8.0003 \times 10^4.$$

e) Število 0.01200 ima 4 značilna mesta. Prva ničla za decimalno piko ni značilna, zadnji dve ničli pa sta značilni, ker sta hkrati za decimalno piko in za neničelnima števkama. V normalizirani obliki dobimo

$$0.01200 = 1.200 \times 10^{-2}.$$

$\square$

(2) Zapiši dani realni števili na tri decimalke natančno:

(a) $\dfrac{1}{3} + \pi$,

(b) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

*Rešitev:* Ko računamo z realnimi števili, imamo na razpolago dve možnosti. Če vemo, da imamo opravka s števili kot so $\pi$, $e$, $\sqrt{2}$, ki jih poznamo natančno, lahko z njimi računamo simbolno, da dobimo čimbolj natančen rezultat. Če pa nas zanima samo decimalna številka, jih lahko nadomestimo z ustrezno dobrimi približki in nato računamo kot s približnimi števili.

a) Vsota racionalnega števila $1/3$ in iracionalnega števila $\pi$, zaokrožena na tri decimalke, je enaka

$$\frac{1}{3} + \pi = 3.475.$$

b) V tem primeru je

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3.146.$$

$\square$

(3) Zapiši dana racionalna števila kot ulomek:

(a) $2.6\overline{3}$,

(b) $0.\overline{810}$,

(c) $3.02\overline{6}$.

*Rešitev:* Racionalnim številom ustrezajo decimalni zapisi, pri katerih se od nekod dalje neka skupina števk periodično ponavlja. Iz decimalnega števila pridemo do ulomka tako, da najdemo dva ustrezna večkratnika števila, ki imata isti decimalni del.

a) Najprej označimo $x = 2.6\overline{3}$. Potem velja

$$\begin{aligned} x &= 2.6\overline{3}, \\ 10x &= 26.\overline{3}, \\ 100x &= 263.\overline{3}. \end{aligned}$$

Če odštejemo zadnji dve enakosti, pridemo do enačbe $90x = 237$, od koder sledi

$$x = \frac{237}{90} = \frac{79}{30}.$$

b) Naj bo sedaj $x = 0.\overline{810}$. Potem velja

$$\begin{aligned} x &= 0.\overline{810}, \\ 1000x &= 810.\overline{810}. \end{aligned}$$

Od tod dobimo $999x = 810$ in

$$x = \frac{810}{999} = \frac{30}{37}.$$

c) Tokrat označimo $x = 3.02\overline{6}$. Potem je

$$\begin{aligned} x &= 3.02\overline{6}, \\ 100x &= 302.\overline{6}, \\ 1000x &= 3026.\overline{6}. \end{aligned}$$

Sledi $900x = 2724$ in

$$x = \frac{2724}{900} = \frac{227}{75}.$$

□

(4) Izračunaj vsoti prvih $n$ naravnih števil in prvih $n$ lihih števil.

*Rešitev:* Označimo z $s_n$ vsoto prvih $n$ naravnih števil. Potem je prvih nekaj členov enakih

$$\begin{aligned} s_1 &= 1, \\ s_2 &= 1 + 2 = 3, \\ s_3 &= 1 + 2 + 3 = 6, \\ s_4 &= 1 + 2 + 3 + 4 = 10, \\ s_5 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15, \\ s_6 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21. \end{aligned}$$

Pri sodih $n$-jih lahko člene razdelimo po parih z obeh koncev. Tako vzamemo skupaj npr. prvi in zadnji člen, drugi in predzadnji itd. Takšnih parov je potem $\frac{n}{2}$, vsota števil v vsakem paru pa je enaka $n + 1$. Skupna vsota prvih $n$ števil je torej

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n + 1).$$

Na podoben način lahko izračunamo tudi vsoto v primeru, ko je $n$ liho število. V tem primeru sredinski člen ostane brez para, formula za vsoto pa ostane ista.

Poglejmo sedaj vsote lihih števil. Če označimo z $s_n$ vsoto prvih $n$ lihih števil, je

$$\begin{aligned} s_1 &= 1, \\ s_2 &= 1 + 3 = 4, \\ s_3 &= 1 + 3 + 5 = 9, \\ s_4 &= 1 + 3 + 5 + 7 = 16, \\ s_5 &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25, \\ s_6 &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36. \end{aligned}$$

Iz prvih nekaj vsot domnevamo, da je vsota prvih $n$ lihih števil enaka $n^2$. Da je to res, lahko pokažemo z uporabo principa popolne indukcije. Če hočemo dokazati, da neka formula velja za vsa naravna števila, je dovolj, da pokažemo:

· veljavnost formule za $n = 1$,

· da iz veljavnosti formule za poljuben $n \in \mathbb{N}$ sledi veljavnost formule za $n + 1$.

$\underline{n=1}$:

$$1 = 1^2.$$

$\underline{n \to n+1}$:

Privzemimo, da za nek $n \in \mathbb{N}$ velja $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$. Pokazati želimo, da potem velja tudi

$$\big(1+3+5+\ldots+(2n-1)\big) + (2n+1) = (n+1)^2.$$

Računajmo:

$$\big(1+3+5+\ldots+(2n-1)\big) + (2n+1) \overset{\text{I.P.}}{=} n^2 + (2n+1) = (n+1)^2.$$

$\square$

(5) Izračunaj prvih pet členov danih zaporedij, nariši njihov graf ter poišči njihova stekališča:

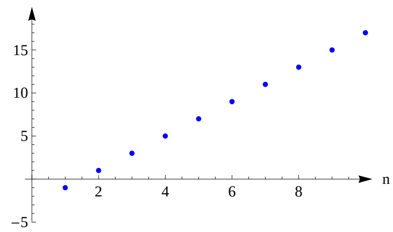
(a) $a_n = 2n-3$,
(b) $a_n = ((-1)^n - 1)n$,
(c) $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{4}$,
(d) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$.

*Rešitev:* a) V tem primeru je zaporedje $(a_n)$ podano z eksplicitno formulo $a_n = 2n-3$. Od tod dobimo

$$a_1 = -1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 3,\ a_4 = 5,\ a_5 = 7.$$

To zaporedje je naraščajoče in neomejeno, stekališč pa nima.

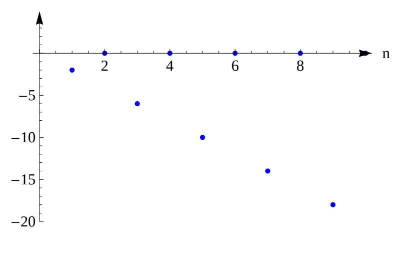
Poglejmo si še graf zaporedja.




b) Sedaj imamo zaporedje s splošnim členom $a_n = ((-1)^n - 1)n$. Prvih pet členov tega zaporedja je enakih

$$a_1 = -2,\ a_2 = 0,\ a_3 = -6,\ a_4 = 0,\ a_5 = -10.$$

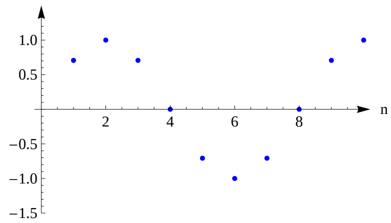
Sodi členi tega zaporedja so vsi enaki 0, lihi členi pa padajo proti negativni neskončnosti. To zaporedje ima eno stekališče, in sicer točko 0.



c) Zaporedje s splošnim členom $a_n = \sin \frac{n\pi}{4}$ ima prvih pet členov enakih

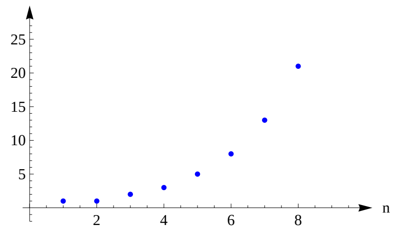
$$a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2},\ a_2 = 1,\ a_3 = \frac{\sqrt{2}}{2},\ a_4 = 0,\ a_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

To zaporedje dobimo z vzorčenjem sinusne funkcije. Če bi izračunali še nekaj nadaljnjih členov zaporedja, bi videli, da je zaporedje periodično. Od tod sledi, da množica stekališč zaporedja sovpada s sliko zaporedja, ki pa je $\{-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\}$.




4) V tem primeru imamo zaporedje podano z rekurzivno formulo $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, s pomočjo katere lahko korak za korakom izračunamo vrednosti členov zaporedja. Prvih pet členov je enakih

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2,\ a_4 = 3,\ a_5 = 5.$$




Temu zaporedju rečemo Fibonaccijevo zaporedje. Je naraščajoče in neomejeno, stekališč pa nima. □

(6) Za zaporedja z danimi začetnimi členi poišči splošni člen oziroma rekurzivni predpis:

(a) $2, -4, 8, -16, 32,$
(b) $1, 5, 9, 13, 17, 21,$
(c) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7},$
(d) $\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \frac{36}{64},$
(e) $2, 5, 14, 41, 122,$
(f) $1, 3, 6, 10, 15, 21.$

*Rešitev:* (a) Zaporedje $2, -4, 8, -16, 32, \ldots$ je geometrijsko zaporedje s splošnim členom

$$a_n = 2 \cdot (-2)^{n-1}.$$

(b) Zaporedje $1, 5, 9, 13, 17, 21, \ldots$ je aritmetično zaporedje s splošnim členom

$$a_n = 1 + 4(n-1) = 4n - 3.$$

(c) Splošni člen zaporedja $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots$ je

$$a_n = \frac{n+1}{n+2}.$$

(d) Splošni člen zaporedja $\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \frac{36}{64}, \ldots$ je

$$a_n = \frac{n^2}{2^n}.$$

(e) Zaporedje $2, 5, 14, 41, 122, \ldots$ lahko podamo rekurzivno z začetnim členom $a_1 = 2$ in z rekurzivnim predpisom

$$a_n = 3a_{n-1} - 1.$$

(f) Zaporedje $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$ lahko podamo rekurzivno z začetnim členom $a_1 = 1$ in z rekurzivnim predpisom

$$a_n = a_{n-1} + n.$$

□

(7) Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{1}{2n-1}$. Izračunaj limito zaporedja in ugotovi, koliko členov zaporedja je od limite oddaljenih za 0.01 ali več.

*Rešitev:* Prvih pet členov zaporedja je

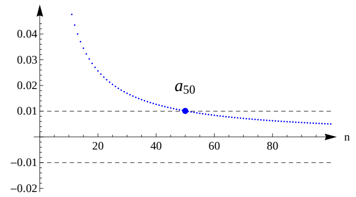
$$a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{3},\ a_3 = \frac{1}{5},\ a_4 = \frac{1}{7},\ a_5 = \frac{1}{9}.$$

Vidimo, da členi padajo proti nič, zato domnevamo, da je $L = 0$ limita zaporedja $(a_n)$.

Po definiciji limite zaporedja to pomeni, da so v poljubnem intervalu okoli števila $L = 0$ vsebovani vsi členi zaporedja od nekega dalje. V našem konkretnem primeru nas bo zanimal interval $(-0.01, 0.01)$. Členi, ki ležijo izven tega intervala, zadoščajo neenakosti $|a_n| \geq 0.01$. Z uporabo predpisa zaporedja $(a_n)$ od tod dobimo naslednjo neenačbo

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{2n-1}\right| &\geq 0.01, \\ \frac{1}{2n-1} &\geq \frac{1}{100}, \\ 2n-1 &\leq 100, \\ n &\leq \frac{101}{2}. \end{aligned}$$

Torej je od limite za 0.01 ali več oddaljenih prvih 50 členov zaporedja $(a_n)$. Členi, ki so od limite oddaljeni za manj kot 0.01, ležijo v pasu širine 0.02 okoli abscisne osi.




□

(8) Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{2n+3}{n+1}$. Izračunaj limito zaporedja in ugotovi, koliko členov zaporedja je od limite oddaljenih za 0.05 ali več.

*Rešitev:* Limita zaporedja $(a_n)$ je enaka

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 2.$$

Sedaj nas bo zanimalo, koliko členov zaporedja $(a_n)$ leži izven intervala $(2-\epsilon, 2+\epsilon)$, kjer je $\epsilon = 0.05$. Členi, ki ležijo izven tega intervala, zadoščajo neenakosti

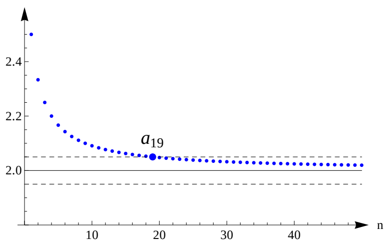
$$|a_n - 2| \geq 0.05.$$

Z uporabo predpisa zaporedja $(a_n)$ dobimo neenačbo

$$\begin{aligned}
|a_n - 2| &\geq 0.05, \\
\left|\frac{2n+3}{n+1} - 2\right| &\geq 0.05, \\
\left|\frac{2n+3-2n-2}{n+1}\right| &\geq 0.05, \\
\frac{1}{n+1} &\geq \frac{1}{20}, \\
n+1 &\leq 20, \\
n &\leq 19.
\end{aligned}$$

Od tod sklepamo, da je od limite za 0.05 ali več oddaljenih samo prvih 19 členov zaporedja $(a_n)$. Preverimo lahko, da je člen $a_{19} = 2.05$ oddaljen natanko 0.05 od limite.

Poglejmo si sedaj še graf zaporedja $(a_n)$. Členi, ki so od limite oddaljeni za manj kot 0.05, ležijo v vodoravnem pasu širine 0.1 okrog limitne vrednosti.




Podobno sliko dobimo pri vsakem konvergentnem zaporedju, le da v splošnem ni nujno, da se členi monotono približujejo limiti, ampak lahko okrog nje tudi malo nihajo. □

(9) Izračunaj limito zaporedja s splošnim členom:

(a) $a_n = \dfrac{4(n+1)}{6n-5}$,

(b) $a_n = \dfrac{n^2+n+1}{(n+1)^2}$.

*Rešitev:* Pri računanju limit si bomo pomagali z naslednjimi limitami oziroma s pravili za računanje s konvergentnimi zaporedji:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)+\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)}$,

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^k}=0$ za vsak $k>0$,

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^n=e^r$ za vsak $r\in\mathbb{R}$,

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n^{b_n}\right)=\left(\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)}$.

Pri pravilu 3) je pogoj, da so členi zaporedja $(b_n)$ neničelni in da je $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)\neq 0$, pri pravilu 6) pa zahtevamo, da so členi zaporedja $(a_n)$ pozitivni in da je $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)>0$.

Najprej si bomo pogledali limite racionalnih zaporedij. Limite tega tipa izračunamo tako, da najprej delimo števec in imenovalec z najvišjo potenco, ki se pojavi v izrazu, nato pa uporabimo limito 4).

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4(n+1)}{6n-5}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+4}{6n-5}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4+\frac{4}{n}}{6-\frac{5}{n}}=\dfrac{2}{3}.$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+1}{(n+1)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+1}{n^2+2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}=1.$

□

(10) Izračunaj limito zaporedja s splošnim členom:

(a) $a_n=\dfrac{\sqrt{n^2-n}-n}{2}$,

(b) $a_n=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}$.

*Rešitev:* Limite iracionalnih zaporedij računamo podobno kot limite racionalnih zaporedij, le da skušamo z delno racionalizacijo razlike korenov pretvoriti v vsote korenov.

(a) Računajmo:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-n}-n}{2} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2-n}-n)(\sqrt{n^2-n}+n)}{2(\sqrt{n^2-n}+n)},\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-n)-n^2}{2(\sqrt{n^2-n}+n)},\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{-1}{2\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1\right)},\\
&= -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

(b) V tem primeru moramo delno racionalizirati tako števec kot imenovalec:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}} \cdot \frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

(11) Izračunaj limito zaporedja s splošnim členom:

(a) $a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$,

(b) $a_n = \left(\frac{n+5}{n-3}\right)^{n-1}$,

(c) $a_n = \left(\frac{n-2}{n+1}\right)^{2n+1}$.

*Rešitev:* Te tri limite bomo izračunali s prevedbo na limite tipa 5) in pa z uporabo pravila 6) iz naše tabele.

$$\text{a)}\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1-\frac{2}{n+1}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)} = e^{-2}.$$

$$\text{b)}\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n-3}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{8}{n-3}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{8}{n-3}\right)^{n-3}\right)^{\frac{n-1}{n-3}} = e^{8}.$$

$$\text{c)}\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n+1}\right)^{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n+1}\right)^{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{3}{n+1}\right)^{n+1}\right)^{\frac{2n+1}{n+1}} = \left(e^{-3}\right)^2 = e^{-6}.$$

□

(12) Ugotovi, ali je zaporedje $a_n = \frac{n+3}{n}$ naraščajoče ali padajoče ter to tudi dokaži.

*Rešitev:* Najprej izračunajmo prvih nekaj členov zaporedja

$$a_1 = 4,\ a_2 = \frac{5}{2},\ a_3 = 2,\ a_4 = \frac{7}{4}.$$

Od tod domnevamo, da je zaporedje $(a_n)$ padajoče. Formalno lahko to domnevo pokažemo tako, da pokažemo, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$a_{n+1} - a_n \leq 0.$$

Računajmo

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{n+4}{n+1} - \frac{n+3}{n}, \\ &= \frac{(n+4)n - (n+1)(n+3)}{n(n+1)}, \\ &= \frac{n^2 + 4n - n^2 - 4n - 3}{n(n+1)}, \\ &= \frac{-3}{n(n+1)} < 0. \end{aligned}$$

□

(13) (a) Na banko položimo depozit 5000 evrov za 5 let pri letni obrestni meri 4%. Kolikšna bo vrednost glavnice po petih letih?

(b) Na banki vzamemo kredit 10000 evrov za 5 let pri fiksni obrestni meri 7%. Izračunaj vrednost anuitete.

*Rešitev:* (a) Označimo z $G_0 = 5000$ evrov začetno vrednost glavnice (to je vsota, ki smo jo položili na banko) in naj bo $p = 0.04$ letna obrestna mera. Po enem letu bi tako imeli na računu denar, ki smo ga položili, plus obresti, kar znese

$$G_1 = G_0\,(1 + 0.04) = 5000 \cdot 1.04 = 5200.$$

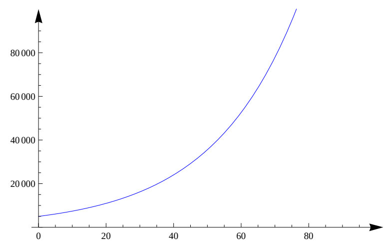
Po drugem letu za začetno vrednost vzamemo $G_1$ in ji dodamo še obresti glede na to vrednost. Po dveh letih bi tako imeli na računu

$$G_2 = G_1\,(1 + 0.04) = G_0\,(1 + 0.04)^2 = 5000 \cdot (1.04)^2 = 5408.$$

Splošna formula za vrednost glavnice po $n$-letih se glasi

$$G_n = G_0\,(1 + p)^n\,.$$

Vidimo, da vrednost glavnice raste eksponentno z osnovo, ki je le malo večja od 1. Zato je na začetku kar nekaj časa rast približno linearna.




Po petih letih bi imeli na računu naslednje število evrov

$$G_5 = 5000 \cdot (1.04)^5 = 6083.$$

(b) Denimo sedaj, da na banki vzamemo kredit $G = 10000$ evrov za $n = 5$ let pri fiksni obrestni meri $p = 0.07$. Če bi ves denar banki vrnili po petih letih, bi ji morali plačati naslednje število evrov

$$10000 \cdot (1.07)^5 = 14026.$$

Če denar vračamo enkrat letno, se skupna vsota, ki jo vrnemo banki, malo zmanjša, letni obrok oziroma anuiteto pa lahko izračunamo s pomočjo formule

$$A = G \cdot \frac{p(1+p)^n}{(1+p)^n - 1}.$$

V našem primeru tako dobimo

$$A = 10000 \cdot \frac{0.07 \cdot (1.07)^5}{(1.07)^5 - 1} = 2439.$$

Skupna vsota, ki jo vrnemo banki, je tedaj $5 \cdot 2439 = 12195$ evrov. $\square$

(14) Izračunaj vsote danih vrst:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

*Rešitev:* (a) Vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$$

je geometrijska vrsta z začetnim členom $a = \frac{1}{3}$ in količnikom $q = \frac{1}{3}$. Vsota geometrijske vrste je končna, če je $|q| < 1$. V tem primeru je njena vsota enaka

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

V našem primeru je torej

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

(b) Vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{3}{5} + \frac{3}{25} + \frac{3}{125} + \frac{3}{625} + \dots$$

je geometrijska vrsta z začetnim členom $a = \frac{3}{5}$ in količnikom $q = \frac{1}{5}$, zato je njena vsota enaka

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{3}{4}.$$

(c) Vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

ne moremo izračunati s pomočjo formule kot prejšnjih dveh. V takem primeru poskušamo najprej izračunati delne vsote

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

V našem primeru je

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{2},\\
s_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3},\\
s_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4},\\
s_4 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

S pomočjo matematične indukcije lahko dokažemo, da velja

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n}{n+1}.$$

Vsota vrste je potem enaka limiti delnih vsot

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} (s_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

$\square$