4. izpit 2001/02

1. Računsko in grafično reši neenačbo $\left|\frac{x}{x^2-1}\right| > x$.

   [Rešitev: Realno os razdelimo na štiri območja: $x > 1$, $1 > x \geq 0$, $0 > x > -1$ in $x < -1$. Na prvem območju je rešitev $x < \sqrt{2}$, medtem ko so drugod rešitev celotna območja brez ničle. Skupna rešitev je: $\{x \mid x < \sqrt{2}, x \neq \{1, 0, -1\}\}$.]

2. Izračunaj vse kar je mogoče s pomočjo prvega in drugega odvoda za funkcijo $f(x) = \arctan \frac{x}{1-x}$ in jo skiciraj.

   [Rešitev: $D_f : x \neq 1$; ničla: $x = 0$; vodoravna asimplota: $y = \arctan(-1)$; posebna točka: $\lim_{x\downarrow 1} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ in $\lim_{x\uparrow 1} f(x) = \frac{\pi}{2}$; odvod: $f'(x) = \frac{1}{2x^2-2x+1} \Rightarrow$ ni ekstremov, $f''(x) = \frac{-4x+2}{(2x^2-2x+1)^2} \Rightarrow$ prevoj $P(\frac{1}{2}, \arctan 1)$; funkcija povsod (kjer je definirana) narašča in je konveksna na intervalu $(-\infty, \frac{1}{2})$ ter konkavna na območju $(\frac{1}{2}, 1) \cup (1, \infty)$.]

3. Razišči zaporedje $a_n = (-1)^n \frac{3n-2}{2n+1}$. (Poišči stekališča, preveri monotonost in omejenost ter izračunaj še limito, če obstaja.)

   [Rešitev: stekališči: $s_1 = \frac{3}{2}$ in $s_2 = -\frac{3}{2}$, zaporedje z dvema stekališčema nima limite in ni monotono, je pa omejeno z obema stekališčema.]

4. Poišči rešitve naslednjega sistema

$$\begin{aligned} 2x + y + z - u &= 1 \\ x + y + 2z + u &= 2 \\ 2x + y + z - 2u &= 0 \\ 3x + y - z - u &= -1. \end{aligned}$$

   [Rešitev: $x = 4$, $y = -9$, $z = 3$ in $u = 1$.]